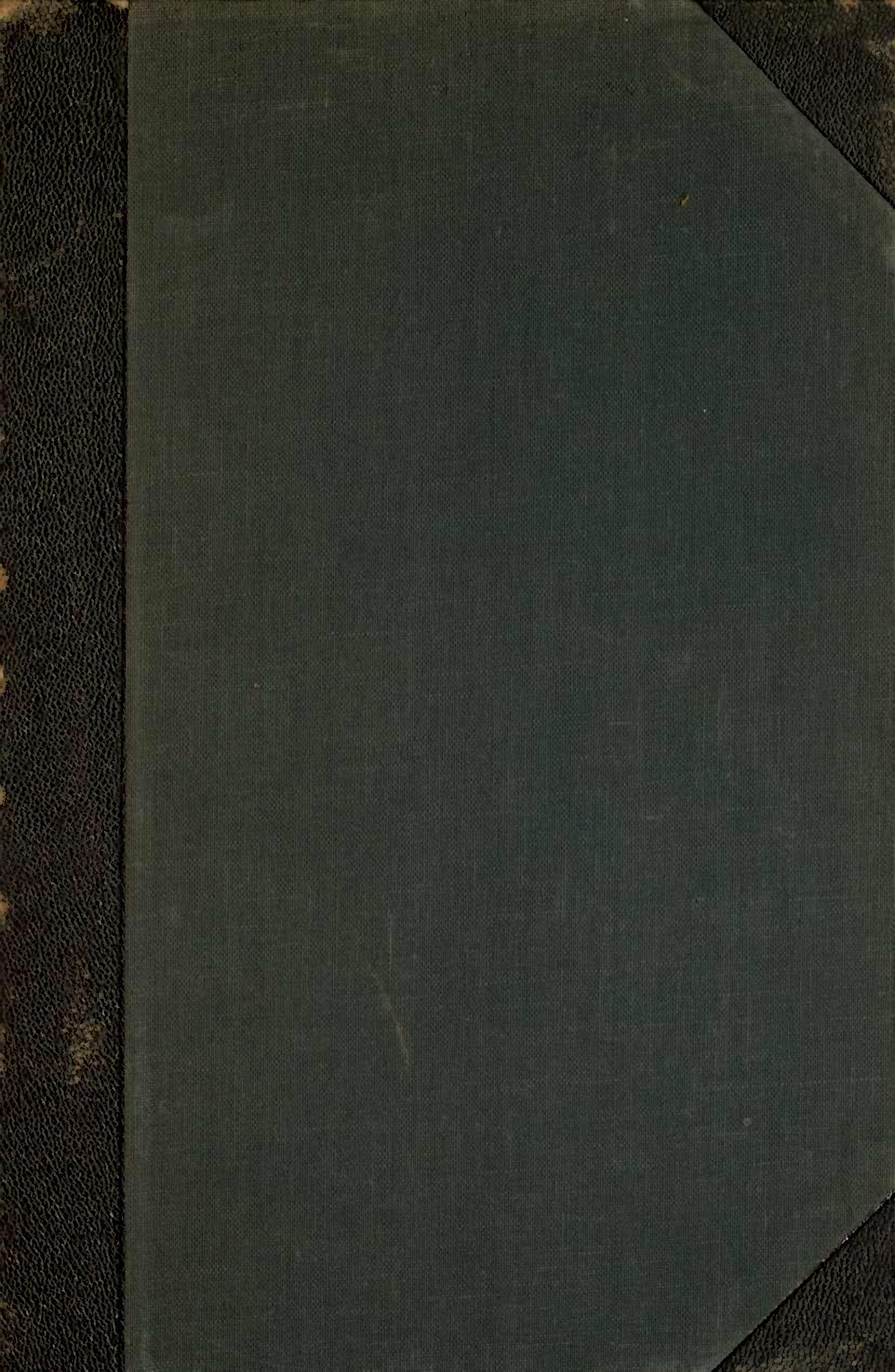
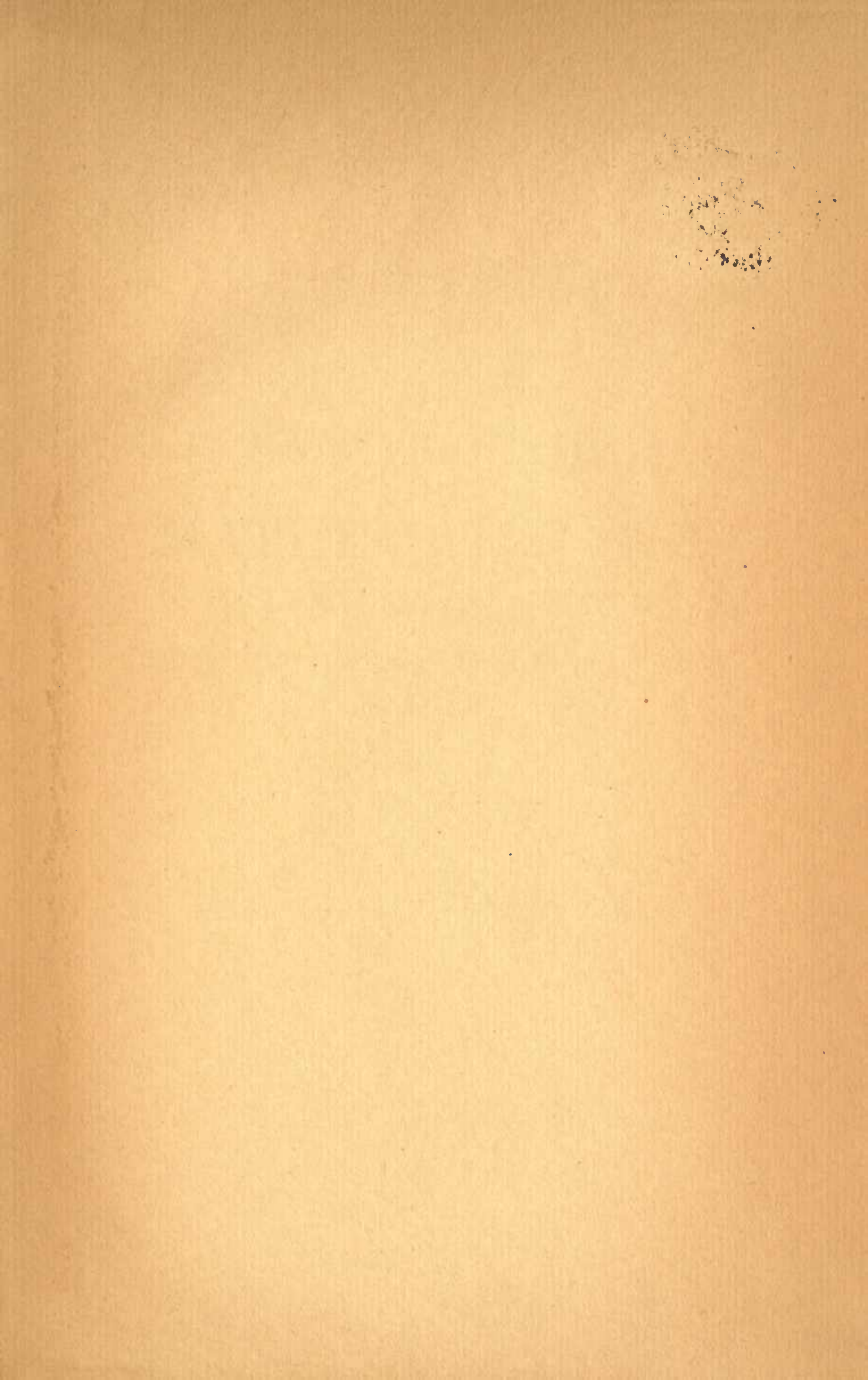
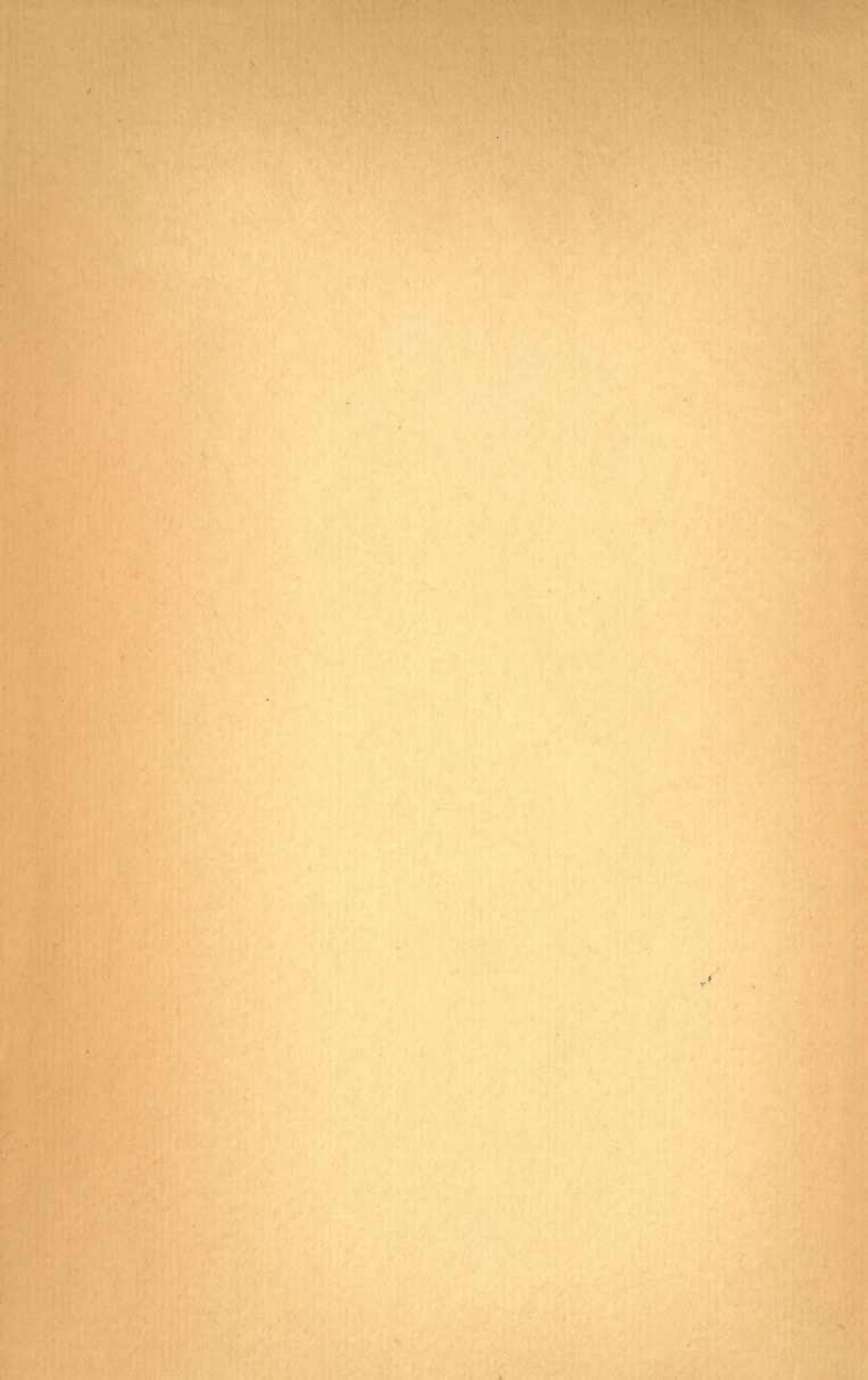




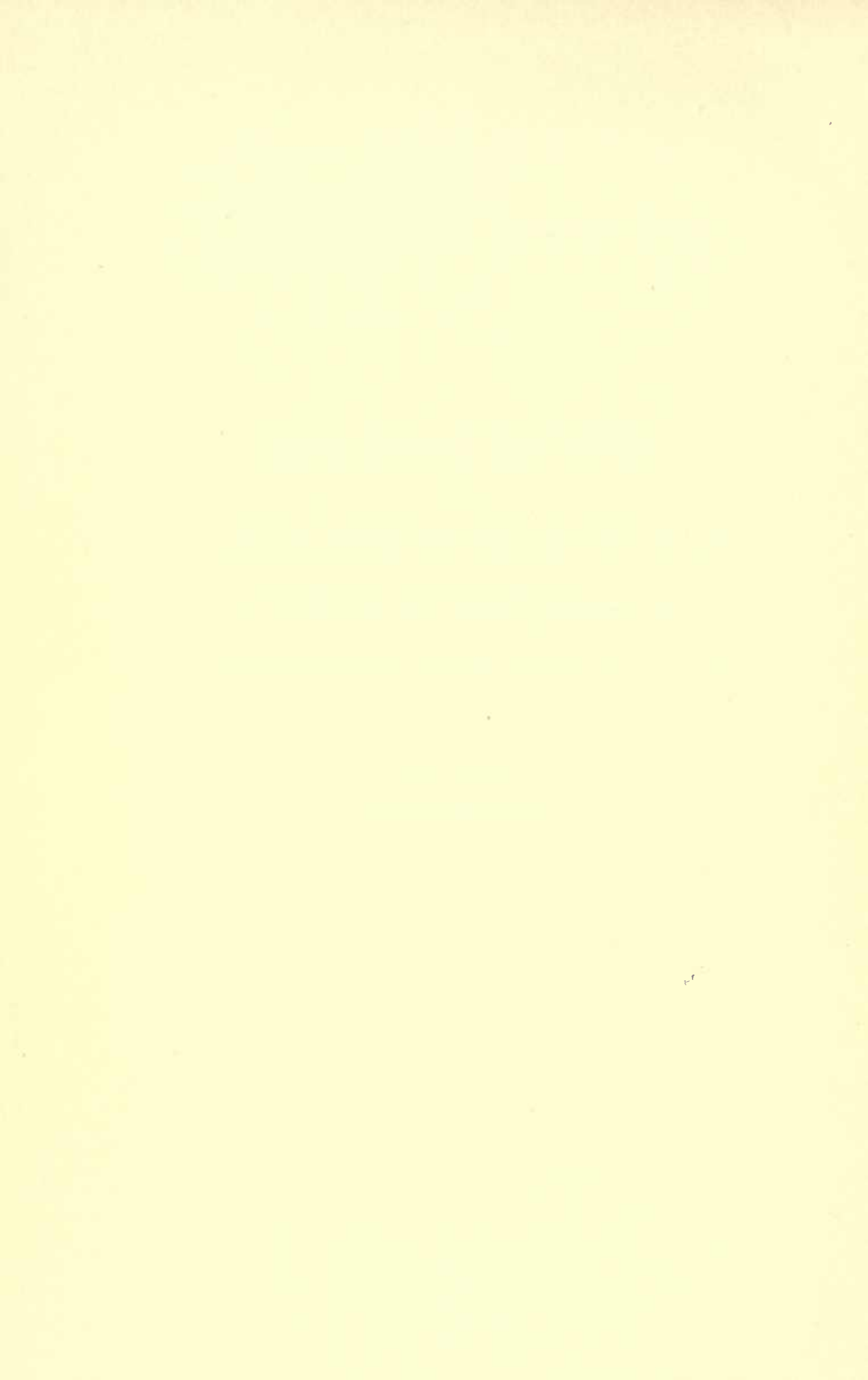




ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND:

GEOMETRIE



ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DRITTER BAND IN DREI TEILEN

GEOMETRIE

REDIGIERT VON

W. FR. MEYER UND H. MOHRMANN
IN KÖNIGSBERG IN BASEL

DRITTER TEIL

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1902—1927

Inhaltsverzeichnis zu Band III, 3. Teil.

D. Differentialgeometrie.

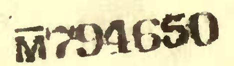
1. 2. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen. Von H. v. MANGOLDT in Aachen (jetzt in Danzig).

Einleitung.

I. Die einzelne Linie oder Fläche. Grundbegriffe.

II. Scharen von Linien und Flächen.

III. Inhaltsberechnungen.



Seite

IV. Die Linien im Raume.

V. Anfangsgründe der Flächentheorie.

(Abgeschlossen im Mai 1902.)

3. Die auf einer Fläche gezogenen Kurven. Von R. v. LILIENTHAL in Münster i. W.

I. Methoden von Euler und Monge. Krümmungslinien, Haupttangentenkurven, konjugierte Linien.

II. Weitere Methoden.

III. Geodätische Krümmung.

IV. Geodätische Linien.

V. Isotherme Linien.

VI. Parameterlinien. Fundamentalgleichungen.

III. Sinusspiralen und ihre Verallgemeinerungen.

IV. Transzendente Raumkurven.

V. Sonstiges.

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

5. Besondere Flächen. Von R. v. Lilienthal in Münster i. W.

I. Geradlinige Flächen.

II. Weitere kinematisch definierbare Flächen.

III. Krümmungsmittelpunktsflächen.

IV. Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

V. Weingartensche Flächen.

VI. Minimalflächen.

VII. Flächen konstanter Krümmung.

VIII. Weitere besondere Flächen.

(Abgeschlossen im August 1903.)

6. Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander.
Von A. Voss in Würzburg (jetzt in München).

A. Einleitung.

B. Die Abbildung der Flächen.

(Abgeschlossen im Oktober 1914.)

8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen. Von Heinrich Liebmann in München (jetzt in Heidelberg).

(Abgeschlossen im Oktober 1914.)

9. Dreifach orthogonale Flächensysteme. Von E. Salkowski in Hannover.

Einleitung.

Seite

II. Die Differentialgleichung dritter Ordnung.

III. Besondere dreifach orthogonale Systeme.

IV. Die zyklischen Systeme Ribaucours.

V. Die Bianchischen Systeme.

VI. Kinematische Fragestellungen.

VII. Hilfsmittel der mehrdimensionalen Geometrie.

(Abgeschlossen im April 1920.)

10. Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten. Von R. Weitzenböck in Graz (jetzt in Amsterdam).

Erster Teil.

a) Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie.

A. Invarianten der allgemeinen projektiven Gruppe.

B. Invarianten projektiver Untergruppen.

Zweiter Teil.

b) Differentialinvarianten.

A. Einleitung.

B. Differentialinvarianten spezieller Transformationsgruppen.

C. Theorie der Differentialformen.

(Abgeschlossen im März 1921.)

11. Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. Von L. Berwald in Prag.

III. m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten ($1 < m < n$), die in einer n-dimensionalen enthalten sind.

IV. Besondere Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

V. Neuere Grundlegung der Infinitesimalgeometrie.

(Abgeschlossen im Oktober 1923.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande III, 3. Teil zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

D. Differentialgeometrie.

III D 1, 2. ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG AUF KURVEN UND FLÄCHEN.

Von

H. v. MANGOLDT

IN AACHEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, Paris 1797, 2. éd. 1813 = Oeuvres 9, Paris 1881; Seconde partie.

G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie, Paris 1807; 5. éd. par *J. Liouville,* Paris 1850.

Ch. Dupin, Développements de géométrie, Paris 1813.

A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, Paris, t. I, 1826; t. II, 1828.

G. Salmon, Treatise on the higher plane curves, 1. ed. Dublin 1852; 3. ed. 1879. Deutsche Ausgabe: Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, von *W. Fiedler,* 2. Aufl. Leipzig 1882. Franz. Ausgabe von *O. Chemin,* mit einem Anhang über singuläre Punkte von *G. Halphen,* Paris 1884.

O. Böklen, Analytische Geometrie des Raumes, Stuttgart 1861, 2. Aufl. 1884.

F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872; 3. Aufl., bearb. v. *L. Natani,* 1890.

R. Hoppe, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil, Lehrbuch der analytischen Kurventheorie, Leipzig 1880; II. Teil, Prinzipien der Flächentheorie, Leipzig 1876, 2. Aufl. 1890.

G. Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino 1887.

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 Bände, Paris 1887 bis 1896.

J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888.

H. Stahl und *V. Kommerell,* Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, Leipzig 1893.

E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Neapel 1896. Deutsche Ausgabe: Vorlesungen über natürliche Geometrie, von *G. Kowalewski,* Leipzig 1901.

L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1893, 2. ed. 1902 [erweiterte Ausgabe der autogr. Vorlesungen von 1886]. Deutsche Ausgabe, Vorlesungen über Differentialgeometrie, von *M. Lukat,* Leipzig 1896 bis 1899.

C. Burali-Forti, Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de *H. Grassmann,* Paris 1897.

L. Raffy, Leçons sur les applications géométriques de l'analyse, Paris 1897.

G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova 1898.

W. de Tannenberg, Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel, Paris 1899.

G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 1. Bd., Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1901; 2. Bd., Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902.

Übrigens vergleiche man auch die Lehr- und Übungsbücher der analytischen Geometrie, sowie der Analysis und der Infinitesimalrechnung (II A 2). Über die letzteren hat *G. Bohlmann,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6, 1899, eine Übersicht gegeben.

Monographieen.

W. Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, Leipzig 1859; 2. Aufl. 1898.

P. Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860.

K. Peterson, Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868.

A. Haas, Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmasses, Diss. Tübingen, 1881. (Mit Vorsicht zu benutzen.)

R. v. Lilienthal, Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig 1896.

Bezeichnungen.

Die aufeinanderfolgenden Ableitungen einer Funktion $f(x)$ von *einer* Veränderlichen werden der Reihe nach durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x), \ldots$ bezeichnet. Bei einer Funktion $F(x, y, z, \ldots)$ von *mehreren* Veränderlichen dienen zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen erster Ordnung in Bezug auf $x, y, z, \ldots$ beziehentlich die Zeichen:

$$F_x(x, y, z, \ldots); \quad F_y(x, y, z, \ldots); \quad F_z(x, y, z, \ldots); \ldots,$$

und zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung die Zeichen:

$$F_{xx}(x, y, z, \ldots) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \qquad F_{xy}(x, y, z, \ldots) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

$$F_{xz}(x, y, z, \ldots) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}; \ldots \quad F_{yy}(x, y, z, \ldots) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \ldots.$$

Wenn die Angabe der Argumente nicht erforderlich ist, werden zur Bezeichnung der erwähnten Ableitungen kurz die Zeichen:

$$f', f'', f''', \ldots$$

$$F_x, F_y, F_z, \ldots$$

$$F_{xx}, F_{xy}, F_{xz}, \ldots, F_{yy}, \ldots$$

angewendet.

Einleitung.

1. Vorbemerkungen. Die Worte *Linie* und *Fläche* haben in der Litteratur bald einen weiteren, bald einen engeren Sinn. Näheres hierüber ist in III B 1 a angegeben. Ebendaselbst ist gezeigt, dass eine Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie nur bei geeigneter Einschränkung der Begriffe Linie und Fläche möglich ist[1]), und es sind ferner die Gründe angegeben, die es zulässig erscheinen lassen, bei dieser Einschränkung so weit zu gehen, dass man die Darstellbarkeit mittels analytischer Funktionen fordert. Auf Grund dieser Ausführungen sollen im Nachfolgenden die Worte *Linie* und *Fläche*, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich angegeben wird, in ihrer *engsten* Bedeutung = reelle analytische Linie, bez. Fläche gebraucht werden. Ähnliches gilt von dem Worte *Funktion* (= reellwertige analytische Funktion) und den üblichen Funktionszeichen $f, \varphi, \chi, \ldots F, \Phi, X, \ldots$.

Viele der im Nachfolgenden zu erklärenden Begriffe stammen bereits aus dem Altertum oder aus der Zeit der Erfindung der Infinitesimalrechnung, während die heute übliche scharfe Fassung ihrer Erklärungen erst in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts in Aufnahme gekommen ist, nachdem die kritische Durchforschung der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung und der Bedingungen ihrer Anwendbarkeit zu genaueren Begriffsbestimmungen genötigt hatte.

2. Zusammengehörige Annahmen und Bezeichnungen. Im Nachfolgenden wird durch die Ziffern I bis IV auf die folgenden in der Litteratur oft vorkommenden zusammengehörigen Annahmen und Bezeichnungen hingewiesen:

I. Eine Linie l ist in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben durch zwei [drei] Gleichungen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t) \,[, z = \psi(t)],$$

welche die Koordinaten $x, y\,[, z]$ eines veränderlichen Punktes P von l als Funktionen einer zwischen gewissen Grenzen unbeschränkt veränderlichen reellen Hülfsveränderlichen t darstellen. t_0 bedeutet einen speziellen Wert der letzteren und P_0 den entsprechenden Punkt von l; $x_0, y_0\,[, z_0]$ sind die Koordinaten dieses Punktes und $x_0', y_0'\,[, z_0']$; $x_0'', y_0''\,[, z_0'']$; $x_0''', y_0'''\,[, z_0''']$; ... die Werte, welche die Ableitungen

1) Diese Erkenntnis hat sich erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelt. Näheres II A 2, Nr. 4.

$\varphi'(t), \chi'(t)[, \psi'(t)]; \varphi''(t), \chi''(t)[, \psi''(t)]; \varphi'''(t), \chi'''(t)[, \psi'''(t)]; \dots$ für $t = t_0$ annehmen.

II. Eine ebene Linie l ist in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad \text{oder auch} \quad y = f(x)$$

zwischen den Koordinaten x und y gegeben; x_0, y_0 sind die Koordinaten eines speziellen Punktes von l und y_0', y_0'' die Werte, welche die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = x_0$ annehmen.

III. Eine Fläche $\mathfrak{F}$ ist in einem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem gegeben durch drei Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

welche die Koordinaten x, y, z eines veränderlichen Punktes von $\mathfrak{F}$ als Funktionen von zwei reellen in einem zweifach ausgedehnten Bereich unbeschränkt veränderlichen Hülfsveränderlichen u, v darstellen. Zur Abkürzung ist

$$\chi_u\psi_v - \psi_u\chi_v = A; \quad \psi_u\varphi_v - \varphi_u\psi_v = B; \quad \varphi_u\chi_v - \chi_u\varphi_v = C$$

gesetzt; u_0, v_0 bedeuten ein Paar spezieller Werte der Veränderlichen u, v und $x_0, y_0, z_0, A_0, B_0, C_0$ sind die Werte, welche die eben erklärten Funktionen von u und v für dieses spezielle Wertepaar annehmen; P_0 ist der Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0.

IV. Eine Fläche $\mathfrak{F}$ ist in einem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem durch eine Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0$$

zwischen den Koordinaten x, y, z gegeben; x_0, y_0, z_0 sind die Koordinaten eines speziellen Punktes P_0 von $\mathfrak{F}$.

Sind A, B irgend zwei Punkte einer Geraden, bei welcher man eine positive und eine negative Richtung unterschieden hat, z. B. einer Axe eines Systems von Parallelkoordinaten, so soll $\overline{AB} = -\overline{BA}$ stets diejenige positive oder negative Zahl bedeuten, deren absoluter Wert die Länge der Strecke AB angiebt, und deren Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem die Richtung von A gegen B mit der positiven Richtung der betrachteten Geraden übereinstimmt oder nicht.

3. Gewöhnliche und singuläre Punkte. Ein Punkt P_0 einer auf ein ebenes [räumliches] System von Parallelkoordinaten $x, y[, z]$ bezogenen Linie l heisst *gewöhnlich* [2]), wenn man die Gesamtheit aller

2) Vgl. z. B. *C. Jordan*, Cours d'anal. 1, 1. Aufl. Paris 1882, p. 198, 202, 209, 213, oder 2. Aufl. Paris 1893, p. 397 ff.

in einer gewissen Nähe von P_0 gelegenen Punkte von l durch zwei [drei] Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t)\,[, z = \psi(t)]$$

so darstellen kann, dass:

1) dem Punkt P_0 nur *ein* Wert t_0 der Hülfsveränderlichen t entspricht;

2) die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)\,[, \psi(t)]$ an der Stelle t_0 den Charakter ganzer Funktionen haben;

3) die Ableitungen $\varphi'(t_0)$, $\chi'(t_0)\,[, \psi'(t_0)]$ nicht sämtlich gleich Null sind[3]).

Für Flächen würde man unter Zugrundelegung der in Nr. 2, III angegebenen Darstellungsart eine Erklärung von ganz ähnlichem Wortlaut aufstellen können. Jedoch erreicht man hier sachlich genau dasselbe kürzer durch folgende Erklärung:

Ein einer Fläche $\mathfrak{F}$ angehörender Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 heisst *gewöhnlich*[4]), wenn man die Gesamtheit aller in einer gewissen Nähe von P_0 liegenden Punkte von $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z) = 0$$

darstellen kann, welche so beschaffen ist, dass die Funktion $F(x, y, z)$ an der Stelle x_0, y_0, z_0 den Charakter einer ganzen Funktion hat, und dass die Ableitungen F_x, F_y, F_z daselbst nicht sämtlich gleich Null sind.

Ein nicht gewöhnlicher Punkt einer Linie oder Fläche heisst immer *singulär*[5]). Häufig werden aber ausserdem, wenigstens bei

---

3) Wenn eine ebene Linie l durch eine Gleichung zwischen x und y und auf l ein Punkt P_0 gegeben ist, welcher auf Grund der obigen Erklärung zu den gewöhnlichen gehören würde, so kann es vorkommen, dass durch P_0 auch noch „imaginäre Zweige" von l hindurchgehen, und dass es deswegen unter Umständen zweckmässig ist, den Punkt P_0 den singulären Punkten zuzuzählen. Ähnliches gilt für Punkte auf gewundenen Linien sowie auf Flächen.

4) In Art. 3 der Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Gott. 6 (1828) = Werke 4, Göttingen 1880, p. 222, nennt *C. F. Gauss* eine Fläche in einem Punkte A stetig gekrümmt, wenn die Richtungen aller von A nach den unendlich nahe benachbarten Punkten der Fläche führenden Geraden nur unendlich wenig von einer und derselben durch A gehenden Ebene abweichen. Punkte, die dieser Erklärung nicht entsprechen, nennt er singulär, aber der Ausdruck gewöhnlicher Punkt findet sich bei ihm noch nicht. — Auch *Ch. Dupin* spricht, Dével. de géom. p. 60, von singulären Punkten, hat aber für den Gegensatz keine besondere Bezeichnung.

5) Nach *M. Cantor,* Vorlesungen üb. Geschichte d. Math. 3, Leipzig 1898, p. 770, dürfte der Ausdruck „singulärer Punkt" zum erstenmal bei *J. P. de Gua*

Linien, auch solche gewöhnliche Punkte, die irgend welche für die gerade vorliegende Untersuchung wichtige Eigentümlichkeiten darbieten (z. B. Wendepunkte) als singuläre Punkte bezeichnet[6]).

Eine Linie l [eine Fläche $\mathfrak{F}$] heisst *krumm* in der Nähe eines ihrer Punkte, wenn es keine diesen Punkt enthaltende gerade Strecke [ebene Fläche] giebt, deren Punkte sämtlich zu l [$\mathfrak{F}$] gehörten.

I. Die einzelne Linie oder Fläche. Grundbegriffe.

4. Tangente, Normale, Tangentenebene u. s. w. Es sei P ein fester Punkt einer analytischen oder nicht analytischen, ebenen oder gewundenen Linie l und P_1 ein dem Punkte P benachbarter[7]) Punkt von l. Wenn sich dann die Gerade PP_1 bei unbegrenzter Annäherung des Punktes P_1 an den Punkt P einer festen Grenzlage PT nähert, und zwar immer derselben, einerlei wie die erwähnte Annäherung erfolgt, so nennt man die Gerade PT die *berührende Gerade* oder die *Tangente*[8]) und jede durch PT hindurchgehende Ebene eine *berührende Ebene* oder *Tangentenebene* der Linie l im Punkte P und

---

de Malves, Usage de l'analyse de Descartes etc. Paris 1740, 2. Abschnitt vorkommen. — Wenn eine Linie (Fläche) sich selbst schneidet, so ist jeder Schnittpunkt auf Grund der obigen Erklärungen für die Linie (Fläche) als Ganzes ein singulärer, während er für einen einzelnen durch ihn hindurchgehenden „Zweig" („Mantel") (III B 1 a) sehr wohl ein gewöhnlicher sein kann.

6) Vgl. *W. Schell,* Allgem. Theorie der Kurven doppelter Krümmung, 1. Aufl. p. 11, 2. Aufl. p. 15; *G. Peano,* Applicazioni, p. 65.

7) Der Fall, dass ein vereinzelt liegender Punkt aus irgend welchen Gründen als zu einer Linie gehörig angesehen wird, was beispielsweise, wenn $f(x)$ für $x = x_0$ einen endlichen Sprung hat, zuweilen dadurch geschieht, dass man den Punkt $x = x_0$, $y = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ der „Linie" $y = f(x)$ zurechnet, sei hier von der Betrachtung ausgeschlossen.

8) Diese Erklärung des Begriffs Tangente ist erst nach Erfindung der Infinitesimalrechnung üblich geworden. In früheren Zeiten, denen der Begriff des Grenzübergangs fremd war, wurde die Tangente (unter Ausserachtlassung des Falls eines Wendepunktes) nach dem Vorgang von *Euklid* (Elemente, 3. Buch, Erklärung 2) als eine mit der Linie im Berührungspunkt zusammentreffende, sie aber daselbst nicht schneidende Gerade erklärt. Die Eigenschaft der Tangente, sich der krummen Linie derart anzuschmiegen, dass durch den Berührungspunkt keine neue zwischen der Tangente und der Kurve liegende Gerade gezogen werden kann, erscheint bei den Alten (*Euklid*, Elemente, 3. Buch, Satz 16; *Apollonius,* Kegelschnitte, 1. Buch, Satz 32, 35, 36) lediglich als Lehrsatz, ist aber neuerdings — zuerst wohl von *J. L. Lagrange,* Théorie des fonct. anal. sec. partie, chap. 1 u. 2 — auch zur Erklärung benutzt worden, z. B. von *R. Baltzer,* Elemente der Mathematik 2, 2. Aufl. Leipzig 1867, 4. Buch, § 3, Nr. 5.

P selbst den *Berührungspunkt* dieser Tangente, bez. Tangentenebene. Ferner nennt man die in P auf der Tangente senkrecht stehende Ebene die *Normalebene* und jede in P auf der Tangente senkrecht stehende Gerade eine *Normale* von l im Punkte P. Ist l eben, so versteht man unter der Normale schlechthin die in der Ebene von l enthaltene Normale.

Wenn P ein gewöhnlicher Punkt (Nr. 3) einer Linie l ist, so hat l in P immer eine Tangente, und wenn auf l in hinreichender Nähe von P irgend zwei verschiedene Punkte P_1, P_2 nach Belieben angenommen und unabhängig von einander dem Punkte P unbegrenzt nahe gerückt werden, so nähert sich die Gerade P_1P_2 jedesmal unbegrenzt der Tangente von l im Punkte P als fester Grenzlage.

Eine ebene Linie l' heisst zu einer andern in der gleichen Ebene liegenden Linie l *parallel*, wenn l' als die Bahn angesehen werden kann, welche der eine Endpunkt einer Strecke von unveränderlicher Länge beschreibt, während ihr zweiter Endpunkt die Linie l durchläuft, und sie selbst beständig zu l normal bleibt (oder auch als die Bahn des Mittelpunktes eines Kreises, der auf l abrollt). Vgl. auch Nr. **33**.

Ist eine ebene Linie l' einer andern parallel, so haben l und l' in je zwei einander zugeordneten Punkten parallele Tangenten. Die Beziehung beider Linien ist daher eine gegenseitige.

Ganz ebenso lässt sich der Sinn des Wortes parallel für zwei *Flächen* feststellen, nur dass an die Stelle des rollenden Kreises eine rollende Kugel tritt.

Sind bei Beachtung gewisser Vorzeichenregeln s, s' die Längen entsprechender Bögen von zwei parallelen ebenen Linien, h die Länge des zwischen ihnen enthaltenen Stückes ihrer gemeinschaftlichen Normalen, φ die ganze Krümmung (Nr. **14**) von s und J der Inhalt der von den beiden Linien und den gemeinschaftlichen Normalen in ihren Endpunkten begrenzten Figur, so gelten die Formeln

$$s' = s \pm h\varphi \quad \text{und} \quad J = \tfrac{1}{2} h (s + s') \text{ [9]}.$$

Die Erweiterung dieser Sätze auf parallele Flächen hat *J. Steiner*[10]) gegeben.

Wenn eine ebene Linie l in einem Punkte P eine Tangente PT hat und in einer gewissen Nähe von P ganz auf der gleichen Seite

---

9) Vgl. *A. L. Crelle,* Ann. de math. 12 (1821—22), p. 13 u. 17, sowie *J. Steiner,* J. f. Math. 21 (1840), p. 127 = Ges. Werke 2, Berlin 1882, p. 152—153, und Berl. Ber. 1840, p. 114 = Ges. Werke 2, p. 173.

10) *J. Steiner,* Berl. Ber. 1840, p. 117 = Ges. Werke 2, Berlin 1882, p. 176. Vgl. auch Nr. **26**.

von PT verläuft, so sagt man, ein von P ausgehender nicht in die Gerade PT fallender Strahl PA weise nach der *konkaven* (*konvexen*) *Seite* von l, oder l sei im Punkte P nach der Richtung PA *konkav* (*konvex*), wenn l in der Nähe von P auf der gleichen (entgegengesetzten) Seite von PT verläuft wie PA.

Im Fall Nr. 2, II ist l im Punkte P_0 „nach oben", d. h. nach der mit der positiven Richtung der Ordinatenaxe übereinstimmenden Richtung konkav (konvex), wenn y_0'' positiv (negativ) ist.

Ein *gewöhnlicher* Punkt P einer ebenen Linie l heisst ein *Wendepunkt*, wenn sich in jeder Nähe von P sowohl solche Punkte von l finden, die auf der einen, als auch solche, die auf der andern Seite der Tangente von l in P liegen (vgl. Nr. 19).

Ist eine ebene Linie l, welche in einem Punkte P_0 eine Tangente hat, auf ein rechtwinkliges ebenes Koordinatensystem bezogen, so heisst die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Abscissenaxe und der erwähnten Tangente die *Steigung* von l in P_0. Im Fall Nr. 2, II ist diese Steigung gleich y_0'. In der Technik bezeichnet *Steigung* häufig den *Sinus* des erwähnten Winkels. Sind ferner T und N die Durchschnittspunkte der Abscissenaxe mit der Tangente und der Normale von l im Punkte P_0 und F der Fusspunkt des von P_0 auf die Abscissenaxe gefällten Lotes, so bezeichnet man als:

Subtangente von l in P_0 die Zahl $\overline{TF} = \frac{y_0}{y_0'}$

und als:

Subnormale von l in P_0 die Zahl $\overline{FN} = y_0 y_0'$.

Endlich wird unter der *Tangente* bez. der *Normale* von l im Punkte P_0 zuweilen auch die Länge der Strecke $P_0T = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$, bez. $P_0N = \left|y_0\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$ verstanden.

Wenn eine ebene Linie l, welche in einem Punkte P_0 eine Tangente hat, auf ein System von Polarkoordinaten bezogen ist, etwa dadurch, dass der Leitstrahl ϱ als Funktion der Abweichung φ gegeben ist, und O den Koordinatenanfang und T und N die Punkte bedeuten, in welchen die Tangente und die Normale von l in P_0 diejenige durch O gehende Gerade schneiden, welche auf dem Leitstrahl OP_0 senkrecht steht (positive Richtung derselben diejenige, welche aus der Richtung OP_0 durch eine positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgeht), so nennt man den Abstand:

$$P_0T = \varrho_0\sqrt{1 + \varrho_0^2\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)_0^2} \text{ die } \textit{Polartangente},$$

$$P_0N = \sqrt{\varrho_0^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)_0^2} \text{ die } \textit{Polarnormale},$$

und die Zahl:

$$\overline{TO} = \varrho_0^2 \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)_0 \text{ die } \textit{Polarsubtangente},$$

$$\overline{ON} = \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)_0 \text{ die } \textit{Polarsubnormale}$$

von l in P_0. Dabei bedeutet der Index 0 überall, dass für ϱ und φ die Koordinaten von P_0 einzusetzen sind.

Durch einen gewöhnlichen Punkt P einer Fläche $\mathfrak{F}$ lassen sich stets unendlich viele auf $\mathfrak{F}$ verlaufende Linien legen, von denen jede in P eine bestimmte und von denen der übrigen verschiedene Tangente hat. Alle diese Tangenten liegen immer in ein und derselben Ebene[11]). Diese Ebene heisst die *berührende* oder *Tangentenebene* von $\mathfrak{F}$ in P, der Punkt P selbst ihr *Berührungspunkt* und die auf ihr in P senkrecht stehende Gerade die *Normale* von $\mathfrak{F}$ im Punkte P.

Man sagt ferner, eine Gerade g *berühre* eine Fläche $\mathfrak{F}$, oder sei *Tangente* derselben in einem (gewöhnlichen) Punkte P, wenn g durch P hindurchgeht und in der Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P enthalten ist.

Es sei l eine Linie oder eine Fläche, P ein gewöhnlicher Punkt derselben und L ein vergrössertes ähnliches Abbild von l, welches zu l in der Weise ähnlich gelegen ist, dass P den Ähnlichkeitspunkt bildet (III A 6). Wenn man dann das Vergrösserungsverhältnis unbegrenzt wachsen lässt, so geht L in die Tangente bez. Tangentenebene von l im Punkte P über[12]).

5. Formeln für Tangenten, Normalen und Tangentenebenen. Bei Zugrundelegung der in Nr. 2 angegebenen Annahmen und Bezeichnungen gelten die folgenden Sätze und Formeln, in welchen ξ, η[, ζ] jedesmal die Koordinaten eines veränderlichen Punktes der betrachteten Tangente, Tangentenebene, Normale oder Normalebene bedeuten[13]):

---

11) Diesen Satz dürfte zuerst *Ch. Dupin,* Dével. de géom., p. 7, ausdrücklich ausgesprochen haben. In unvollständiger Fassung kommt er schon bei *A. C. Clairaut,* Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731, p. 49, Nr. 81, und bei *L. Euler,* Introductio in analysin infinitorum 2, Lausannae 1748, p. 395, Nr. 147, vor.

12) Vgl. *G. Peano,* Applicazioni, p. 305.

13) Die Auffindung dieser Sätze geht auf *Leibnitz* und *Newton* zurück, die, nachdem *Descartes* die Darstellung krummer Linien durch Gleichungen gelehrt hatte, die Ermittelung der Tangente an eine durch ihre *Gleichung* bestimmte Linie behandelten. Ausführliche Sammlungen von Formeln finden sich in *L. A. Sohncke*'s Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, I. Teil, Halle 1830, 5. Aufl. hrsg. v. *H. Amstein,* 1885, Kap. 8, § 22; ferner in *O. Schloemilch,* Übungsbuch z. Stud. der höh. Analysis, 1. Teil, Leipzig 1868,

I. Wenn der Wert t_0 der einzige Wert der Hülfsveränderlichen t ist, welcher dem Punkt P_0 entspricht, und die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ [, $\psi(t)$] für $t = t_0$ sämtlich den Charakter ganzer Funktionen haben, so hat l im Punkte P_0 eine Tangente. Ist von den Zahlen x_0', y_0' [, z_0'] wenigstens eine von Null verschieden, so wird die Tangente dargestellt durch die Gleichungen:

$$\xi = x_0 + x_0'\tau,\quad \eta = y_0 + y_0'\tau\ [, \zeta = z_0 + z_0'\tau] \qquad (\tau = -\infty \cdots +\infty)$$

und die Normale [Normalebene] durch die Gleichung:

$$x_0'(\xi - x_0) + y_0'(\eta - y_0)\,[+ z_0'(\zeta - z_0)] = 0.$$

Ist dagegen $x_0' = y_0' [= z_0'] = 0$, und ist n die kleinste ganze positive Zahl, welche die Eigenschaft hat, dass die Ableitungen $x_0^{(n)}$, $y_0^{(n)}$ [, $z_0^{(n)}$] nicht sämtlich verschwinden, so hat die Tangente die Gleichungen:

$$\xi = x_0 + x_0^{(n)}\tau,\quad \eta = y_0 + y_0^{(n)}\tau\ [, \zeta = z_0 + z_0^{(n)}\tau] \qquad (\tau = -\infty \cdots +\infty),$$

während die Normale [Normalebene] durch

$$x_0^{(n)}(\xi - x_0) + y_0^{(n)}(\eta - y_0)\,[+ z_0^{(n)}(\zeta - z_0)] = 0$$

dargestellt wird.

II. Für das Vorhandensein einer Tangente von l im Punkte P_0 ist hinreichend, dass wenigstens eine der Zahlen $F_x(x_0, y_0)$, $F_y(x_0, y_0)$ von Null verschieden sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Gleichung der Tangente:

$$F_x(x_0, y_0)(\xi - x_0) + F_y(x_0, y_0)(\eta - y_0) = 0$$

und die der Normale:

$$F_y(x_0, y_0)(\xi - x_0) - F_x(x_0, y_0)(\eta - y_0) = 0.$$

Hat die Gleichung von l die Form $y = f(x)$, so werden die Tangente und die Normale im Punkte P_0 beziehentlich durch die Gleichungen:

$$\eta - y_0 = y_0'(\xi - x_0)$$

und

$$\xi - x_0 + y_0'(\eta - y_0) = 0$$

dargestellt.

III. Damit P_0 ein gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{F}$ sei, ist hinreichend, dass wenigstens eine der Zahlen A_0, B_0, C_0 von Null verschieden sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird die Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P_0 durch die Gleichung:

$$A_0(\xi - x_0) + B_0(\eta - y_0) + C_0(\zeta - z_0) = 0,$$

4. Aufl. 1887, Kap. 4, sowie in *W. Láska,* Sammlung von Formeln der rein. u. angew. Mathematik, Braunschweig 1888—1894, p. 479 ff. und 537; endlich in den Recueils d'exercices ... von *F. Frenet,* Paris 1873, und von *F. Tisserand,* 2. éd., augm. par *P. Painlevé,* Paris 1896.

und die Normale von $\mathfrak{F}$ in P_0 durch die Gleichungen:

$$\xi = x_0 + A_0\tau, \quad \eta = y_0 + B_0\tau, \quad \zeta = z_0 + C_0\tau \qquad (\tau = -\infty \cdots + \infty)$$

dargestellt.

IV. Vorausgesetzt, dass die Ableitungen F_x, F_y, F_z an der Stelle x_0, y_0, z_0 nicht sämtlich verschwinden, wird die Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P_0 dargestellt durch die Gleichung:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(\xi - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(\eta - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(\zeta - z_0) = 0,$$

und die Normale durch die Gleichungen:

$$\xi = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\tau, \quad \eta = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\tau, \quad \zeta = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\tau \qquad (\tau = -\infty \cdots + \infty).$$

6. Aufgaben und Konstruktionen. Diejenigen Geraden, welche eine gegebene Linie berühren und durch einen gegebenen (eigentlichen oder unendlich fernen) Punkt hindurchgehen, können dadurch gefunden werden, dass man die Koordinaten der unbekannten Berührungspunkte ermittelt, was durch Auflösung eines Systems von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten geschehen kann. Ist beispielsweise eine ebene Linie gegeben durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$, und soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, welche diese Linie berührt und durch den gegebenen Punkt ξ_0, η_0 hindurchgeht, so kann man die Koordinaten x_0, y_0 des Berührungspunktes durch Auflösung des Systems:

$$F(x_0, y_0) = 0; \qquad F_x(x_0, y_0)(\xi_0 - x_0) + F_y(x_0, y_0)(\eta_0 - y_0) = 0$$

ermitteln[14]. Ähnliches gilt von andern Fällen der erwähnten Aufgabe, sowie von der Bestimmung der durch einen gegebenen Punkt hindurchgehenden Normalen einer gegebenen Linie oder Fläche und auch von der Bestimmung der *gemeinsamen* Tangenten oder Normalen zweier Linien und von verwandten Aufgaben.

Die Aufgabe, an eine gegebene ebene Linie l in einem gegebenen Punkte P_0 *die Tangente zu konstruieren*, ist gleichbedeutend mit der andern, die Richtung derjenigen Geschwindigkeit v zu finden, mit welcher ein die Linie beschreibender Punkt durch P_0 hindurchgeht. Eine Lösung der erwähnten Aufgabe lässt sich daher in manchen

---

14) Ein anderes, namentlich bei *algebraischen* Linien zur Anwendung kommendes Verfahren läuft darauf hinaus, das Verhältnis der Konstanten α, β so zu bestimmen, dass von den die Gleichung $F(\xi_0 + \alpha t, \eta_0 + \beta t) = 0$ befriedigenden Werten von t zwei oder mehr zusammenfallen. Vgl. III C 2.

Fällen durch Anwendung der folgenden von *M. Chasles*[15]) besonders hervorgehobenen Regel finden: Man suche eine Erzeugungsweise von l, bei welcher diese Linie als die Bahn eines Punktes P erscheint, der einer in der Ebene von l enthaltenen und in ihr sich bewegenden starren Figur $\mathfrak{F}$ angehört, und welche zugleich so beschaffen ist, dass man für diejenige Lage von $\mathfrak{F}$, bei welcher P mit P_0 zusammenfällt, den „augenblicklichen Umdrehungsmittelpunkt" (IV 3, Nr. 8) M_0 von $\mathfrak{F}$ finden kann. Ist dies gelungen, so erhält man die gesuchte Tangente einfach dadurch, dass man auf M_0P_0 in P_0 ein Lot errichtet.

Ein allgemeineres Lösungsverfahren besteht darin, zwei Richtungen r_1, r_2 von solcher Beschaffenheit aufzusuchen, dass man das Grössenverhältnis:

entweder der rechtwinkligen Projektionen von v auf r_1 und r_2, oder der beiden durch Zerlegung von v nach den Richtungen r_1 und r_2 entstehenden Seitengeschwindigkeiten

angeben kann[16]). In dem praktisch besonders häufigen Fall, dass r_1 zu r_2 senkrecht ist, besteht zwischen den erwähnten Projektionen und Seitengeschwindigkeiten kein Unterschied. Ferner ist in dem Fall, dass das Grössenverhältnis der Projektionen den Wert 1 hat, das der Seitengeschwindigkeiten ebenfalls gleich 1. Diese beiden Umstände haben dazu beigetragen, dass in der Litteratur die beiden eben unterschiedenen Fälle nicht immer gehörig auseinandergehalten worden sind.

Wenn die Bewegung einer starren ebenen Figur $\mathfrak{F}$ in ihrer eigenen Ebene dadurch bestimmt ist, dass (Fig. 1) zwei derselben angehörende Linien f, l beziehentlich an zwei festen Linien φ, λ entlang gleiten sollen, so kann man, unter der Voraussetzung, dass für irgend einen Augenblick die zu den beiden Berührungspunkten gehörenden Krümmungsmittelpunkte F, L, Φ, Λ von f, l, φ, λ gegeben sind, die gemeinsame Tangente PT der „Polbahn" und der „Polkurve"

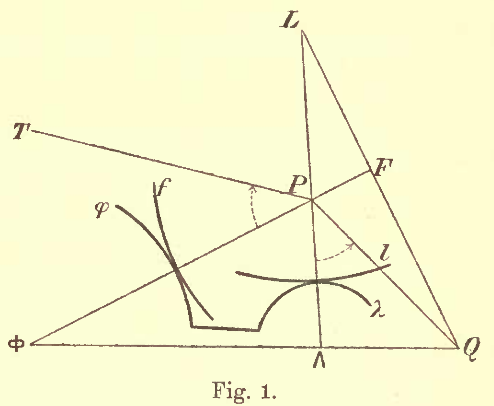


Fig. 1.

15) *M. Chasles*, Bull. Soc. Math. 16 (1878), p. 208 ff. (Die Arbeit war schon 1829 der Société philomathique vorgelegt worden.) Ebenda zahlreiche Anwendungen. Beispiele, darunter die „Fusspunktkurven", finden sich auch bei *G. Peano,* Applicazioni geometriche, p. 328, Nr. 17.

16) Historische Angaben über dieses nach *G. P. de Roberval* (1602—1675) be-

(IV 3, Nr. 8, 9) in demjenigen Punkt P, wo sich der Pol zur gleichen Zeit befindet, durch die folgende zuerst von *E. Bobillier*[17]) angegebene und später von *Aronhold*[18]) und *M. Grübler*[19]) aus andern Quellen abgeleitete Konstruktion finden: Man bringe ΦF mit ΛL zum Durchschnitt in P und $\Phi\Lambda$ mit FL zum Durchnitt in Q, ziehe PQ und darauf PT so, dass der Winkel ΦPT dem Winkel ΛPQ an Grösse gleich, aber dem Sinne nach entgegengesetzt wird.

Da eine oder zwei der Linien f, l, φ, λ auch zu Punkten zusammenschrumpfen dürfen, umfasst diese Konstruktion auch solche Fälle, wo ein Punkt von $\mathfrak{F}$ eine gegebene Linie beschreiben oder eine zu $\mathfrak{F}$ gehörende Linie beständig durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion der Tangente an die Bahn des Schnittpunktes zweier Linien, die sich in einer Ebene in gegebener Weise bewegen und gleichzeitig auch ihre Form stetig ändern dürfen, ist von *O. Wiener*[20]), praktische Konstruktionen für spezielle Fälle, namentlich auch für die Bahnen der Gelenkpunkte bei bewegten Gelenken, sind von *L. Burmester*[21]) angegeben worden.

Bei einer *algebraischen* Linie kann, wenn eine projektive Erzeugungsart derselben gegeben ist, häufig aus dieser eine Konstruktion der Tangente abgeleitet werden.

Eigentümliche unter keine der erwähnten Methoden fallende Tangentenkonstruktionen finden sich bei *Salmon-Fiedler*[22]) für die Kettenlinie und bei *J. Steiner*[23]) für die allgemeine Lemniscate.

---

nannte Verfahren finden sich in *M. Cantor,* Vorles. üb. Gesch. d. Math. 2, Leipzig 1892 (2. Aufl. 1900), p. 800—814, sowie in *L. Burmester,* Lehrbuch der Kinematik 1, Leipzig 1888, p. 67, und in *G. Koenigs,* Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 90. Einfache Beispiele bieten die Kegelschnitte, wenn man für r_1 und r_2 die Richtungen nach den Brennpunkten nimmt, und die verschiedenen Arten der Spiralen, wenn man r_1 mit der Richtung des Leitstrahls zusammenfallen lässt und r_2 senkrecht dazu wählt. Weitere Beispiele in den genannten Werken, besonders zahlreich bei *Burmester,* p. 67—82 u. 91—92. Vgl. noch IV 3, Nr. 7.

17) *E. Bobillier,* Cours de géométrie (12me éd. 1870, p. 232). Eine andere Konstruktion giebt *M. Chasles,* J. de math. (1) 10 (1845), p. 206—207.

18) *S. Aronhold,* Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, Jahrg. 51, Berlin 1872, p. 142—144.

19) *M. Grübler,* Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), p. 310—313.

20) *O. Wiener,* Lehrb. der darstellenden Geom. 1, Leipzig 1884, p. 270, Nr. 204.

21) Lehrb. der Kinematik 1, Leipzig 1888, p. 52—54, 83—85 u. 87—90.

22) *Salmon-Fiedler,* Höh. eb. Kurven, 2. Aufl. 1882, p. 377.

23) *J. Steiner,* J. f. Math. 14 (1835), p. 80 = Ges. Werke 2, Berlin 1882, p. 19. Verallgemeinerungen dieser Konstruktion giebt *A. Hurwitz,* Math. Ann. 22 (1883), p. 230.

7. Fusspunktlinien und -flächen. Die Gesamtheit der Fusspunkte aller Lote, welche sich von einem festen Punkt P auf die Tangenten einer Linie l oder auf die Berührungsebenen einer Fläche $\mathfrak{F}$ fällen lassen, heisst die *Fusspunktlinie* von l, bez. die *Fusspunktfläche* von $\mathfrak{F}$ für den Punkt P als Pol.

Wenn man die Fusspunktlinie f einer ebenen Linie l für einen in deren Ebene liegenden Punkt P als Pol aus diesem letzteren als Ähnlichkeitspunkt im Verhältnis $2:1$ vergrössert, so erhält man eine Linie f', die man auch als Rolllinie in einfacher Weise erzeugen kann. Denkt man sich nämlich aus der Linie l durch Umklappen um eine ihrer Tangenten eine kongruente Linie l' abgeleitet und dann diese letztere auf l abgerollt, so stimmt die Bahn, welche der zu P homologe Punkt hierbei beschreibt, mit f' überein[24]).

Wenn in einer Ebene eine Linie l, ein Pol P und ein beliebiger um P als Mittelpunkt beschriebener Kreis k gegeben sind, so sind, wie *A. Quetelet*[25]) bemerkt hat, die Fusspunktlinie von l für P als Pol und die zu l in Bezug auf k polar-reziproke Linie zu einander invers in Bezug auf k.

Die Rektifikation einiger besonderer Klassen von Fusspunktlinien durch elliptische Integrale hat *W. Roberts*[26]) behandelt, der hierbei zur Unterscheidung von *Fusspunktlinien verschiedener*, und zwar sowohl positiver wie negativer *Ordnungen* geführt worden ist. Er nennt nämlich, vorausgesetzt dass in einer Ebene eine Linie l und ein fester stets als Pol zu nehmender Punkt gegeben sind, die Fusspunktlinie der Fusspunktlinie von l die *zweite positive Fusspunktlinie von* l u. s. f. und diejenige Linie, von welcher l die Fusspunktlinie ist, die *erste negative Fusspunktlinie von* l u. s. f.[27]).

24) Vgl. *L. Burmester*, Lehrb. der Kinematik 1, Leipzig 1888, p. 44, und *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 166 u. 259, woselbst eine Anwendung dieses Satzes zur Erzeugung der Fusspunktlinien einer Ellipse oder Hyperbel mittels eines ebenen Gelenkvierecks gegeben ist.

25) *A. Quetelet*, Bruxelles Nouveaux Mémoires 4 (1827), p. 104—105.

26) *W. Roberts*, J. de math. (1) 10 (1845), p. 177. Ergänzungen sind in (1) 12 (1847), p. 41 u. p. 447—448, sowie in (1) 13 (1848), p. 179, zugefügt.

27) Die gleichen Begriffe, jedoch ohne Einführung besonderer Namen für dieselben, finden sich bereits bei *C. Maclaurin*, Lond. Phil. Trans. 30 (1718), p. 803 ff. (abgekürzte Ausgabe 6, London 1809, p. 357 ff.). Ebendaselbst ist für eine spezielle Folge von Fusspunktlinien gezeigt, wie die Rektifikation einer beliebigen dieser Linien auf die der zweitfolgenden oder der zweitvorhergehenden Linie der gleichen Folge zurückgeführt werden kann. *W. Roberts* hat, wie er Nouv. Ann. de math. (2) 3, Paris 1864, p. 80—81, mitteilt, erst nachträglich von dieser Abhandlung Kenntnis erhalten. — Über Fusspunktlinien und -Flächen mit gebrochener Ordnungszahl vgl. *W. Roberts*, Ann. di mat. (1) 4 (1861), p. 133.

Im Anschluss an diese Erweiterung des Begriffs hat *T. A. Hirst*[28]) den soeben angegebenen Satz von *Quetelet* auf die vollständigen Reihen der positiven und negativen Fusspunktlinien ausgedehnt, welche nach Annahme eines festen Poles P aus einer mit P in einer Ebene liegenden Linie und ihrer reziproken Polaren in Bezug auf einen um P als Mittelpunkt beschriebenen Kreis abgeleitet werden können, und die entsprechenden Betrachtungen für den Raum durchgeführt. Hierauf hat er sodann eine Untersuchung der Beziehungen gegründet, welche in einer Reihe aufeinanderfolgender Fusspunktflächen oder -Linien zwischen entsprechenden Flächen- oder Linienelementen und den Krümmungen dieser Elemente bestehen. Er geht dabei aus von der Bemerkung, dass durch die Ausdehnung des Satzes von *Quetelet* auf den Raum der Übergang von einer gegebenen Fläche zu ihrer Fusspunktfläche in zwei Schritte zerlegt werde, nämlich den Übergang zur polar-reziproken und den Übergang von dieser zu der inversen Fläche, und dass ähnliches auch für ebene Linien gelte, entwickelt demgemäss die erwähnten Beziehungen:

a) für zwei beliebige polar-reziproke,

b) für zwei beliebige inverse Gebilde,

und gelangt schliesslich durch Verbindung der hierbei gewonnenen Ergebnisse zu den gesuchten Beziehungen. Weitere Untersuchungen von *J. Steiner* und *T. A. Hirst* über Fusspunktlinien und -flächen sind in Nr. 25, Fussn. 156 erwähnt.

8. Asymptoten. Wenn ein ins Unendliche sich erstreckender Zweig einer ebenen Linie in der Weise einer Geraden unbegrenzt nahe kommt, dass man nach Annahme eines beliebig schmalen, von zwei Parallelen begrenzten Streifens, welcher die fragliche Gerade als Mittellinie hat, stets eine Entfernung R angeben kann, so dass jeder Punkt des Zweiges, dessen Abstand vom Koordinatenanfang $> R$ ist, im Innern jenes Streifens liegt, so nennt man die Gerade eine *Asymptote*[29]) des betrachteten Linienzweiges.

Allgemeiner sagt man von zwei verschiedenen ins Unendliche sich erstreckenden ebenen Linienzweigen, der eine nähere sich dem andern *asymptotisch*, wenn man jedem beliebig kleinen Radius r einen Abstand R in der Weise zuordnen kann, dass alle Punkte des einen Zweiges, deren Entfernung vom Koordinatenanfang $> R$ ist, im Innern

28) *T. A. Hirst,* Ann. di mat. (1) 2 (1859), p. 95 und 148, und Quart. J. of math. 3 (1860), p. 210.

29) Begriff und Name finden sich schon bei *Apollonius,* Kegelschnitte, 2. Buch.

derjenigen Fläche liegen, welche von einem Kreise vom Radius r überstrichen wird, wenn dessen Mittelpunkt den andern Linienzweig durchläuft[30]).

Ist eine ebene Linie durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben, so kann man zur Bestimmung ihrer Asymptoten nach *A. Cauchy*[31]) in der Weise vorgehen, dass man $y = sx$ setzt und zunächst untersucht, ob eine der Wurzeln s der Gleichung $F(x, sx) = 0$ sich bei unbegrenzt wachsendem x einem endlichen Grenzwert nähert. Ist dies der Fall und ist a der Grenzwert einer Wurzel s, so hat man weiter $y = ax + t$ zu setzen und zu untersuchen, ob auch eine Wurzel t der dann entstehenden Gleichung $F(x, ax + t) = 0$ für $x = \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt. Trifft auch dieses zu und ist b ein solcher Grenzwert, so stellt die Gleichung $y = ax + b$ eine Asymptote dar. Nur die etwa zur Ordinatenaxe parallelen Asymptoten ergeben sich nicht auf diesem Wege, können aber nachträglich leicht gefunden werden, wenn man im Vorangehenden x mit y vertauscht.

Ferner kann man zur Entscheidung der Frage, ob eine gegebene ebene Linie Asymptoten hat, sowie zur Ermittelung der letzteren häufig durch Anwendung einer der folgenden Methoden gelangen:

1) Man bildet die Ebene $\mathfrak{E}$ der gegebenen Linie l durch eine gebrochene lineare Substitution kollinear auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}'$ ab, wobei der unendlich fernen Geraden von $\mathfrak{E}$ eine eigentliche Gerade g von $\mathfrak{E}'$ entspricht (III A 6) und betrachtet das Bild l' der Linie l. Jedem Zweige von l', welcher die Gerade g schneidet und im Schnittpunkt eine von g verschiedene Tangente hat, entspricht ein Zweig von l, welcher sich ins Unendliche erstreckt und die der erwähnten Tangente entsprechende Gerade von $\mathfrak{E}$ als Asymptote hat[32]).

2) Man bildet die Ebene der gegebenen Linie l auf sich selbst durch reziproke Radien ab (III A 7) und betrachtet das Bild l' von l: Jedem Zweige von l', welcher durch den Mittelpunkt der Abbildung hindurchgeht und daselbst einen Krümmungskreis mit einem von Null verschiedenen (endlichen oder unendlichen) Radius hat, entspricht ein

30) Diese Erweiterung des Begriffs dürfte sich zuerst bei *J. Stirling,* Lineae tertii ordinis Neutonianae etc., Oxoniae 1717, p. 1, finden. Vergl. *M. Cantor,* Vorles. üb. Gesch. d. Math. 3, Leipzig 1898, p. 413. Jedoch kommt der Ausdruck „asymptotische Parabeln" schon bei *C. F. M. Dechales,* Mundus mathematicus von 1674 und 1690 vor. Vgl. *M. Cantor,* a. a. O. p. 17.

31) *A. Cauchy,* Leçons sur les appl. 1, p. 57—58. Über die geschichtliche Entstehung dieses Verfahrens vgl. den Bericht von *A. Brill* u. *M. Noether,* Deutsche Math.-Ver. 3 (1892/93), p. 116—149.

32) Ausser den so sich ergebenden Asymptoten kann l nur noch solche Asymptoten haben, deren Bilder in $\mathfrak{E}'$ zu g parallel laufen.

ins Unendliche verlaufender Zweig von l, welcher die dem erwähnten Krümmungskreise entsprechende Gerade als Asymptote hat und umgekehrt[32a]).

Die Lehre von den Asymptoten der *algebraischen* Linien ist von *L. Euler*[33]) und besonders eingehend von *J. Plücker*[34]) behandelt worden[35]).

Die obige Erklärung des Begriffs „Asymptote“ und die beschriebenen Methoden lassen sich mit entsprechenden Änderungen auf gewundene Linien ausdehnen.

Wenn die Tangente eines ins Unendliche verlaufenden Linienzweiges sich einer festen Grenzlage nähert, falls der Berührungspunkt ins Unendliche rückt, so bildet diese Grenzlage eine Asymptote des Linienzweiges. Auch hierauf kann ein Verfahren zur Ermittelung der Asymptoten gegründet werden[36]).

9. Berührung n^{ter} Ordnung. Es seien l, l' zwei ebene oder gewundene Linien, welche einen Punkt P_0, der für jede von ihnen ein gewöhnlicher Punkt ist, und ausserdem die Tangente in P_0 miteinander gemein haben. Ferner seien P, P' zwei bewegliche beziehentlich auf l, l' gelegene Punkte, welche sich beide auf der gleichen Seite der Normalebene in P_0 befinden und dem Punkt P_0 in der Weise unbegrenzt nahe rücken, dass die Abstände P_0P und P_0P' stets gleich gross bleiben. Wenn dann n die Ordnungszahl bezeichnet, mit welcher der Winkel PP_0P' unendlich klein wird, vorausgesetzt, dass $P_0P = P_0P'$ als unendlich kleine Grösse erster Ordnung gilt, so sagt man von den Linien l, l', dass sie in P_0 eine *Berührung n^{ter} Ordnung* oder auch eine $(n+1)$-*punktige Berührung* haben[37]).

Man sagt ferner, eine Linie l habe mit einer Fläche $\mathfrak{F}$ in einem gemeinsamen Punkte P_0, der für beide ein gewöhnlicher Punkt ist, eine *Berührung n^{ter} Ordnung,* wenn es auf $\mathfrak{F}$ durch P_0 gehende Linien

---

32a) Mittels dieser Methode untersucht *Fr. Meyer* die Asymptoten algebraischer Kurven: Anwendungen der Topologie auf die Gestalten algebraischer Kurven, Dissert. München 1878.

33) Introductio in analysin infinitorum 2, Lausannae 1748, cap. VII—XI.

34) *J. Plücker,* Theorie der algebraischen Kurven, Bonn 1839, p. 14—154. Vgl. auch Analyt. geom. Entwicklungen 2, Essen 1831, p. 159, Fussn.; System d. analyt. Geom., Berlin 1835, p. 132—166, und J. de math. (1) 1 (1836), p. 229 = Ges. wiss. Abhandlungen 1, Leipzig 1895, p. 302.

35) Vgl. auch *Salmon-Fiedler,* Höh. Kurven, 2. Aufl., p. 51—54, 60—61, 143, 219—232.

36) Vgl. *A. Cauchy,* Leçons sur les appl. 1, p. 62, und *R. Hoppe,* Anal. Geom. 1, p. 62—64.

37) *A. Cauchy,* Leçons sur les appl. 1, p. 128 u. 367.

giebt, die dort mit l eine Berührung n^{ter} Ordnung haben, aber keine, die mit l in P_0 eine Berührung noch höherer Ordnung hätte. Ist $\mathfrak{F}$ gegeben durch $F(x, y, z) = 0$ und l durch $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$, ist t_0 der zu P_0 gehörende Wert von t und wenigstens eine der Ableitungen $\varphi'(t_0), \chi'(t_0), \psi'(t_0)$ von Null verschieden, so ist für das Stattfinden einer Berührung n^{ter} Ordnung notwendig und hinreichend, dass in der Entwicklung von $F[\varphi(t), \chi(t), \psi(t)]$ nach steigenden Potenzen von $(t - t_0)$ erst die Potenz $(t - t_0)^{n+1}$ einen von Null verschiedenen Koeffizienten erhält.

Sind endlich zwei Flächen $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ gegeben, welche in einem gemeinsamen Punkte P, der für beide ein gewöhnlicher Punkt ist, die gleiche Normale PN haben, so sagt man, die *Ordnung ihrer Berührung in P sei gleich n*, wenn unter den Linienpaaren, in welchen $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ von den durch PN gehenden Ebenen geschnitten werden, solche vorhanden sind, die in P eine Berührung n^{ter} Ordnung haben, aber keines, welches in P eine Berührung niedrigerer Ordnung hat[38]).

Als *Oskulation* bezeichnet man jede Berührung von höherer als der ersten Ordnung, einerlei, ob sie zwischen zwei Linien, einer Linie und einer Fläche oder zwei Flächen stattfindet[39]).

Wenn zwei Flächen $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ sich längs einer Linie l berühren und durch eine Tangente von l eine Ebene gelegt wird, welche $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ schneidet, so haben die Schnittlinien im Berührungspunkt der Tangente nach *Ch. Dupin*[40]) eine Berührung zweiter oder höherer Ordnung.

Bedingungen für eine Berührung n^{ter} Ordnung, sei es für Linien, sei es für Flächen, haben *Ch. Dupin*[41]) und ausführlicher *A. Cauchy*[42]) angegeben, der dabei auch die Frage erörtert hat, wann eine ebene

38) Ebenda p. 384.

39) Von vielen französischen Mathematikern (vgl. *Ch. Hermite,* Cours d'anal. 1, Paris 1873, p. 111; *C. Jordan,* Cours d'anal. 1, Paris, 1. éd. 1882, p. 225, 2. éd. 1893, p. 423; *E. Picard,* Traité d'anal. 1, Paris 1891, p. 323) und ebenso von *R. Hoppe* (Anal. Geom. 1, p. 54) wird das Wort Oskulation in einem etwas anderen Sinne gebraucht, welcher zuerst von *Lagrange,* Théorie des fonct. anal. seconde partie, Nr. 10, festgestellt sein dürfte und in einer von *S. F. Lacroix* gegebenen Erklärung (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2. éd., 1, Paris 1810, p. 444) wiederkehrt. Sie nennen nämlich, falls eine Linie l und eine Schar dieselbe in ein und demselben Punkte P berührender Linien gegeben sind, diejenige Linie dieser Schar oskulierend, welche in P mit l eine Berührung möglichst hoher Ordnung hat.

40) *Ch. Dupin,* Dével. de géom., p. 36 u. 83—86. Ebendaselbst sind Verallgemeinerungen angegeben für den Fall, dass $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ sich längs l von höherer als der 1. Ordnung berühren.

41) Ebenda p. 11 u. 67—68.

42) *A. Cauchy,* Leçons sur les appl. 1ᵉ, 9ᵉ, 10ᵉ, 18ᵉ, 21ᵉ, 22ᵉ leçon.

Linie, welche eine andere berührt, von der einen Seite dieser letzteren auf die andere übertritt. Untersuchungen über die Berührung zweier Flächen, namentlich zweier Flächen zweiter oder einer Fläche zweiter und einer dritter Ordnung hat *J. Plücker*[43]) angestellt. Neuerdings hat *E. Picard*[44]) die Theorie der Berührung eingehend behandelt.

10. Ermittelung der Bogenlänge einer Linie (Rektifikation). Für das Innere und die Grenzen eines endlichen Intervalls, dessen untere und obere Grenze bez. a und b heissen mögen, seien drei Funktionen $\varphi(t), \chi(t), \psi(t)$ erklärt, von denen zunächst nur die Endlichkeit und die Eindeutigkeit vorausgesetzt werden sollen, und durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(t); \quad y = \chi(t); \quad z = \psi(t)$$

sei eine „Linie" l gegeben. (Für ebene Linien ist im nachfolgenden durchweg $\psi(t) = 0$ zu setzen.) Wenn dann $A, P_1, P_2, \ldots, P_n, B$ Punkte von l bedeuten, von denen der erste zu dem Wert a, der letzte zu dem Wert b und die mittleren bez. zu Werten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ von t gehören, die der Ungleichung:

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$$

genügen, so sagt man von der gebrochenen Linie $AP_1P_2 \ldots P_nB$, sie sei der Linie l *eingeschrieben*, oder sie sei ein *Sehnenpolygon* von l.[45])

Wenn ferner die Längen aller Sehnenpolygone von l eine endliche obere Grenze (I A 3, Nr. 16; II A 1, Nr. 6) haben, so nennt man diese obere Grenze die *Länge der Linie l*. Andernfalls kommt der Linie l eine Länge nicht zu[46]).

Abweichend hiervon wird indessen oft einer in der angegebenen Weise erklärten Linie nur dann eine Länge zugeschrieben, wenn die Länge der ihr eingeschriebenen gebrochenen Linie bei unbegrenzter Verfeinerung der entsprechenden Teilung des Intervalls $a \ldots b$ stets dem *gleichen* Grenzwert zustrebt, einerlei wie man bei dieser Verfeinerung verfährt, und dann eben dieser Grenzwert als die Länge von l bezeichnet.

Für das Vorhandensein einer Länge ist — gleichgültig, welche Erklärung man zu Grunde legt — stets erforderlich, dass in dem Intervall $a \ldots b$ überall die Grenzwerte $\varphi(t-0)$ und $\varphi(t+0)$ — an den Grenzen a, b natürlich nur $\varphi(a+0)$ und $\varphi(b-0)$ — vor-

43) *J. Plücker,* J. f. Math. 4 (1829), p. 349 = Ges. wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 103. Siehe auch die Bemerkungen von *A. Schoenflies* an letzterem Orte, p. 598.

44) *E. Picard,* Traité d'anal. 1, Paris 1891, p. 318—348.

45) *E. Study,* Math. Ann. 47 (1896), p. 314.

46) Vgl. z. B. *G. Peano,* Applicazioni geometriche, p. 161.

handen seien, und dass ähnliches auch von den Funktionen $\chi(t)$ und $\psi(t)$ gelte. Wenn dies zutrifft und wenn ausserdem an Unstetigkeitsstellen der Punkt $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ stets der geraden die Punkte $\varphi(t-0)$, $\chi(t-0)$, $\psi(t-0)$ und $\varphi(t+0)$, $\chi(t+0)$, $\psi(t+0)$ verbindenden Strecke angehört, so führen beide Erklärungsarten bei Beantwortung der Frage, ob der Linie l überhaupt eine Länge zukommt, immer zu dem gleichen Ergebnis, und im Fall der Bejahung liefern sie auch beide den gleichen Wert der Länge. Ist dagegen die letzterwähnte Bedingung nicht erfüllt, so kann auf Grund der ersten Erklärung noch eine Länge vorhanden sein, während dies bei Anwendung der zweiten nicht mehr der Fall ist.

Eine dritte Erklärung hat *H. Minkowski*[47]), von der Bemerkung ausgehend, dass der Begriff des Volumens weniger Schwierigkeiten darbiete als der der Länge (und der der Oberfläche), mit folgenden Worten vorgeschlagen: „Es sei C eine Kurve. Um jeden Punkt von C als Mittelpunkt denke man sich eine Kugel mit dem Radius r abgegrenzt, unter r eine feste positive Grösse verstanden. Die Menge aller derjenigen Punkte des Raumes, welche in das Innere oder die Begrenzung von wenigstens einer dieser Kugeln zu liegen kommen, definiert uns den *Bereich der Entfernung* $\leq r$ *von der Kurve* C. Es sei $V(r)$ das Volumen dieses Bereiches (falls ihm ein bestimmtes Volumen zukommt), so kann der Grenzwert $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ für ein nach Null abnehmendes r (falls dieser Grenzwert existiert), als die *Länge der Kurve* C eingeführt werden."

Auf eine vierte Erklärung ist *E. Schmidt*[48]) durch die Bemerkung geführt worden, dass der Begriff der Länge krummer Linien der unmittelbaren Naturanschauung entspringe, indem ihn die Verbiegung gerader und die Streckung krummer linienförmiger Gegenstände erzeuge. Er erklärt zunächst ein „einfaches Kurvenstück" als eine solche ganz im Endlichen liegende perfekte Punktmenge [I A 5, Nr. **11**], welche sich auf die Gesamtheit der Punkte eines endlichen Geradenstücks einschliesslich seiner beiden Begrenzungspunkte abbilden lässt (Abbildung = eindeutige, stetige und eindeutig umkehrbare Zuordnung) und führt dann den Begriff der *asphinktischen Abbildung* durch folgende Erklärung ein: Ist die ganz im Endlichen liegende perfekte, beliebig im Raum verteilte Punktmenge α so auf die ganz im Endlichen liegende perfekte, beliebig im Raum verteilte Punktmenge β abgebildet, dass β kein Punktepaar enthält, dessen Entfernung kleiner ist als die Ent-

47) *H. Minkowski,* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung 9 (1901), p. 115.
48) *E. Schmidt,* Math. Ann. 55 (1901), p. 163.

fernung des entsprechenden Punktepaares in α, so heisst α auf β *asphinktisch* abgebildet. Endlich nennt er ein einfaches Kurvenstück „rektifizierbar", wenn es endliche Geradenstücke giebt, auf welche sich das Kurvenstück asphinktisch abbilden lässt, und erklärt die Länge des Kurvenstücks als die Länge des kleinsten jener Geradenstücke.

Geschichtliche Nachweise über die Entwicklung des Begriffs Länge hat *O. Stolz* gegeben[49]).

Nachdem *L. Scheeffer*[50]) eingehende Untersuchungen darüber angestellt hatte, wann bei einem durch eine Gleichung von der Form $y = f(x)$ dargestellten Gebilde noch von einer Länge die Rede sein könne, haben *C. Jordan*[51]) und *E. Study*[52]) sowohl für diesen als für den allgemeinen Fall der Parameterdarstellung einer Linie neue und einfachere Formen der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein einer Länge festgestellt.

Wenn eine Linie l in der zu Anfang dieser Nr. angegebenen Weise erklärt ist, und die Funktionen $\varphi(t), \chi(t), \psi(t)$ in dem Intervall $a \dots b$ einschliesslich beider Grenzen differenzierbar und ihre Ableitungen daselbst stetig sind, so kommt der Linie l immer eine Länge L zu und diese wird gegeben durch die Formel:

$$L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Hat man für jeden Punkt einer von singulären Punkten freien Linie l die positive Tangentenrichtung in irgend einer Weise (jedoch so, dass sie sich mit dem Berührungspunkt stetig ändert) festgelegt — z. B. im Fall Nr. 2, I als diejenige, deren Richtungscosinus bez. die gleichen Vorzeichen haben wie $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ — so pflegt man auch der Länge eines Bogens von l, der von irgend zwei *in bestimmter Reihenfolge* gegebenen Punkten A, B begrenzt wird, ein *bestimmtes Vorzeichen* beizulegen, indem man festsetzt, dass als *Länge des Bogens* AB diejenige positive oder negative Zahl bezeichnet werden soll, deren absoluter Wert die Länge im bisherigen Sinne angiebt,

---

49) *O. Stolz,* Math. Ann. 18 (1881), p. 267 ff. Von geschichtlichem Interesse ist auch *E. H. Dirksen,* Berl. Abh. 1833, p. 123 ff., wo wohl zuerst, wenn auch unter spezielleren Voraussetzungen, als im Texte, die Länge des Bogens einer Raumkurve als Grenze eines einbeschriebenen Sehnenpolygons nachgewiesen ist. Entsprechende Nachweise finden sich daselbst auch für die Begriffe der Quadratur, Komplanation und Kubatur (Nrn. 25, 26, 28).

50) *L. Scheeffer,* Acta math. 5 (1884), p. 49 ff. (Auf p. 74 ist die Nr. 1 zu streichen.)

51) *C. Jordan,* Cours d'anal., 2. éd., 1, Paris 1893, p. 100 ff.

52) *E Study,* Math. Ann. 47 (1896), p. 312 ff.

und deren Vorzeichen + oder — ist, je nachdem ein den Bogen von A nach B durchlaufender Punkt in der positiven oder negativen Tangentenrichtung fortschreitet.

Als ein Hülfsmittel für die Rektifikation mancher ebenen Linien giebt *J. Steiner*[53]) den Satz an, dass jedes Stück einer Fusspunktlinie einer ebenen Linie l ebenso lang ist, wie derjenige Bogen, welcher beim Abrollen des entsprechenden Stückes von l auf einer festen Geraden von dem mit l fest verbundenen Pol der Fusspunktlinie beschrieben wird. Über den Zusammenhang zwischen den Bogenlängen entsprechender Stücke von parallelen Linien vgl. Nr. 4.

Die Anwendungen, welche die Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen bei der Längenberechnung krummer Linien gefunden hat, sind eingehend besprochen in *A. Enneper*, Elliptische Funktionen[54]). In das gleiche Gebiet gehört eine dort nicht erwähnte Arbeit von *R. v. Lilienthal*[55]).

Zur angenäherten Berechnung von Bogenlängen ebener sowohl wie gewundener Linien hat *J. Somoff*[56]) die folgende Regel aufgestellt:

„Die Länge eines genügend kleinen Bogens ist gleich vier Dritteln seiner Sehne, vermindert um den sechsten Teil der Summe, welche aus den beiden Projektionen dieser Sehne auf die an die Endpunkte des Bogens geführten Tangenten gebildet ist."

11. Algebraisch rektifizierbare Linien. Eine Linie heisst *algebraisch rektifizierbar*, wenn die Länge des zwischen einem festen Anfangs- und einem beweglichen Endpunkt enthaltenen Bogens derselben eine algebraische Funktion der Koordinaten des Endpunktes ist. Nachdem *G. Humbert*[57]) für die ebenen algebraischen Linien, welche algebraisch rektifizierbar sind, gezeigt hatte, dass zwischen der Länge s des Bogens einer solchen Linie und den Koordinaten x, y seines Endpunktes stets eine Gleichung von der Form:

$$(s - s_0)^2 = r(x, y) \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

---

53) *J. Steiner,* J. f. Math. 21 (1840), p. 35—36 = Ges. Werke 2, Berlin 1882, p. 101. Vgl. auch J. f. Math. 14 (1835), p. 89 = Ges. Werke 2, p. 28. Ein Beweis steht in *J. Bertrand,* Traité de calc. diff. et de calc. int. 2, calcul intégral, Paris 1870, p. 372.

54) 2. Aufl. herausg. von *F. Müller,* Halle 1890, p. 514—552 u. 560—564.

55) *R. v. Lilienthal,* Zur Theorie der Kurven, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist. Diss. Berlin 1882.

56) *J. Somoff,* St. Pétersbourg Bull. 15, p. 257 = Math. Ann. 4 (1871), p. 505.

57) *G. Humbert,* J. de math. (4) 4 (1888), p. 133—137.

besteht, wo s_0 eine Konstante und r eine rationale Funktion bedeutet, hat *L. Koenigsberger*[58]) unter Klarlegung der eigentlichen Quelle dieses Satzes Ausdehnungen desselben namentlich auch auf algebraische Raumkurven sowie auf transcendente ebene Linien gegeben.

Eine ebene algebraische Linie ist dann und nur dann algebraisch rektifizierbar, wenn sie als Evolute zu einer algebraischen Linie gehört. Im Raume dagegen sind zwar die Filar-Evolventen (Nr. **33**) jeder algebraisch rektifizierbaren algebraischen Raumkurve wieder algebraische Linien, aber umgekehrt ist, wie *P. Stäckel*[59]) gezeigt hat, eine Filar-Evolute einer algebraischen Raumkurve C nur dann wieder algebraisch (und dann auch stets algebraisch rektifizierbar), wenn der Sinus des Torsionswinkels (Nr. **30**) von l algebraisch von den Koordinaten des Punktes abhängt, auf den er sich bezieht.

Die allgemeinste Form der Gleichungen aller algebraisch rektifizierbaren algebraischen Linien ergiebt sich aus der von *G. Darboux*[60]) gefundenen Lösung der Aufgabe (Nr. **13**), auf die allgemeinste Weise, jedoch ohne Anwendung von Integralzeichen, vier Funktionen x, y, z, s einer Veränderlichen so zu bestimmen, dass sie die Gleichung $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ erfüllen, wenn man die willkürlichen Funktionen, welche in den Ausdrücken für x, y, z, s auftreten, der Bedingung unterwirft, algebraisch zu sein[61]). Auf anderem Wege ist *P. Stäckel*[62]) ebenfalls zur Bestimmung jener allgemeinsten Form gelangt.

12. Minimalkurven. Wenn man sich nicht auf die alleinige Betrachtung reeller Gebilde beschränkt, so hat es einen Sinn, nach denjenigen Linien in der Ebene, bez. im Raume zu fragen, welche der Differentialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

genügen, auf denen also jedes beliebige Bogenstück die Länge Null hat. Linien dieser Art heissen *Minimalkurven*[63]) und, wenn sie durch *lineare* Gleichungen darstellbar sind, *Minimalgerade.*

---

58) *L. Koenigsberger,* Math. Ann. 32 (1888), p. 589.

59) *P. Stäckel,* Math. Ann. 43 (1893), p. 171—177, und 45 (1894), p. 341—343.

60) *G. Darboux,* J. de math. (4) 3 (1887), p. 314—319.

61) *G. Darboux,* J. de math. (4) 3 (1887), p. 314 u. 316.

62) *P. Stäckel,* Math. Ann. 45 (1894), p. 341—356.

63) Nach *S. Lie,* Math. Ann. 14 (1879), p. 337, der mit Hülfe des Begriffs der Minimalkurven die Lehre von den Minimalflächen in mancher Hinsicht vereinfacht hat. Historische Angaben über das frühere Vorkommen des Begriffes macht *S. Lie,* Geom. der Berührungstransformationen, dargestellt von *S. Lie* und *G. Scheffers,* 1, Leipzig 1896, p. 433. Die Haupteigenschaften der Minimal-

Die ebenen Minimalkurven sind sämtlich Gerade und fallen mit den durch die „unendlichfernen Kreispunkte“ (III A 7) gehenden Geraden zusammen. Denn aus $dx^2 + dy^2 = 0$ folgt $dx \pm i\,dy = 0$ oder $x \pm iy =$ Const. Im Raume giebt es dagegen ausser Minimal*geraden* (welche mit den den „Kugelkreis“ schneidenden Geraden übereinstimmen) auch nicht geradlinige Minimalkurven. Die Tangenten dieser letzteren sind sämtlich Minimalgerade und ihre Schmiegungsebenen berühren den Kugelkreis. Jede nicht geradlinige Minimalkurve kann daher als Rückkehrkante einer dem Kugelkreis umschriebenen abwickelbaren Fläche angesehen werden, d. h. einer Fläche, die von einer Schar imaginärer Ebenen:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umhüllt wird, in deren Gleichung A, B, C, D beliebige, nur der Bedingung:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

unterworfene Funktionen einer Hülfsveränderlichen bedeuten.

13. Lösung der Gleichung $dx^2 + dy^2 = ds^2$ und ähnlicher Gleichungen ohne Anwendung von Integralzeichen. Die Differentialgleichung $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ der Minimalkurven geht durch die Substitution $z = is$ in

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

über. Daher ist die Aufgabe, die Koordinaten x, y, z eines veränderlichen Punktes einer Minimalkurve auf die allgemeinste Weise, jedoch ohne Anwendung von Integralzeichen, als Funktionen eines Parameters t darzustellen, gleichbedeutend mit der andern, auf die allgemeinste Weise und ebenfalls ohne Anwendung von Integralzeichen drei Funktionen x, y, s einer Veränderlichen t so zu bestimmen, dass sie der Gleichung $dx^2 + dy^2 = ds^2$ genügen. Diese letztere Aufgabe kann aber — wenn man von der allereinfachsten einer geraden Linie entsprechenden Lösung:

$$x = at + b,$$
$$y = \sqrt{1 - a^2}\, t + c,$$
$$s = t,$$

wo a, b, c Konstante bedeuten[64]), absieht — dadurch gelöst werden,

---

geraden und -kurven sind bei *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Kurven, p. 6—7, 142 u. 335—346, entwickelt. Vgl. auch *S. Lie,* Vorl. üb. kontinuierliche Gruppen, hrsg. v. *G. Scheffers,* Leipzig 1893, p. 694—709.

64) Wenn man in dieser elementaren Lösung die Konstanten a, b, c durch Funktionen von t ersetzt und dann verlangt, diese Funktionen ohne Anwendung

dass man x, y als die Koordinaten eines veränderlichen Punktes der Evolute einer durch zwei beliebige Gleichungen:

$$\xi = g(t), \quad \eta = h(t)$$

gegebenen Linie l ansieht. Denn dann ergeben sich sowohl für x, y als für die Bogenlänge s des von dem Punkte x, y beschriebenen Weges — die sich ja von dem Krümmungsradius von l nur um eine Konstante unterscheiden kann (Nr. **16**) — Ausdrücke der verlangten Art, die aus den Funktionen $g(t)$, $h(t)$ und deren Ableitungen erster und zweiter Ordnung zusammengesetzt sind[65]. Weil jede ebene krumme Linie als Evolute einer anderen angesehen werden kann, erhält man so zugleich die allgemeinste Lösung.

Da man auch noch die Freiheit hat, den Parameter t durch eine beliebige Funktion eines neuen Parameters θ zu ersetzen, so lässt sich die Anzahl der vorkommenden willkürlichen Funktionen ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf *eine* ermässigen. Wählt man als neue unabhängige Veränderliche den Winkel θ, welchen die Normale von l mit der Abscissenaxe bildet, so dass t als Funktion von θ durch die Gleichung:

$$g'(t) \cos \theta + h'(t) \sin \theta = 0$$

bestimmt wird, und setzt man sodann:

$$-g(t) \cos \theta - h(t) \sin \theta = \varphi(\theta),$$

so erhält man für x, y, s die folgenden bereits von *L. Euler*[66] angegebenen allgemeinsten Ausdrücke:

$$x = \varphi' \sin \theta + \varphi'' \cos \theta,$$
$$y = -\varphi' \cos \theta + \varphi'' \sin \theta,$$
$$s = \varphi + \varphi'',$$

in denen φ eine beliebige Funktion von θ bezeichnet.

Ersetzt man in den vorangehenden Formeln is durch z und lässt man zugleich für θ und $\varphi(\theta)$ beliebige komplexe Werte zu, so liefern

---

von Integralzeichen so zu bestimmen, dass die Gleichungen $dx = a\,dt$, $dy = \sqrt{1 - a^2}\,dt$ bestehen bleiben, so wird man auf die in den nachfolgenden Ausführungen des Textes besprochene allgemeine Lösung geführt. Vgl. *S. F. Lacroix,* Traité du calc. diff. et du calc. int., 2. éd. 2, Paris 1814, p. 698—700.

65) Auf diesem Wege hat schon *J. Newton* in seiner Methodus fluxionum die Aufgabe gelöst: „Invenire quotlibet Curvas quarum Longitudo finita Aequatione possit exprimi". Vgl. *J. Newtoni* Opuscula mathematica 1, Lausannae & Genevae 1744, p. 178.

66) Nach einer Angabe, welche *G. Darboux,* J. de math. (2) 18 (1873), p. 236—237, ohne nähere Angabe der betreffenden Stelle macht.

sie die allgemeinste von Integralzeichen freie Parameterdarstellung einer Minimalkurve. Durch die Substitution:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \tau, \quad \varphi(\theta) = \frac{4}{1+\tau^2} f(\tau),$$

wo $f(\tau)$ eine willkürliche Funktion des neuen Parameters τ bedeutet, und durch Vertauschung von y mit z ergiebt sich die von *K. Weierstrass*[67]) benutzte Darstellung:

$$x = (1-\tau^2) f''(\tau) + 2\tau f'(\tau) - 2f(\tau),$$
$$y = i(1+\tau^2) f''(\tau) - 2i\tau f'(\tau) + 2i f(\tau),$$
$$z = 2\tau f''(\tau) - 2f'(\tau)$$

der Minimalkurven.

Auf dem umgekehrten Wege ist *G. Darboux* zum Ziel gelangt, indem er von der am Schluss der Nr. **12** gemachten Bemerkung ausging und daraus folgerte, dass man die allgemeinste Parameterdarstellung der (nicht geradlinigen) Minimalkurven erhalten könne, indem man zunächst irgend drei Funktionen A, B, C einer Veränderlichen t so annimmt, dass sie die Bedingung:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

erfüllen (während jedoch $\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2$ von Null verschieden ist), und sodann, unter u eine vierte ganz willkürliche Funktion von t verstehend, x, y, z aus den Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + u = 0,$$
$$\frac{dA}{dt}x + \frac{dB}{dt}y + \frac{dC}{dt}z + \frac{du}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2A}{dt^2}x + \frac{d^2B}{dt^2}y + \frac{d^2C}{dt^2}z + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

als Funktionen von t bestimmt[68]).

Die allgemeinere Aufgabe, ohne Anwendung von Integralzeichen auf die allgemeinste Weise vier Funktionen x, y, z, s einer Veränderlichen t so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

besteht, und die entsprechende Aufgabe für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen sind zuerst von *J. A. Serret*[69]) gelöst worden.

Ein anderes durch Wahrung der Symmetrie sich auszeichnendes Lösungsverfahren, welches auch auf andere homogene Gleichungen

67) *K. Weierstrass,* Berl. Monatsber. 1866, p. 619.
68) *G. Darboux,* J. de math. (2) 18 (1873), p. 236—237.
69) *J. A. Serret,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 353.

zwischen mehreren Differentialen ausgedehnt werden kann, hat *G. Darboux* angegeben. Dasselbe besteht in folgendem: Man wähle für α, β, γ nach Belieben irgend drei der Bedingung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

unterworfene Funktionen von t, bilde die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix} = \lambda, \quad \begin{vmatrix} \frac{d\gamma}{dt} & \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} & \frac{d^2\alpha}{dt^2} \end{vmatrix} = \mu, \quad \begin{vmatrix} \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} \end{vmatrix} = \nu,$$

und bestimme sodann, unter u eine beliebige Funktion von t verstehend, drei Funktionen a, b, c von t so, dass die Gleichungen:

$$\lambda a + \mu b + \nu c = u,$$
$$\frac{d\lambda}{dt} a + \frac{d\mu}{dt} b + \frac{d\nu}{dt} c = \frac{du}{dt},$$
$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} a + \frac{d^2\mu}{dt^2} b + \frac{d^2\nu}{dt^2} c = \frac{d^2u}{dt^2}$$

bestehen.

Dann sind:

$$s = -\frac{da}{d\alpha} = -\frac{db}{d\beta} = -\frac{dc}{d\gamma},$$
$$x = \alpha s + a,$$
$$y = \beta s + b,$$
$$z = \gamma s + c$$

vier Ausdrücke der verlangten Beschaffenheit[70]). Durch zweckmässige Einführung abkürzender Bezeichnungen für drei aus den Ableitungen erster bis vierter Ordnung der Funktionen α, β, γ zusammengesetzte Determinanten ist es *G. Darboux* gelungen, die endgültigen Ausdrücke für x, y, z, s durch die Funktionen α, β, γ, u und deren Ableitungen in verhältnismässig kurzer Form darzustellen[71]).

14. Krümmung ebener Linien. Wenn P_0 ein gewöhnlicher Punkt einer ebenen Linie l und diese letztere in der Nähe von P_0 krumm ist, so schneiden sich die in P_0 und einem von P_0 verschiedenen Punkt Q der Linie l auf dieser errichteten Normalen in einem

70) *G. Darboux,* J. de math (2) 18 (1873), p. 239—240. Weitere Ausführungen J. de math. (4) 3 (1887), p. 305. Dort wird auch der Ausnahmefall erörtert, dass die Determinante aus den Funktionen λ, μ, ν und ihren Ableitungen 1. und 2. Ordnung gleich Null ist, und gezeigt, dass derselbe auf die entsprechende Aufgabe für weniger Veränderliche führt.

71) *G. Darboux,* J. de math. (4) 3 (1887), p. 317—319.

im Endlichen liegenden Punkte S, sobald der Abstand $P_0 Q$ unter einer gewissen Grenze liegt. Ist ferner bei Anwendung der in Nr. 2 erklärten Bezeichnungen:

im Fall I die Determinante $x_0' y_0'' - y_0' x_0''$,

im Fall II der Ausdruck $F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2$

an der Stelle x_0, y_0, bezw. der Wert y_0'' von Null verschieden, so nähert sich der Punkt S bei unbegrenzter Annäherung des Punktes Q an den Punkt P_0 unbegrenzt einem festen im Endlichen liegenden Punkte M_0.

Dieser Punkt M_0 heisst der *Krümmungsmittelpunkt*, der Abstand der Punkte M_0, P_0 heisst der *Krümmungsradius*, der reziproke Wert des Krümmungsradius heisst die *Krümmung* und der mit dem Radius $M_0 P_0$ um M_0 als Mittelpunkt beschriebene Kreis heisst der *Krümmungskreis (Oskulationskreis)* der Linie l im Punkte P_0.[72])

Wenn dagegen in einem der soeben unterschiedenen Fälle der Ausdruck, von welchem vorausgesetzt wurde, dass er von Null verschieden sei, den Wert Null hat, während alle übrigen Voraussetzungen bestehen bleiben, so entfernt sich der Punkt S ins Unendliche, wenn Q dem Punkt P_0 unbegrenzt nahe rückt. Von einem eigentlichen Krümmungsmittelpunkt und einem Krümmungsradius kann dann nicht mehr die Rede sein. An die Stelle des Krümmungskreises tritt die Tangente von l in P_0, und die Krümmung ist gleich Null zu setzen.

Wenn man durch drei von einander verschiedene Punkte P, Q, R von l einen Kreis k hindurchlegt und sodann die Punkte P, Q, R dem Punkte P_0 unbegrenzt annähert, so nähert sich der Kreis k unbegrenzt dem Krümmungskreise von l in P_0, gleichgültig in welcher Weise die Annäherung der Punkte P, Q, R an P_0 erfolgt[73]). Der Krümmungskreis kann daher auch erklärt werden als die Grenzlage des durch P_0 und *zwei* unendlich nahe Nachbarpunkte gehenden Kreises, oder als die Grenzlage desjenigen Kreises, welcher l in P_0 berührt und durch *einen* unendlich nahen Nachbarpunkt geht, oder endlich

---

72) Historisches über das erste Auftreten dieser Begriffe bei *Huygens*, *Leibniz* und *Newton* findet sich in *Haas*, Versuch einer Darst. d. Gesch. d. Krgsm., p. 8—11, und *M. Cantor*, Vorles. üb. Gesch. d. Math. 3, Leipzig 1894/98, p. 134—138 u. 169 ff. — Über die Ausdehnung des Begriffs der Krümmung auf singuläre Punkte und über die Ermittelung der Krümmungskreise der durch einen solchen Punkt gehenden Linienzweige vgl. *L. Painvin*, Ann. di mat. (2) 4 (1870/71), p. 215.

73) Die Hülfsmittel zum Beweise hat *H. A. Schwarz*, Ann. di mat. (2) 10 (1880/82), p. 129 = Ges. math. Abhandl. 2, Berlin 1890, p. 296 geliefert.

als die Grenzlage desjenigen Kreises, welcher durch P_0 geht und l in einem unendlich nahen Nachbarpunkt berührt.

Der Krümmungskreis von l in P_0 hat in diesem Punkte mit l eine Berührung von der zweiten oder einer höheren Ordnung und ist der *einzige* Kreis, dem diese Eigenschaft zukommt. Diejenigen Punkte einer Linie l, in welchen der Krümmungskreis mit l eine Berührung von *höherer* als der zweiten Ordnung hat, heissen *Scheitel* von l.

Ist unter der Voraussetzung, dass zu P_0 ein im Endlichen liegender Krümmungsmittelpunkt gehört, irgend ein durch P_0 hindurchgehender Kreis gegeben, dessen Mittelpunkt im Innern der Strecke $M_0 P_0$ oder auf ihrer Verlängerung über P_0 hinaus liegt, so verläuft die Linie l in hinreichender Nähe von P_0 *ausserhalb* dieses Kreises. Ist dagegen um einen Mittelpunkt, welcher der Verlängerung von $M_0 P_0$ über M_0 hinaus angehört, ein durch P_0 gehender Kreis beschrieben, so liegt l in hinreichender Nähe von P_0 im *Innern* dieses Kreises. Der Krümmungskreis von l in P_0 bildet den Übergang zwischen den beiden eben erwähnten Arten von Kreisen und ist im allgemeinen so beschaffen, dass sich auf l in jeder Nähe von P_0 sowohl Punkte finden, welche ausserhalb, als auch Punkte, welche innerhalb des Krümmungskreises liegen.

Hat l in P_0 die Krümmung Null, so liegt l in der Nähe von P_0 ausserhalb eines *jeden* Kreises, welcher l in P_0 berührt.

Unter den im Anfang dieser Nummer gemachten Voraussetzungen und bei Anwendung der in Nr. 2 angegebenen Bezeichnungen ergeben sich für die Koordinaten ξ_0, η_0 des Mittelpunktes und das Quadrat des Radius ϱ_0 des zu P_0 gehörenden Krümmungskreises von l die folgenden Ausdrücke:

$$\text{(I)} \qquad \xi_0 = x_0 - \frac{y_0'(x_0'^2 + y_0'^2)}{x_0' y_0'' - y_0' x_0''},$$

$$\eta_0 = y_0 + \frac{x_0'(x_0'^2 + y_0'^2)}{x_0' y_0'' - y_0' x_0''},$$

$$\varrho_0^2 = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}{(x_0' y_0'' - y_0' x_0'')^2} \text{ [74]}.$$

$$\text{(II)} \qquad \xi_0 = x_0 - \left[\frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}\right]_{x, y = x_0, y_0},$$

$$\eta_0 = y_0 - \left[\frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}\right]_{x, y = x_0, y_0},$$

---

74) Andere Gestalten dieser Formel in *L. A. Sohncke*'s Samml. v. Aufg. 1, § 22, 4. Aufl., p. 147. — Vereinfachungen der Ausdrücke für $\xi_0, \eta_0, \varrho_0^2$ durch zweckmässige Wahl des Parameters giebt *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Kurven, p. 30—31.

$$\varrho_0^2 = \left[\frac{(F_x^2 + F_y^2)^3}{(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2)^2}\right]_{x,y=x_0,y_0},$$

bezw.

$$\xi_0 = x_0 - \frac{y_0'(1 + y_0'^2)}{y_0''},$$

$$\eta_0 = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''},$$

$$\varrho_0^2 = \frac{(1 + y_0'^2)^3}{y_0''^2}.$$

In *Eisenbahnkurven* pflegt man unter Voraussetzung einer den Umständen angemessenen Fahrgeschwindigkeit zur Ausgleichung der Fliehkraft die äussere Schiene höher zu legen als die innere. Da aber die Höhe der äusseren Schiene keinen plötzlichen Sprung erleiden darf, ist es nicht möglich, an eine geradlinige Strecke direkt eine kreisförmige Kurve anzuschliessen. Man muss vielmehr zwischen beide ein Kurvenstück einschalten, längs dessen die Krümmung stetig von Null bis zu demjenigen Werte zunimmt, welcher dem anzuschliessenden Kreisbogen entspricht. Ein Kurvenstück dieser Art kann man dadurch erhalten, dass man nach willkürlicher Annahme eines oberhalb 2 gelegenen konstanten Exponenten α und nach geeigneter Bestimmung eines konstanten Koeffizienten a von der durch die Gleichung $y = ax^\alpha$ dargestellten Linie ein im Nullpunkt beginnendes Stück von geeigneter Grösse abschneidet[75]).

Hat man für eine von singulären Punkten freie ebene Linie l die positive Tangentenrichtung festgelegt und zugleich in der Ebene von l einen bestimmten Drehungssinn als positiven angenommen, so pflegt man die positive Richtung der Normale durch die Bedingung festzustellen, sie solle aus der positiven Tangentenrichtung durch eine positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgehen. Nach solchen Festsetzungen legt man vielfach *auch der Krümmung und dem Krümmungsradius bestimmte Vorzeichen* bei, indem man unter der Krümmung von l in einem Punkte P diejenige positive oder negative Zahl versteht, deren absoluter Wert die Krümmung im bisherigen Sinne angiebt, während ihr Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder der negativen Normale liegt, — und

---

75) Über das Abstecken und die praktische Ausführung solcher *Übergangskurven* vgl. *F. R. Helmert,* Die Übergangskurven für Eisenbahngeleise, Aachen 1872; *W. Jordan,* Handbuch der Vermessungskunde 2, 5. Aufl. Stuttgart 1897, p. 748—752; *H. Oostinjer,* Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 34, Wiesbaden 1897, p. 178—179, und *A. Francke,* ebendas. 36 (1899), p. 265—268.

sodann den Krümmungsradius dem reziproken Wert der so erklärten Krümmung gleichsetzt.

Ferner ordnet man häufig jedem Punkt P von l denjenigen Punkt Q auf dem Umfang eines in der Ebene von l liegenden Kreises vom Radius 1 zu, in welchem der von Q nach dem Mittelpunkt des Kreises gehende Radius zu der positiven Normale von l in P parallel und gleichgerichtet ist (*Abbildung auf den Einheitskreis durch parallele Normalen*) — mit der weiteren Festsetzung, dass bei Berechnung der Länge eines von Q durchlaufenen Weges jeder einzelne Teil desselben mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ in Anschlag gebracht werden soll, je nachdem er von Q im positiven oder negativen Drehungssinn beschrieben wird. Sind dann A, B irgend zwei Punkte von l, so nennt man die Länge des Weges, welchen Q durchläuft, während P stetig von A zu B übergeht, die *ganze Krümmung* des Bogens AB, und den Quotienten, den man erhält, indem man die ganze Krümmung eines Bogens durch dessen (nach Nr. **10** mit einem bestimmten Vorzeichen versehene) Länge dividiert, die *mittlere Krümmung* dieses Bogens[76]).

Rücken auf l zwei Punkte P_1, P_2 einem festen Punkt P_0 gleichzeitig unbegrenzt nahe, so nähert sich die mittlere Krümmung des Bogens $P_1 P_2$ unbegrenzt der — nach dem obigen mit einem bestimmten Vorzeichen versehenen — Krümmung von l in P_0.

Ist τ die ganze Krümmung des zwischen einem festen Anfangspunkt A und einem beweglichen Endpunkt P enthaltenen Bogens von l, ferner s die Länge dieses Bogens, k die Krümmung und ϱ der Krümmungsradius von l in P, so ist dem vorstehenden gemäss immer:

$$\frac{1}{\varrho} = k = \frac{d\tau}{ds}.$$

Und wenn im Fall Nr. 2, I die Richtung der wachsenden t als positive Tangentenrichtung gewählt ist, so gilt ferner die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = k = \frac{\varphi'\chi'' - \chi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}^3},$$

wo der Wurzel ihr *positiver* Wert beizulegen ist. Dieser letzteren

76) Diese Begriffe sind erst nach dem Erscheinen und durch den Einfluss von *C. F. Gauss,* Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Gott. 6 (1828) = Werke 4, p. 217 ff. in Gebrauch gekommen. *Gauss* selbst hat sie in dem ersten Entwurf dieser Abhandlung (1825), Werke 8, p. 408 ff. (vgl. auch p. 397 u. 398) vollständig entwickelt, sich aber dann bei deren endgültiger Abfassung auf die Erklärung der entsprechenden Begriffe für Flächen (Nr. **36**) beschränkt.

Formel kann man, indem man t als die während der Bewegung von P verfliessende Zeit auffasst, die Deutung geben:

$$\text{Krümmung} = \frac{\text{Beschleunigung in der positiven Normalenrichtung}}{\text{Quadrat der Geschwindigkeit}}.$$

Unter dem zu einem Bogenelement ds einer Linie l gehörenden *Kontingenzwinkel* versteht man den spitzen Winkel zwischen den Tangenten von l in den Endpunkten von ds. Wenn man jedoch der Krümmung und der von einem festen Anfangspunkt an gemessenen Bogenlänge s von l bestimmte Vorzeichen beilegt, so pflegt man auch die eben gegebene Erklärung schärfer zu fassen und den erwähnten Winkel erst dann als den ds entsprechenden Kontingenzwinkel von l zu bezeichnen, nachdem er mit demjenigen *Vorzeichen* versehen ist, welches ihn mit dem zu ds gehörenden Differential der ganzen Krümmung des Bogens s in Übereinstimmung bringt.

Die Krümmung k einer ebenen Linie ist eine Differentialinvariante (II A 6, Nr. **13**) derselben gegenüber allen Bewegungen in der Ebene. Dasselbe gilt von den in Bezug auf die ganze Krümmung τ genommenen Ableitungen $\frac{dk}{d\tau}, \frac{d^2k}{d\tau^2}, \cdots$. Zugleich stellen die Funktionen:

$$k, \frac{dk}{d\tau}, \frac{d^2k}{d\tau^2}, \cdots,$$

an deren Stelle man auch:

$$k, \frac{dk}{ds}, \frac{d^2k}{ds^2}, \cdots,$$

oder:

$$\varrho, \frac{d\varrho}{d\tau}, \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}, \cdots,$$

oder:

$$\varrho, \frac{d\varrho}{ds}, \frac{d^2\varrho}{ds^2}, \cdots,$$

nehmen könnte, insofern alle *wesentlichen* Differentialinvarianten gegenüber Bewegungen in der Ebene dar, als sich jede solche Differentialinvariante als eine Funktion der Glieder einer beliebigen dieser Reihen darstellen lässt[77]).

Als *Krümmungsschwerpunkt* einer ebenen Linie l bezeichnet *J. Steiner*[78]) denjenigen Punkt, welcher der Schwerpunkt von l wird, wenn man diese Linie so mit Masse belegt, dass deren Dichtigkeit überall der Krümmung von l proportional wird.

---

77) Vgl. *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Kurven, § 8, p. 42—50. Über Krümmungsdifferentialinvarianten gegenüber beliebigen projektiven, sowie allgemeinen Punkt- und Berührungstransformationen s. I B 2, Nr. **21**, **22**.

78) *J. Steiner*, J. f. Math. 21 (1840), p. 33 = Ges. Werke 2, p. 99; *C. Neumann*, Ann. di mat. (2) 1 (1867/68), p. 280; für Flächen ebenda, p. 283.

15. Natürliche Gleichung einer ebenen Linie. Wenn zwischen zwei reellen Veränderlichen s, ϱ eine Gleichung $f(s, \varrho) = 0$ gegeben ist, durch welche ϱ für ein den Wert $s = 0$ enthaltendes Intervall als eine von Null verschiedene Funktion von s bestimmt wird, so kann man von einer ebenen Linie l fordern, sie solle von singulären Punkten frei und ausserdem so beschaffen sein, dass ihre von einem festen Anfangs- bis zu einem beweglichen Endpunkt P gemessene und in der einen Richtung positiv, in der andern negativ gerechnete Bogenlänge mit s und ihr (gemäss dem Vorangehenden als positiv oder negativ anzusehender) Krümmungsradius in P mit ϱ übereinstimmt. Durch diese Forderung wird die Gestalt von l bestimmt, während die Lage unbestimmt bleibt. Eine Gleichung dieser Art heisst eine *natürliche Gleichung* (*equazione intrinseca*) der betreffenden Linie[79]).

Aus der natürlichen Gleichung $f(s, \varrho) = 0$ einer Linie kann man eine Parameterdarstellung derselben gewinnen, indem man zunächst eine Funktion τ von s durch die Gleichung:

$$\tau = \int \frac{ds}{\varrho}$$

bestimmt, wobei die Integrationskonstante willkürlich gewählt werden kann, und sodann:

$$x = \int \cos \tau \cdot ds, \qquad y = \int \sin \tau \cdot ds$$

setzt.

Hat man aus der natürlichen Gleichung einer Linie l die Krümmung $k = \frac{1}{\varrho}$ als Funktion der Bogenlänge s berechnet:

$$k = g(s),$$

so erhält man, wenn τ die ganze Krümmung des Bogens s bezeichnet, zunächst:

---

79) Vgl. auch Nr. 32. — Allgemeine Regeln und zahlreiche Beispiele für die Ermittelung gestaltlicher Eigenschaften einer Linie aus ihrer natürlichen Gleichung giebt *E. Cesàro,* Geom. intrinseca, p. 6—19, und auch in den nächstfolgenden Kapiteln. Insbesondere wird die Ermittelung der etwa vorhandenen Spitzen, Wendepunkte, Asymptoten, asymptotischen Punkte und asymptotischen Kreise besprochen. Ferner werden einerseits die natürlichen Gleichungen vieler bekannter Linien entwickelt, die sich in rechtwinkligen oder Polarkoordinaten durch einfache Gleichungen darstellen lassen (Kegelschnitte, Cassinoide, Kettenlinie, Traktrix, Kreisevolvente, Cykloide u. a.) und andererseits die Gestalten solcher Linien untersucht, die durch natürliche Gleichungen einfacher Art, z. B. eine quadratische Gleichung zwischen s und ϱ, bestimmt sind. Auch die Aufgabe, eine ebene Linie aus gegebenen Eigenschaften zu bestimmen, wird in einer grossen Zahl von Fällen durch Ermittelung der natürlichen Gleichung gelöst.

$$\frac{dk}{d\tau} = \frac{dk}{ds} \cdot \frac{ds}{d\tau} = \frac{dk}{ds} \cdot \frac{1}{k} = \frac{g'(s)}{g(s)},$$

und kann aus dieser und der vorangehenden Gleichung durch Elimination von s eine Gleichung:

$$\frac{dk}{d\tau} = \omega(k)$$

zwischen den beiden ersten Differentialinvarianten k und $\frac{dk}{d\tau}$ ableiten. Abweichend von der soeben gegebenen Erklärung nennt *G. Scheffers*[80]) diese letztere Gleichung die natürliche Gleichung von l, weil sie, sobald k nicht konstant ist, ebenfalls die Gestalt von l bestimmt und dabei den Vorzug hat, sich nicht zu ändern, wenn der Anfangspunkt der Bogenlängen auf l verschoben wird. Eine Parameterdarstellung von l kann man aus ihr dadurch gewinnen, dass man aus der Gleichung $\int \frac{dk}{\omega(k)} = \tau$, in welcher die Integrationskonstante beliebig gewählt werden darf, k als Funktion von τ berechnet und sodann:

$$x = \int \frac{\cos \tau}{k} d\tau, \qquad y = \int \frac{\sin \tau}{k} d\tau$$

setzt.

16. Evoluten und Evolventen. Die Gesamtheit aller zu den einzelnen Punkten einer ebenen Linie l gehörenden Krümmungsmittelpunkte von l heisst die *Krümmungsmittelpunktslinie* oder die *Evolute*[81]) von l. Wenn eine ebene Linie l von singulären Punkten frei und so beschaffen ist, dass zu jedem ihrer Punkte ein im Endlichen gelegener Krümmungsmittelpunkt gehört, und verschiedenen Punkten von l auch verschiedene Krümmungsmittelpunkte entsprechen, so stimmt die Normale von l in einem beliebigen Punkte P stets mit der Tangente der Evolute von l in dem zu P gehörenden Krümmungsmittelpunkt überein. Sind ferner A, B irgend zwei Punkte von l, und hat das von ihnen begrenzte Stück AB von l die Eigenschaft, dass der zu einem beweglichen Punkt P dieses Stückes gehörende Krümmungsradius von l beständig zu- oder beständig abnimmt, wenn P das Stück AB, ohne umzukehren, durchläuft, so ist die Länge des zu AB gehörenden Stückes der Evolute von l gleich der Differenz der Krümmungsradien von l in den Punkten A und B. Das Stück AB kann daher als die Bahn angesehen werden, welche von dem freien Endpunkt eines un-

---

80) Einführung in die Theorie der Kurven, p. 52. Vgl. auch p. 210—211.

81) Diese Bezeichnung stammt von *Ch. Huygens*; vgl. *M. Cantor*, Vorles. üb. Gesch. d. Math. 3, Leipzig 1898, p. 134. — Eine Erweiterung des Begriffes wird in Nr. **33** angegeben.

ausdehnbaren und gespannt bleibenden Fadens bei der Aufwickelung dieses letzteren auf, oder bei seiner Abwickelung von der Evolute beschrieben wird.

Während zu einer gegebenen Linie nur *eine* Evolute gehört, giebt es umgekehrt, wenn eine krumme ebene Linie e gegeben ist, unendlich viele verschiedene Linien, welche e als Evolute haben. Diese Linien heissen *Evolventen* von e. Sie sind alle einander parallel und entstehen aus e in der angegebenen Weise durch Auf- oder Abwickelung eines Fadens.

17. Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten. Bei den „cyklischen" Linien (solchen, die von einem mit einem Kreise fest verbundenen Punkte beim Abrollen dieses Kreises auf einem andern festen Kreise erzeugt werden können) besteht (IV 3, Nr. 9) die folgende zuerst von *L. Euler*[82]) in anderer Form abgeleitete, später von *Savary*[83]) in seinen Vorlesungen benutzte und daher als *Savary'sche Gleichung* bekannte Beziehung: In einer Ebene seien (Fig. 2) $\varkappa$ ein fester Kreis, Γ der Mittelpunkt desselben, k ein beweglicher auf $\varkappa$ rollender Kreis, P ein mit k fest verbundener Punkt, l die von P beschriebene Bahn, P_0 ein beliebiger Punkt derselben, Π_0 der zugehörige Krümmungsmittelpunkt von l und B_0, C_0 beziehentlich die Punkte, mit welchen der Berührungspunkt beider Kreise und der Mittelpunkt von k im Augenblick des Durchgangs von P durch P_0 zusammenfallen. Bezeichnet dann, nach willkürlicher Festlegung der positiven Richtungen der B_0 mit C_0 und P_0 verbindenden Geraden, i den Winkel zwischen diesen positiven Richtungen, so ist bei Beachtung der am Schluss der Nr. 2 angegebenen Vorzeichenregel:

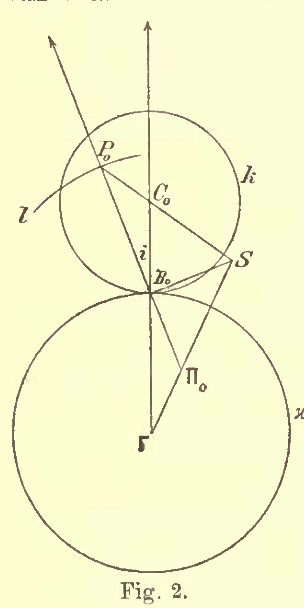


Fig. 2.

$$\left(\frac{1}{B_0\Pi_0} - \frac{1}{B_0P_0}\right)\cos i = \frac{1}{B_0\Gamma} - \frac{1}{B_0C_0}.\ ^{84)}$$

82) *L. Euler,* Novi Comment. Acad. Petrop. 11 (1765), p. 207, Supplementum: „De figura dentium rotarum".

83) Vgl. J. de math. (1) 10 (1845), p. 205.

84) Geometrische Herleitungen der Gleichung geben *C. F. A. Leroy,* Traité de géom. descriptive, 2. éd. Paris 1842, 7. éd. 1865, livre 9, chap. 3; *A. Transon,* J. de math. (1) 10 (1845), p. 148 ff. und *L. Burmester,* Lehrb. d. Kinematik, 1, Leipzig 1888, p. 125.

In Verbindung mit dieser Gleichung hat schon *Savary*[85]) die folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes Π_0 angegeben: Man errichte in B_0 auf P_0B_0 eine Senkrechte und bringe dieselbe mit P_0C_0 zum Durchschnitt in S. Dann schneiden sich die Geraden ΓS und P_0B_0 in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt Π_0.

Diese Konstruktion und die *Savary*'sche Gleichung bleiben auch dann anwendbar, wenn in einer Ebene die Bewegung einer starren Figur $\mathfrak{F}$ durch das Abrollen einer *beliebigen* „Polkurve“ p auf einer *beliebigen* festen „Polbahn“ π bestimmt ist. Denn die Bahn irgend eines zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Punktes P hat an jeder Stelle P_0 den gleichen Krümmungsmittelpunkt wie diejenige Bahn, die sich ergeben würde, wenn man die Linien p und π in dem Augenblick, wo P durch P_0 hindurchgeht, durch ihre zu dem augenblicklichen Berührungspunkt gehörenden Krümmungskreise ersetzte.

Da der Krümmungsmittelpunkt einer Linie stets mit demjenigen Punkt übereinstimmt, in welchem die beweglich gedachte Normale ihre Hüllbahn berührt, so kann man zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes einer gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte ferner die Hülfsmittel anwenden, welche die Kinematik zur Auffindung des Berührungspunktes einer bewegten Geraden mit ihrer Hüllbahn darbietet (IV 3, Nr. 9). Hülfsmittel dieser Art und mannigfache Anwendungen derselben zur Konstruktion von Krümmungsmittelpunkten geben *A. Mannheim*[86]) und *L. Burmester*[87]). Noch ein anderes auf dem gleichen Grundgedanken beruhendes Konstruktionsverfahren, welches insbesondere bei den „cyklischen“ Linien zum Ziel führt, hat *W. Hartmann*[88]) angegeben.

Für die Kegelschnitte gilt nach *J. Steiner*[89]) der folgende Satz: Diejenige Parabel, welche die zu einem beliebigen Punkte P des Kegelschnitts gehörende Tangente und Normale und ausserdem (bei der Ellipse oder Hyperbel) die beiden Hauptaxen berührt, beziehungsweise (bei der Parabel) die Axe zur Scheiteltangente hat, berührt die Normale in dem zu P gehörenden Krümmungsmittelpunkt. Hieraus kann

85) Vgl. *C. F. A. Leroy*, a. a. O.

86) *A. Mannheim,* Nouv. Ann. (1) 16 (1857), p. 322 (Kegelschnitte); ebd. 18 (1859), p. 371 (cyklische Linien), und Ann. di mat. (1) 1 (1858), p. 364.

87) *L. Burmester,* Lehrb. d. Kinematik, 1, Leipzig 1888, p. 63 (Verfolgungskurven), p. 90, 93—96 u. 141—142 (cyklische Linien).

88) *W. Hartmann,* Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure 37 (1893), p. 95.

89) *J. Steiner,* Vorles. üb. synthet. Geom. 2, bearb. v. *H. Schröter,* Leipzig 1867, p. 214—223. Vgl. auch *A. Mannheim,* Nouv. Ann. (1) 16 (1857), p. 328.

man, wie *C. Pelz*[90]) gezeigt hat, die vielen bekannten Konstruktionen für die Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte ableiten.

Ist in einer Ebene eine Linie λ als die Hüllbahn einer bewegten starren Linie l erklärt, so kann die Auffindung ihres Krümmungsmittelpunktes in einem gegebenen Punkte, wie wohl *P. Serret*[91]) zuerst ausdrücklich hervorgehoben hat, auf die gleiche Aufgabe für eine als Punktbahn gegebene Linie zurückgeführt werden. Ist nämlich (Fig. 3) P ein beliebiger Punkt von λ und A derjenige (mit l fest verbunden zu denkende) Punkt von l, welcher mit P in dem Augenblick zusammenfällt, wo l die Hüllbahn λ in P berührt, ist ferner M der zu A gehörende Krümmungsmittelpunkt von l und m die Bahn von M, so stimmt der Krümmungsmittelpunkt C von λ in P überein mit dem Krümmungsmittelpunkt von m in demjenigen Punkt, wo M sich in dem erwähnten Augenblick befindet.

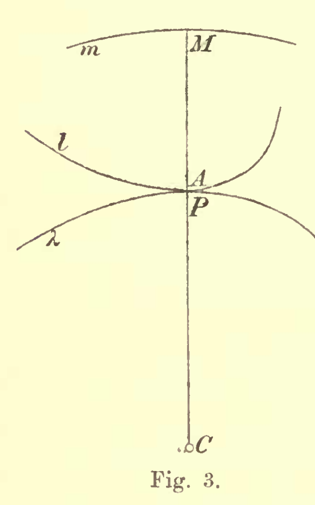


Fig. 3.

Durch Verbindung dieses Satzes mit der *Savary*'schen Gleichung und der *Bobillier*'schen Konstruktion (Nr. 6) ergiebt sich eine einfache Lösung[92]) der folgenden Aufgabe: In einer Ebene (Fig. 4) sei die Bewegung einer starren Figur $\mathfrak{F}$ dadurch bestimmt, dass zwei zu $\mathfrak{F}$ gehörende Linien f, l beziehentlich auf zwei festen Linien φ, λ gleiten. Man soll für die Hüllbahn δ einer dritten zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Linie d den Krümmungsmittelpunkt in einem gegebenen Punkte A unter der Voraussetzung konstruieren, dass für den Augenblick, wo d und δ einander in A berühren, der

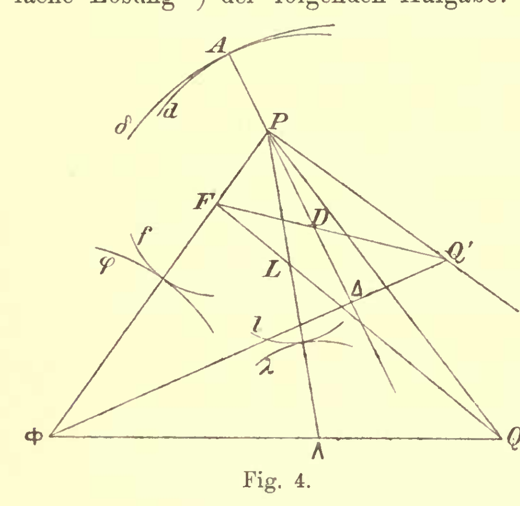


Fig. 4.

90) *C. Pelz,* Prag. Ber. 1879, p. 205.

91) *P. Serret,* Des méthodes en géométrie, Paris 1855, p. 83.

92) Vgl. *L. Burmester,* Kinematik, 1, p. 100, oder *A. Mannheim,* J. éc. polyt.

zu A gehörende Krümmungsmittelpunkt D von d sowie die zu den Berührungspunkten von f mit φ und von l mit λ gehörenden Krümmungsmittelpunkte F, Φ, L, Λ dieser vier Linien gegeben seien[93]). Bestimmt man nämlich den Schnittpunkt P der Geraden ΦF, ΛL, ferner den Schnittpunkt Q der Geraden $\Phi\Lambda$, FL, und macht sodann den Winkel DPQ' in gleichem Sinne gleich dem Winkel LPQ, so braucht man nur die Gerade FD bis zum Schnittpunkt Q' mit der Geraden PQ' zu ziehen und Q' mit Φ zu verbinden. Dann ist der Schnittpunkt Δ der Geraden $Q'\Phi$, PD der gesuchte zu A gehörende Krümmungsmittelpunkt von δ.[94])

Diese Aufgabe und ihre Lösung können dadurch, dass man eine oder mehrere der Linien d, f, φ, l, λ zu Punkten zusammenschrumpfen lässt, in mannigfaltiger Weise spezialisiert werden.

Wie unter ähnlichen Voraussetzungen die zum augenblicklichen Pol gehörenden Krümmungsmittelpunkte der Polkurve und der Polbahn konstruiert werden können, hat *M. Grübler*[95]) gezeigt.

Einen geeigneten Ausgangspunkt für die Entwickelung von Konstruktionen des Krümmungsradius ϱ einer Linie l bildet auch die Formel (vgl. Nr. **14**):

$$\varrho = \frac{v^2}{n},$$

wo v die Geschwindigkeit und n die Normalbeschleunigung eines auf l bewegten Punktes P bedeutet. Auf diesem Wege hat *Bresse*[96]) die Aufgabe unter Hinzufügung von Beispielen eingehend behandelt und die Anwendbarkeit der obigen Formel nachgewiesen:

1) für den Fall, dass l als Bahn eines Punktes P einer in der Ebene von l sich bewegenden starren Figur gegeben ist und

---

21, cah. 37 (1858), p. 185—187. Die ersten Lösungen der allgemeinen Aufgabe oder spezieller Fälle derselben wurden von *A. Transon*, J. de math. (1) 10 (1845), p. 154—155, *Chasles*, ibid. p. 206—207, und *Bobillier*, Cours de géom. (12. éd. 1870, p. 232) gegeben.

93) An Stelle des einen Paares zusammengehörender Krümmungsmittelpunkte könnte auch die zum augenblicklichen Pol gehörende Tangente der Polbahn gegeben sein. Vgl. *Burmester*, Kinematik 1, p. 99, oder *A. Mannheim*, a. a. O. p. 187.

94) Über die quadratische Verwandtschaft, welche entsteht, wenn man durch diese Konstruktion jedem Punkt D einen Punkt Δ zuordnet vgl. *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, Leipzig 1886, p. 12—22 (IV 3, Nr. 4).

95) *M. Grübler*, Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), p. 212 und p. 382—383.

96) *Ch. Bresse*, J. éc. polyt. 20, cah. 35 (1853), p. 89. Weitere Beispiele giebt *W. Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte 1, 2. Aufl., Leipzig 1879, p. 465. Ebenda, p. 473, Angaben über neuere Litteratur.

für irgend eine Lage von P die entsprechenden Lagen des „Poles“ und des „Wendepoles“ (IV 3, Nr. 8) gefunden werden können;

2) für den Fall, dass man die Bewegung von P aus einfacheren Bewegungen zusammensetzen und dann die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von P nach den allgemeinen Regeln der Kinematik (IV 3, Nr. **10**) als Resultierende der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen jener einfacheren Bewegungen finden kann. Die Betrachtungen von *Bresse* hat *H. Résal*[97]) auf räumliche Systeme ausgedehnt.

18. Deviation. Es sei P ein gewöhnlicher Punkt einer Linie l, in welchem deren Krümmung nicht gleich Null ist. Parallel zur Tangente von l in P sei eine Sehne gezogen, die zwei zu P benachbarte Punkte von l verbindet, und P mit dem Mittelpunkt dieser Sehne durch eine Gerade verbunden.

Wenn dann die Sehne der Tangente unbegrenzt nahe rückt, so nähert sich die erwähnte Verbindungsgerade einer festen Grenzlage. *A. Transon*[98]) hat diese Grenzlage die *Deviationsaxe* und den Winkel, welchen sie mit der Normale bildet, die *Deviation* von l im Punkte P_0 genannt und zugleich analytische Ausdrücke für diese Deviation angegeben und gezeigt, wie man mit Hülfe der Deviation erstens diejenige Parabel, welche mit l in P eine Berührung dritter Ordnung und zweitens denjenigen Kegelschnitt, welcher mit l in P eine Berührung vierter Ordnung hat, finden kann.

19. Gestalt einer Linie oder Fläche in der Nähe eines singulären Punktes.

A. Ist P_0 ein singulärer Punkt einer ebenen Linie l und die letztere in der Nähe von P_0 durch zwei Gleichungen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t)$$

in der Weise darstellbar, dass jedem Punkte von l nur *ein* Wert von t entspricht, und dass $\varphi(t)$, $\chi(t)$ für den zu P_0 gehörenden Wert von t den Charakter ganzer Funktionen (II B 1, Nr. 7) haben, so kann man, wie *Halphen*[99]) bemerkt hat, die Linie l in der Nähe von P_0 immer als die Orthogonalprojektion einer gewundenen Linie l ansehen, auf welcher der P_0 entsprechende Punkt ein gewöhnlicher ist — nämlich derjenigen Linie, die durch die Gleichungen:

---

97) *H. Résal,* J. éc. polyt. 21, cah. 37 (1858), p. 227 ff.

98) *A. Transon,* J. de math. (1) 6 (1841), p. 191—197. Vgl. auch *Salmon-Fiedler,* Höh. ebene Kurven, 2. Aufl., p. 468 f.

99) *G. Halphen,* Par. Mém. prés. par div. sav. (2) 26 (1879), Nr. 2, p. 19 ff.

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = t$$

dargestellt wird.

Durch geeignete Annahme der Koordinatenaxen — nämlich dadurch, dass man den Anfangspunkt nach P_0 verlegt und die Tangente in P_0 (Nr. 5) als Abscissenaxe nimmt — und durch passende Wahl der Hülfsveränderlichen t kann man ferner stets erreichen, dass dem Punkt P_0 der Wert $t = 0$ entspricht, und dass die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ für alle Werte von t, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, die Form haben:

$$\varphi(t) = t^m \cdot \mathfrak{P}_1(t), \quad \chi(t) = t^n \cdot \mathfrak{P}_2(t),$$

wobei $\mathfrak{P}_1(t)$, $\mathfrak{P}_2(t)$ konvergente und für $t = 0$ nicht verschwindende Potenzreihen von t bezeichnen, und m und n ganze positive Zahlen bedeuten, welche die Ungleichung:

$$m < n$$

erfüllen. Wenn dann:

1) m ungerade, n gerade ist, so liegt l in der Nähe von P_0 auf derselben Seite der Tangente und auf beiden Seiten der Normale. Eigentümlichkeiten des Verlaufes treten erst bei der Betrachtung der Krümmungsverhältnisse (indem die Krümmung gleich Null oder unendlich gross wird) oder solcher Eigenschaften von l hervor, welche durch die Beschaffenheit der Ableitungen von höherer als der zweiten Ordnung der Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ bedingt werden. Wenn:

2) m und n ungerade sind, so liegt l auf beiden Seiten sowohl der Tangente als der Normale, hat also in der Nähe von P_0 einen ähnlichen Verlauf wie in der Nähe eines Wendepunktes. Wenn:

3) m gerade, n aber ungerade ist, so liegt l in der Nähe von P_0 auf beiden Seiten der Tangente, aber nur auf einer Seite der Normale. Der Punkt P_0 heisst in diesem Falle eine *Spitze erster Art*[100]). Wenn endlich:

4) m und n beide gerade sind, so liegt l in der Nähe von P_0 sowohl auf derselben Seite der Tangente als auch auf derselben Seite der Normale. Der Punkt P_0 heisst in diesem Fall eine *Spitze zweiter Art* oder eine *Schnabelspitze.*

---

100) Geschichtliche Angaben über das erste Auftreten dieses Begriffes sowie desjenigen der Schnabelspitze machen *M. Cantor,* Vorles. üb. Geschichte der Math. 3, Leipzig 1898, p. 239, 770 f. u. 794—796, sowie *A. Brill* u. *M. Noether* in ihrem Bericht, Deutsche Math.-Vereinig. Jahresber. 3 (1892/93), p. 125 ff. u. 133 ff. Eine durch zahlreiche Figuren unterstützte Aufzählung der möglichen Singularitäten ebener Linien, welche zugleich auf die Eigentümlichkeiten der Krümmung Rücksicht nimmt, findet sich in *Ch. Wiener,* Lehrb. d. darst. Geom. 1, Leipzig 1884, p. 204—208.

Die beiden erwähnten Arten von Spitzen werden auch als *Rückkehrpunkte* bezeichnet. Zur Unterscheidung der nämlichen vier Fälle führt die Überlegung, dass ein auf l stetig fortschreitender und durch P_0 gehender Punkt im Augenblick des Durchgangs seine Bewegungsrichtung, und dass gleichzeitig die in ihm an l gelegte Tangente ihre Drehungsrichtung entweder beibehalten oder umkehren kann. Litteraturangaben finden sich in Fussn. 175.

B. Wenn eine ebene Linie in der Nähe eines singulären Punktes P_0; x_0, y_0 durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ dargestellt werden kann, wo $F(x, y)$ eine Funktion bedeutet, die an der Stelle x_0, y_0 den Charakter einer ganzen Funktion hat, so nennt man den Punkt P_0 einen *Doppelpunkt, dreifachen Punkt, . . .,* je nachdem die Entwickelung der Funktion $F(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$ nach steigenden Potenzen von ξ und η mit Gliedern zweiter, dritter, . . . Ordnung beginnt[101]). Wenn ferner $F(x_0, y_0 + \eta)$ nicht für *jeden* Wert von η gleich Null ist, was ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf, und n den Exponenten des Anfangsgliedes in der Entwickelung dieser Funktion nach steigenden Potenzen von η bezeichnet, so kann die Funktion $F(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$, wie *K. Weierstrass*[102]) gezeigt hat, immer in ein Produkt zerspalten werden von der Form:

$$[\eta^n + f_1(\xi)\eta^{n-1} + f_2(\xi)\eta^{n-2} + \cdots + f_n(\xi)] \cdot G(\xi, \eta),$$

wo $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)$ Potenzreihen von ξ bedeuten, die keine konstanten Glieder enthalten und konvergieren, sobald $|\xi|$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt, während $G(\xi, \eta)$ eine für $\xi = \eta = 0$ nicht mehr verschwindende Funktion bedeutet. Die Gleichung:

$$F(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = 0$$

kann daher, solange es sich nur um die Betrachtung solcher Wertepaare ξ, η handelt, die in einer hinreichend engen Umgebung der Nullstelle liegen, durch die Gleichung:

$$\eta^n + f_1(\xi)\eta^{n-1} + f_2(\xi)\eta^{n-2} + \cdots + f_n(\xi) = 0$$

ersetzt werden, die in Bezug auf η nur von *endlichem* Grade ist. Deswegen bleibt für singuläre Punkte der gegenwärtig in Rede stehenden Art, *auch wenn $F(x, y)$ transcendent ist,* der von *V. Puiseux*[103]) zu-

---

101) Vgl. *L. Euler,* Introductio in analysin infinitorum 2, Lausannae 1748, p. 162—163.

102) *K. Weierstrass,* Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, autographiert, Berlin 1879 = Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, p. 105 = Math. Werke 2, Berlin 1895, p. 135, Nr. 1. Vgl. auch II B 1, Nr. 45.

103) *V. Puiseux,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 384. — Andere Beweise des

nächst nur für singuläre Punkte *algebraischer* Linien bewiesene Satz bestehen, dass die Gesamtheit aller in einer gewissen Nähe eines solchen Punktes gelegenen Punkte der Linie (einschliesslich der imaginären Punkte) stets durch eine endliche Anzahl von Gleichungspaaren von der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t)$$

dargestellt werden kann, in denen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ Potenzreihen bedeuten, die innerhalb eines gewissen Bereiches konvergieren und für $t = 0$ den Koordinaten des betrachteten singulären Punktes gleich werden.

Ebenso kann auch ein Teil der Untersuchungen über die Gestalt einer ebenen algebraischen Linie in der Nähe eines singulären Punktes[104]) sowie über die Frage, ob und in welchem Sinne man eine verwickeltere Singularität einer solchen Linie als gleichwertig mit mehreren einfacheren Singularitäten ansehen und wie man dieselbe durch Zusammenrücken einfacherer Singularitäten erzeugen könne[105]), auf transcendente Linien übertragen werden.

---

gleichen Satzes oder andere Verfahrungsweisen zur Herstellung der in demselben erwähnten Reihenentwickelungen gaben *M. Hamburger,* Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 461; *L. Koenigsberger*, Ellipt. Funktionen 1, Leipzig 1874, p. 182; *O. Stolz,* Math. Ann. 8 (1875), p. 415; *M. Noether,* Math. Ann. 9 (1876), p. 166, und *O. Biermann,* Theorie der analyt. Funktionen, Leipzig 1887, p. 215 (nach Vorlesungen von *K. Weierstrass*); *A. Brill,* Münch. Ber. 21 (1891), p. 207, und *K. Weierstrass,* Math. Werke 4, Vorl. üb. d. Theorie der *Abel*'schen Transcendenten, bearb. v. *G. Hettner* u. *J. Knoblauch,* Berlin 1902, p. 19—32. Vgl. auch *A. Brill* u. *M. Noether,* Deutsche Math.-Vereinig. Jahresber. 3 (1892/93), p. 367—402, u. II B 2, Nr. 2, 3.

104) Mit der Ermittelung der Gestalt einer algebraischen Linie in der Nähe eines singulären Punktes haben sich bereits *J. Newton, J. P. de Gua de Malves, L. Euler, G. Cramer* beschäftigt; vgl. *M. Cantor,* Vorles. üb. Gesch. d. Math. 3, Leipzig 1898, p. 102—103, 770, 784, 810, u. *A. Brill* u. *M. Noether,* a. a. O. p. 116—149. Auch *J. Plücker* hat, Theorie d. alg. Kurven, Bonn 1839, p. 158—179, eingehende Untersuchungen über die verschiedenen möglichen Gestalten einer algebraischen Linie in der Nähe eines einfachen Punktes, eines Doppelpunktes und eines dreifachen Punktes angestellt. Den Fall eines Doppelpunktes hat *O. Stolz,* Math. Ann. 8 (1875), p. 429 ff. vollständig erledigt und zugleich gezeigt, welche verschiedenen Fälle bei der Betrachtung eines i-fachen Punktes zu unterscheiden sind.

105) Vgl. *A. Cayley,* Quart. J. of math. 7 (1866), p. 212 = Coll. math. pap. 5, p. 520 u. 619; *O. Stolz,* Math. Ann. 8 (1875), p. 442 f.; *M. Noether,* Math. Ann. 9 (1876), p. 166; *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 10 (1876), p. 210; *G. Halphen,* Paris Mémoires prés. par divers savants (2) 26 (1879), Nr. 2; *A. Brill,* Math. Ann. 16 (1880), p. 348. Für ebene und räumliche Kurven sind die einschlägigen Fragen mit algebraischen Hülfsmitteln, unter Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse, von *Fr. Meyer* untersucht worden, Math. Ann. 38 (1891), p. 369; 43 (1893), p. 286; Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 229, 331.

C. Die Gestalt einer gewundenen Linie in der Nähe eines singulären Punktes ist aus den Gestalten ihrer rechtwinkligen Projektionen auf geeignet gewählte Ebenen zu erschliessen. Für den Fall, dass eine Parameterdarstellung der betrachteten Linie gegeben ist, enthält Fussn. 175 zu Nr. 29 nähere Angaben.

D. Ist eine Fläche $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

zwischen den Koordinaten x, y, z gegeben und sind x_0, y_0, z_0 die Koordinaten eines singulären Punktes P_0 von $\mathfrak{F}$, welcher jedoch so beschaffen ist, dass die Funktion $F(x, y, z)$ an der Stelle x_0, y_0, z_0 den Charakter einer ganzen Funktion hat, so stimmt die Gestalt von $\mathfrak{F}$ in der Nähe von P_0 in erster Annäherung mit der Gestalt desjenigen algebraischen Kegels überein, dessen Gleichung man erhält, indem man die Summe der Glieder niedrigster Dimension in der Entwickelung der Funktion $F(x, y, z)$ nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ gleich Null setzt[106]).

Sind in der eben erwähnten Entwickelung Glieder zweiter Dimension wirklich vorhanden, so heisst P_0 ein *Doppelpunkt* (*Knotenpunkt*) von $\mathfrak{F}$; und wenn sich die Summe der Glieder zweiter Dimension in zwei lineare Faktoren zerspalten lässt, so heisst P_0 ein *biplanarer* oder ein *uniplanarer Doppelpunkt*, je nachdem diese Faktoren, von einem konstanten Faktor abgesehen, verschieden oder einander gleich sind.

Von der Gestalt der Fläche in der Nähe eines solchen Punktes gewinnt man eine genauere Vorstellung erst durch die Betrachtung derjenigen der gegebenen Fläche sich anschmiegenden algebraischen Fläche dritter[107]) oder höherer Ordnung, deren Gleichung man erhält, indem man zu den Gliedern zweiter Ordnung in der erwähnten Entwickelung von $F(x, y, z)$ noch die Glieder dritter Ordnung und je nach den Umständen auch noch Glieder höherer Ordnung[108]) hinzu-

106) Wie *C. W. M. Black,* Havard Thesis 1901 = Amer. Ac. Arts Sci. Proc. 37 (1902), p. 281, bewiesen hat, ist für die einem singulären Punkt der in Rede stehenden Art benachbarten Flächenteile immer eine Parameterdarstellung durch eine *endliche* Anzahl von Gleichungssystemen möglich. Vgl. auch II B 1, Nr. 46, Fussn. 254, u. II B 2, Nr. 55. — Über die Unterscheidung gewöhnlicher und spezieller $\varkappa$-facher Punkte einer algebraischen Fläche und die Entstehung der letzteren aus den ersteren vgl. *K. Rohn,* Leipz. Ber. 36 (1884), p. 1. — Modelle für die verschiedenen Typen konischer Knotenpunkte hat *A. Sucharda* angefertigt. Vgl. Deutsche Mathem.-Ver., Katalog math. u. math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente, hsg. v. *W. Dyck*, München 1892, Nr. 228, p. 299, sowie Verlag von Modellen für d. höh. math. Unterricht von *L. Brill* in Darmstadt, Nachtrag zur 17. Serie, 1898, Nr. 7.

107) Vgl. *F. Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 556.

108) Vgl. *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 9 (1876), p. 321.

fügt und die Summe gleich Null setzt. Für algebraische Flächen hat *K. Rohn*[109]) eine vollständige Aufzählung der verschiedenen möglichen Gestalten in der Nähe eines biplanaren oder uniplanaren Knotens gegeben.

20. Traktorien. Eine Linie l heisst eine *Zuglinie* (*Traktorie, Traktrix*) einer gegebenen Linie d (Direktrix), wenn jede Tangente von l die Linie d in einem Punkte trifft, der von dem Berührungspunkt der Tangente einen gegebenen konstanten Abstand hat.

Als *Traktorie von Huygens* bezeichnet man insbesondere die Zuglinie einer Geraden. Bei geeigneter Wahl der Koordinatenaxen ist diese besondere Zuglinie darstellbar durch die Gleichung[110]):

$$x = a \cdot \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2},$$

oder auch durch die Gleichungen:

$$x = a \left[\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\varphi \right], \quad y = a \cos\varphi,$$

wo a das konstante Stück der Tangente zwischen Berührungspunkt und Direktrix bedeutet.

Die Traktorie von *Huygens* kann ferner auch erklärt werden:

A) als die orthogonale Trajektorie einer Schar kongruenter Kreise vom Radius a, deren Mittelpunkte auf der Direktrix liegen[111]);

B) als die Evolvente einer Kettenlinie[112]).

Zur Lehre von den Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses (III D 5) steht sie, wie *J. Liouville*[113]) bemerkt hat, dadurch in Beziehung, dass die eine der drei nach *U. Dini*[114]) möglichen Formen, welche eine zu jener Familie gehörende Umdrehungsfläche haben kann, durch die Umdrehung einer *Huygens*'schen Traktrix um ihre Direktrix entsteht.

Die Bestimmung einer Zuglinie erfordert im allgemeinen die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung[115]).

---

109) *K. Rohn*, Math. Ann. 22 (1883), p. 124. — Angaben über die gestaltlichen Verhältnisse in speziellen Fällen macht auch *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 10 (1876), p. 468 ff. — Die verschiedenen Stellen der Schriften von *A. Cayley*, welche singuläre Punkte von Kurven oder Flächen betreffen, sind in Coll. math. papers, Index, Cambridge 1898, p. 130, zusammengestellt.

110) *L. A. Sohncke*'s Samml. v. Aufgaben aus d. Diff.- u. Int.-Rechn., hrsg. v. *A. Amstein*, 1 (4. Aufl.), Halle 1875, p. 207.

111) Ebd. 2 (1877), p. 202.

112) Ebd. 1, p. 208 oder *Salmon-Fiedler*, Höh. eb. Kurven, 2. Aufl., p. 377.

113) Note IV zu *Monge*, Application de l'analyse, 5. éd., p. 597—600.

114) *U. Dini*, Giorn. di mat. 3 (1865), p. 241 ff.

115) Näheres und geschichtliche Angaben enthält der Artikel Tractoria des mathematischen Wörterbuchs von *G. S. Klügel*, 5[1], Leipzig 1831, p. 78.

II. Scharen von Linien und Flächen.

21. Einhüllende von Linien- und Flächenscharen. Eine Mehrheit in ein- und derselben Ebene liegender Linien heisst eine *einfach unendliche ebene Linienschar* (*Schar 1. Stufe, Büschel*), wenn sie sich durch eine Gleichung von der Form:

$$(1) \qquad F(x, y, c) = 0$$

oder auch durch ein System von zwei Gleichungen von der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t, c), \\ y = \chi(t, c) \end{cases}$$

in der Weise darstellen lässt, dass man jedesmal die Darstellung einer der Mehrheit angehörenden Linie erhält, wenn man in (1) beziehentlich (2) für den „Parameter" c irgend einen festen Wert einsetzt, der höchstens der Einschränkung unterliegt, einem gegebenen begrenzten Intervall anzugehören, und nach und nach die Darstellungen aller der Mehrheit angehörenden Linien, und zwar im allgemeinen jede nur einmal, wenn man c dieses Intervall ganz durchlaufen lässt.

Wenn ferner in einer Ebene eine Mehrheit von Linien in ähnlicher Weise wie eben gegeben ist, nur mit dem Unterschiede, dass bei ihrer analytischen Darstellung *zwei* unabhängig von einander veränderliche Parameter auftreten, und verschiedenen Wertsystemen dieser Parameter im allgemeinen auch verschiedene Linien der gegebenen Mehrheit entsprechen, so gebraucht man zur Bezeichnung der Mehrheit den Ausdruck *zweifach unendliche ebene Linienschar* (*Schar 2. Stufe, Netz, Scharschar, Bündel*) u. s. f..

Ähnliche Erklärungen gelten für die Begriffe *Schar von Raumkurven* und *Flächenschar*. Eine zweifach unendliche Schar von Raumkurven wird nach dem Vorgang von *J. Plücker* häufig eine *Kurvenkongruenz* genannt.

Zwei Gebilde einer Schar heissen *benachbart*, wenn sie benachbarten Werten des oder der Parameter entsprechen.

Wenn eine einfach unendliche ebene Linienschar so beschaffen ist, dass jede ihr angehörende Linie von einer hinreichend nahe benachbarten Linie der gleichen Schar in einem oder in mehreren Punkten geschnitten wird, welche sich bei unbegrenzter Annäherung der benachbarten an die ursprünglich betrachtete Linie festen Grenzlagen nähern, so nennt man die Gesamtheit aller dieser Grenzlagen die *Einhüllende* oder die *Umhüllungslinie* oder die *Enveloppe*[116]) oder die

116) Diese Bezeichnung rührt von *G. Monge* her (vgl. Application de l'anal., 5. éd., p. 30 f.). Der Begriff selbst ist älter. In manchen neueren Arbeiten (vgl.

Hüllbahn der gegebenen Linienschar. Die letztere Bezeichnung ist namentlich dann gebräuchlich, wenn die gegebene Schar aus den verschiedenen Lagen einer bewegten *starren* Linie besteht.

Wenn eine ebene Linienschar durch eine Gleichung:

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

zwischen den Koordinaten x, y und einem Parameter c gegeben ist, und die einem speziellen Wert c_0 des Parameters c entsprechende Linie von der zu einem benachbarten Wert $c_0 + \gamma$ dieses Parameters gehörenden Linie der Schar in einem Punkte geschnitten wird, welcher sich bei verschwindendem γ unbegrenzt einer festen Grenzlage nähert, so erfüllen die Koordinaten x_0, y_0 dieser Grenzlage stets die Gleichungen:

$$F(x_0, y_0, c_0) = 0 \quad \text{und} \quad F_c(x_0, y_0, c_0) = 0.$$

Ist umgekehrt x_0, y_0, c_0 ein Wertsystem, welches die beiden vorstehenden Gleichungen erfüllt, und für welches die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ F_{cx} & F_{cy} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so haben die den Parametern c_0 und $c_0 + \gamma$ entsprechenden Linien der Schar (1) für jeden in einer gewissen Nähe von Null gelegenen Wert von γ einen in der Nähe des Punktes x_0, y_0 liegenden Schnittpunkt, welcher sich bei verschwindendem γ dem Punkte x_0, y_0 unbegrenzt annähert.

Aus diesen beiden Sätzen folgt:

Man erhält die Einhüllende einer Linienschar, welche durch eine Gleichung:

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

zwischen den Koordinaten x, y und einem Parameter c gegeben ist, indem man die Gleichung (1) mit der aus ihr durch Differentiation nach c hervorgehenden Gleichung:

$$F_c(x, y, c) = 0 \tag{3}$$

verbindet und aus beiden entweder c eliminiert, oder x und y als Funktionen des Parameters c berechnet[117]). Dabei bedürfen jedoch

---

II A 4 a, Nr. 22) wird der Begriff *Enveloppe* enger gefasst, indem dieses Wort nur zur Bezeichnung derjenigen Zweige der im Text erwähnten Gesamtheit benutzt wird, die übrig bleiben, wenn man alle etwa dazugehörenden geometrischen Orte von Spitzen und mehrfachen Punkten der Linien der ursprünglich betrachteten Schar ausscheidet (III D 8).

117) Beispiele für die Anwendung dieses Satzes, Umformungen desselben für den Fall, dass die betrachtete Linienschar in verwickelterer Weise gegeben ist, und eine Erweiterung des Begriffs der Einhüllenden giebt *Salmon-Fiedler,*

diejenigen die Gleichungen (1) und (3) erfüllenden Wertsysteme x, y, c, für welche die Determinante D gleich Null ist, einer besonderen Untersuchung. Der hier erwähnte und andere Ausnahmefälle sind unter Angabe von Beispielen von *G. Peano* genauer erörtert worden[118]).

Wenn für ein die Gleichungen (1) und (3) erfüllendes Wertsystem x_0, y_0, c_0 der Veränderlichen x, y, c sowohl die Determinante D als die partielle Ableitung F_{cc} von Null verschieden ist, so hat die Einhüllende der durch die Gleichung (1) dargestellten Linienschar im Punkte x_0, y_0 eine bestimmte Tangente, und diese stimmt mit der Tangente der zu dem Parameterwert c_0 gehörenden Linie der Schar im Punkte x_0, y_0 überein. Hieraus folgt: Wenn eine Linienschar ein allgemeines Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung darstellt, so liefert die Einhüllende der Schar im allgemeinen eine „singuläre Lösung“ der Differentialgleichung[119]).

Die Einhüllende einer ebenen Schar von *geraden* Linien hat im allgemeinen jede dieser Geraden zur Tangente[120]). Die Einhüllende aller Normalen einer ebenen Linie l stimmt mit der Evolute von l überein.

In der Lehre von den *Einhüllenden der Flächenscharen* sind zwei verschiedene Arten von Einhüllenden zu unterscheiden, je nachdem man es mit einer einfach- oder mit einer zweifach unendlichen Flächenschar zu thun hat.

Wenn eine *einfach* unendliche Flächenschar so beschaffen ist, dass jede ihr angehörende Fläche von einer hinreichend nahe benachbarten Fläche der Schar in einer Linie geschnitten wird, welche sich bei unbegrenzter Annäherung der benachbarten an die ursprünglich betrachtete Fläche einer festen Grenzlage nähert, so versteht man unter der *Einhüllenden* oder der *Umhüllungsfläche* oder der *Enveloppe*

Höhere ebene Kurven, 2. Aufl., p. 86—95. — Unter der Voraussetzung, dass für die Eingehüllten eine *Parameterdarstellung* gegeben sei, hat *O. Biermann*, Brünn, Festschr. der Techn. Hochschule 1899, die Lehre von den Einhüllenden der Linien- und Flächenscharen ausführlich dargestellt. Der gleiche Gegenstand ist von *E. Czuber*, Archiv Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 113, auf anderem Wege behandelt worden.

118) *G. Peano*, Applicazioni geometriche, p. 311—313 = Lezioni di analisi 2, § 378, p. 193—195.

119) Vgl. II A 4 a, Nr. **22**. — Eine eingehende, mit zahlreichen litterarischen Nachweisen verbundene Darstellung der Ausdehnung dieses Satzes auf Flächenscharen und partielle Differentialgleichungen geben *S. Lie* und *G. Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896, p. 482—535. Vgl. auch II A 5, Nr. **33** und III D 7.

120) Hülfsmittel zur Konstruktion des Berührungspunktes giebt *L. Burmester*, Lehrb. d. Kinematik 1, Leipzig 1888, p. 64—66, 84—86, 92—93.

der Schar die Gesamtheit der erwähnten Grenzlagen. Jede einzelne dieser letzteren heisst eine *Charakteristik* der Einhüllenden[121]).

Wenn eine Flächenschar durch eine Gleichung:

$$F(x, y, z, c) = 0 \tag{4}$$

zwischen den Koordinaten x, y, z und einem Parameter c gegeben ist, und die einem speziellen Wert c_0 von c entsprechende Fläche von der zu einem benachbarten Wert $c_0 + \gamma$ des Parameters gehörenden Fläche der Schar in einer Linie geschnitten wird, welche sich bei verschwindendem γ unbegrenzt einer festen Grenzlage nähert, so erfüllen die Koordinaten x_0, y_0, z_0 eines jeden Punktes dieser Grenzlage die Gleichungen:

$$F(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0 \quad \text{und} \quad F_c(x_0, y_0, z_0, c_0) = 0.$$

Ist umgekehrt x_0, y_0, z_0, c_0 ein Wertsystem, welches die beiden vorstehenden Gleichungen erfüllt, und für welches die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} F_x & F_y & F_z \\ F_{cx} & F_{cy} & F_{cz} \end{matrix} \right\|$$

nicht sämtlich gleich Null sind, so haben die den Parameterwerten c_0 und $c_0 + \gamma$ entsprechenden Flächen der Schar (4) für jeden in einer gewissen Nähe von Null liegenden Wert von γ eine Schnittlinie, welche sich bei verschwindendem γ einer festen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 hindurchgehenden Linie unbegrenzt annähert.

Aus diesen beiden Sätzen folgt:

Man erhält die Einhüllende einer Flächenschar, welche durch eine Gleichung:

$$F(x, y, z, c) = 0 \tag{4}$$

zwischen den Koordinaten x, y, z und einem Parameter c gegeben ist, indem man die Gleichung (4) mit der aus ihr durch Differentiation nach c hervorgehenden Gleichung:

$$F_c(x, y, z, c) = 0 \tag{5}$$

verbindet und aus beiden c eliminiert[122]). Dabei bedürfen jedoch diejenigen, die Gleichungen (4) und (5) erfüllenden Wertsysteme x, y, z, c, für welche die Unterdeterminanten der oben angegebenen Matrix sämtlich gleich Null sind, einer besonderen Untersuchung.

Wenn für ein die Gleichungen (4), (5) erfüllendes Wertsystem

---

121) Nach *G. Monge*, Application, 5. éd., p. 33.

122) Der Fall, dass die Flächenschar in verwickelterer Weise gegeben ist, wird bei *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes 2, 3. Aufl. 1880, p. 270 ff. unter Behandlung von Beispielen erörtert.

x_0, y_0, z_0, c_0 sowohl die Ableitung F_{cc} als wenigstens eine der erwähnten Unterdeterminanten von Null verschieden ist, so hat die Einhüllende der Flächenschar (4) im Punkte x_0, y_0, z_0 eine bestimmte Tangentenebene und diese stimmt mit der Tangentenebene der zu dem Parameterwert c_0 gehörenden Fläche der Schar im nämlichen Punkte überein.

Kann man die Gleichungen (4), (5) und die Gleichung $F_{cc} = 0$ dadurch gleichzeitig befriedigen, dass man für x, y, z passend gewählte Funktionen $\varphi(c), \chi(c), \psi(c)$ von c einsetzt, so stellen die drei Gleichungen:

$$x = \varphi(c), \quad y = \chi(c), \quad z = \psi(c)$$

im allgemeinen eine singuläre Linie der die Schar (4) einhüllenden Fläche dar. Diese singuläre Linie heisst nach *G. Monge*[123]) die *Rückkehrkante* oder die *Gratlinie* der Einhüllenden der Schar (4). Sie enthält die Gesamtheit der Grenzlagen der Schnittpunkte unendlich nahe benachbarter Charakteristiken und wird im allgemeinen in jedem ihrer Punkte von einer Charakteristik berührt[124]).

Wenn eine *zweifach* unendliche Flächenschar durch eine Gleichung:

$$(6) \qquad F(x, y, z, c, c') = 0$$

zwischen den Koordinaten x, y, z und zwei Parametern c, c' gegeben ist, und die zu einem Paar spezieller Werte c_0, c_0' der Parameter gehörende Fläche $\mathfrak{F}_0$ von einer benachbarten, den Parameterwerten $c_0 + \gamma$, $c_0' + \gamma'$ entsprechenden Fläche geschnitten wird, so nähert sich die Schnittlinie im allgemeinen verschiedenen Grenzlagen, wenn γ und γ' in verschiedenen Verhältnissen zu einander gleichzeitig unendlich klein werden. Aber im allgemeinen giebt es auf $\mathfrak{F}_0$ einen oder mehrere feste Punkte, durch welche alle diese Grenzlagen hindurchgehen. Die Gesamtheit aller Punkte, welche sich so für die einzelnen Flächen der Schar (6) ergeben, bildet im allgemeinen eine Fläche, welche alle Flächen der gegebenen Schar berührt und die *Einhüllende* (Enveloppe) dieser Schar genannt wird. Die Gleichung dieser Einhüllenden ergiebt sich im allgemeinen durch Elimination der Parameter c, c' aus den drei Gleichungen:

$$F = 0, \quad F_c = 0, \quad F_{c'} = 0.^{125})$$

22. Brennlinien. Wenn in einer Ebene eine Linie l und eine

---

123) *G. Monge,* Application, 5. éd., p. 34.

124) Vgl. *G. Peano,* Applicazioni geometriche, p. 315.

125) Vgl. *G. Peano,* Applicazioni geometriche, p. 315—318; *E. Picard,* Traité d'anal. 1, Paris 1891, p. 291—292.

Schar S von Strahlen gegeben sind, welche l schneiden, so kann man sich:

1) vorstellen, dass die zu S gehörenden Strahlen von l zurückgeworfen (reflektiert) werden, und nennt dann die Einhüllende der zurückgeworfenen Strahlen die *katakaustische Linie* oder die *Katakaustik* von l für S als einfallende Strahlenschar; oder:

2) annehmen, dass l die Trennungslinie zweier Gebiete bildet, welche verschiedene aber konstante optische Dichtigkeiten haben, und dass die zu S gehörenden Strahlen bei ihrem Durchgang durch l eine Brechung erleiden, bei welcher das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels einen vorgeschriebenen konstanten Wert n hat. In diesem letzteren Falle nennt man die Einhüllende der an l gebrochenen Strahlen die *diakaustische Linie* oder die *Diakaustik* von l für S als einfallende Strahlenschar und für n als Brechungsexponent.

Katakaustische und diakaustische Linien fasst man unter dem gemeinsamen Namen *kaustische Linien* oder *Brennlinien* zusammen[126]).

In manchen Fällen erweisen sich verwickelte Brennlinien als Evoluten anderer sehr viel einfacherer Linien. Daher ist bei der Ermittelung von Brennlinien ein Verfahren nicht ohne praktischen Wert, welches von *A. Quetelet*[127]) angegeben wurde, und darin besteht, dass

---

126) Die Lehre von den Brennlinien hat *A. Plana*, Bruxelles Observ. Corresp., publ. par *A. Quetelet*, 7 (1832), p. 13 u. 85, eingehend behandelt. Eine Darstellung dieser Lehre mit zahlreichen Beispielen und Angaben über die ältere Litteratur findet sich auch in *G. S. Klügel*, Math. Wörterbuch 1, Leipzig 1803, Art. „Brennlinie", p. 344; „Catacaustica", p. 400; „Diacaustica", p. 752, und in den Supplementen hierzu, hrsg. v. *J. A. Grunert*, 1. Abt., Leipzig 1833, Art. „Caustische Flächen und Linien", p. 349. — Über den schon bei *L. Malus*, J. éc. polyt., cah. 14 (1808), p. 5 u. 86, vorkommenden Begriff *Brennfläche* bei einem Strahlensystem im Raume vgl. *E. E. Kummer*, J. f. Math. 57 (1860), p. 189, sowie III C 9 und III D 9. Für Strahlen, die auf ein und derselben Fläche $\mathfrak{F}$ senkrecht stehen, fällt dieser Begriff mit dem der Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte von $\mathfrak{F}$ zusammen.

Die für die Beurteilung der Wirkungsweise centrierter dioptrischer Systeme wichtige Brennfläche der ursprünglich von einem leuchtenden Punkt ausserhalb der Axe eines solchen Systems ausgegangenen und dann durch dasselbe gebrochenen Strahlen hat *L. v. Seidel*, Münch. Anz. 1857, und Berl. Monatsber. 1862, p. 695, bestimmt. Die Ableitung ihrer Gleichungen hat *S. Finsterwalder*, Münch. Abh. 17 (1892), p. 531, gegeben auf Grund von Formeln, die *L. v. Seidel*, Astron. Nachr. Bd. 43 (1856), p. 289, entwickelt hatte.

127) *A. Quetelet*, Bruxelles Nouv. mém. 3 (1826), p. 89; 4 (1827), p. 81. *D. Gergonne* hat, Ann. de math. 16 (1826), p. 1 und 307, die Betrachtungen von *Quetelet* auf den Raum ausgedehnt und dadurch bewiesen, dass Strahlen, welche ursprünglich die Eigenschaft hatten, auf ein und derselben Fläche senkrecht

man die Bestimmung einer Brennlinie auf die der Einhüllenden einer Schar von Kreisen zurückführt. Dies geschieht, wenn es sich um eine Brennlinie durch Zurückwerfung handelt, durch folgende Überlegungen:

1) Kennt man eine Linie l'', welche die an l zurückgeworfenen Strahlen oder deren Verlängerungen senkrecht schneidet, so ist die Brennlinie nichts anderes als die Evolute von l''.

2) Kennt man eine Linie l', welche die einfallenden Strahlen oder deren Verlängerungen senkrecht schneidet, so kann man aus ihr, indem man jeden Punkt von l' an derjenigen Tangente von l spiegelt, deren Berührungspunkt mit ihm auf dem gleichen einfallenden Strahle liegt, eine Linie l'' ableiten, welche die zurückgeworfenen Strahlen oder deren Verlängerungen senkrecht schneidet. Die gleiche Linie l'' kann auch noch auf andere Weise gefunden werden. Beschreibt man nämlich um jeden Punkt von l einen Kreis, welcher l' berührt, so stimmt diejenige Linie, welche zusammen mit l' die Einhüllende dieser Schar von Kreisen bildet, mit l'' überein.

So gelangt man zu folgendem Satze:

Die Katakaustik einer beliebigen ebenen Linie l für eine Schar von Strahlen, welche auf einer gleichfalls beliebigen, mit l in einer Ebene liegenden Linie l' senkrecht stehen, ist die Evolute des von l' verschiedenen Zweiges der Einhüllenden aller Kreise, deren Mittelpunkte auf l liegen, und welche l' berühren.

Ähnliche Überlegungen sind auch auf den Fall der Brechung anwendbar und führen zu folgendem Ergebnis:

Die Diakaustik einer beliebigen ebenen Linie l für ein gegebenes Brechungsverhältnis und für eine Schar von Strahlen, welche auf einer gleichfalls beliebigen mit l in einer Ebene liegenden Linie l' senkrecht stehen, ist die Evolute des einen Zweiges der Einhüllenden aller Kreise, deren Mittelpunkte auf l liegen und deren Radien zu den Abständen ihrer Mittelpunkte von l' in dem konstanten Verhältnis des Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels stehen.

Wenn die einfallenden Strahlen sich sämtlich in einem Punkte P schneiden, so kann man für die in den vorstehenden Sätzen erwähnte Linie l' einen beliebigen um P als Mittelpunkt beschriebenen Kreis nehmen, insbesondere auch den Kreis vom Radius Null, d. h. den Punkt P selbst.

Wenn dies letztere geschieht, so entsteht der im ersten der

---

zu stehen, diese Eigenschaft auch nach jeder Zurückwerfung an einer spiegelnden Fläche, sowie nach jeder Brechung an der Trennungsfläche zweier einfach brechenden homogenen Medien behalten. Vgl. auch *G. Darboux,* Leçons sur la théorie gén. des surf. 2, p. 278 ff.

obigen Sätze erwähnte Zweig der Einhüllenden aus der Fusspunktkurve von l für den Punkt P als Pol dadurch, dass man diese Fusspunktkurve von P als Ähnlichkeitspunkt aus im Verhältnis 2 : 1 vergrössert[128]).

Die Brennlinien des Kreises durch Zurückwerfung und Brechung für den Fall, dass die einfallenden Strahlen von ein- und demselben eigentlichen oder unendlich fernen Punkte ausgehen, hat *A. Cayley*[129]) eingehend behandelt. Sorgfältige Zeichnungen von Brennlinien haben *F. Engel* und *K. Schellbach*[130]) veröffentlicht.

23. Trajektorien. Orthogonale Linien- und Flächenscharen. Wenn eine ebene Linienschar gegeben ist, so kann es vorkommen, dass durch jeden Punkt eines zweifach ausgedehnten Bereiches *mehrere* Linien der Schar hindurchgehen, und dann ist es bei Einschränkung der Betrachtung auf diesen Bereich im allgemeinen unmöglich, eine Linie zu finden, welche mit *jeder* sie schneidenden Linie der Schar einen vorgeschriebenen unveränderlichen Winkel bildet.

Ist dagegen eine ebene Linienschar so beschaffen, dass durch jeden Punkt eines zweifach ausgedehnten Bereiches eine und nur eine Linie der Schar hindurchgeht, was immer der Fall ist, wenn die Schar durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten x, y und einem Parameter c gegeben ist, welche die besondere Form:

(1) $$\Phi(x, y) = c \qquad (\Phi \text{ eindeutige Funktion von } x, y)$$

hat, so ist die erwähnte Forderung erfüllbar, und dann heisst jede ihr genügende Linie eine *isogonale*, und wenn der gegebene konstante Winkel ein rechter ist, eine *orthogonale Trajektorie* der gegebenen Linienschar.

Eine Linienschar der zuerst betrachteten Art kann in mehrere Scharen von Zweigen aufgelöst werden, welche die zuletzt angegebene Eigenschaft haben und bei welchen daher von Trajektorien die Rede sein kann.

Ist die ursprüngliche Linienschar durch eine Gleichung von der Form $F(x, y, c) = 0$ gegeben, so geschieht dies einfach durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf den Parameter c.

---

128) Über die Erklärung der durch die Vergrösserung entstehenden Linie als Rolllinie vgl. Nr. 7.

129) *A. Cayley,* Cambridge and Dublin math. J. 2 (1847), p. 128 = Coll. math. papers 1, Cambridge 1889, p. 273; Lond. Trans. 147 (1857), p. 273 u. 157 (1867), p. 7 = Coll. math. papers 2, Cambridge 1889, p. 336, u. 5 (1892), p. 454.

130) *F. Engel* und *K. Schellbach,* Darstellende Optik, nebst 21 Kupfertafeln, Halle 1856.

Die Gesamtheit aller isogonalen Trajektorien, welche die Linien einer gegebenen Schar:

$$(1) \qquad \Phi(x, y) = c$$

unter einem von einem rechten verschiedenen Winkel α schneiden, besteht aus *zwei* einfach unendlichen Scharen, deren Gleichungen sich durch Integration der Differentialgleichungen:

$$\Phi_x dy - \Phi_y dx = \pm \cos\alpha \cdot \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder auch:

$$(\Phi_x \cos\alpha \mp \Phi_y \sin\alpha)\, dx + (\Phi_y \cos\alpha \pm \Phi_x \sin\alpha)\, dy = 0$$

ergeben.

Die *orthogonalen* Trajektorien einer ebenen Linienschar bilden *eine* einfach unendliche Schar, deren Gleichung, wenn die gegebene Schar durch (1) dargestellt ist, durch Integration der Differentialgleichung:

$$\Phi_x dy - \Phi_y dx = 0$$

erhalten wird[131]. Die Differentialgleichung der isogonalen oder der orthogonalen Trajektorien einer ebenen Linienschar kann hiernach auch dann angegeben werden, wenn die ursprüngliche Linienschar selbst nicht durch eine entwickelte Gleichung, sondern durch eine Differentialgleichung von der Form:

$$f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$$

gegeben ist.

Legt man durch ein und denselben Punkt P eines von einer ebenen Linienschar überdeckten Gebietes nach willkürlicher Annahme beliebig vieler verschiedener Winkel mehrere isogonale Trajektorien, welche mit den Linien der Schar beziehentlich diese Winkel bilden, so haben, wie *E. Cesàro*[132] bemerkt hat, die zu P gehörenden Krümmungskreise aller dieser Trajektorien, wofern sie nicht sämtlich zu geraden Linien ausarten, ausser P immer noch einen zweiten Punkt mit einander gemein, bilden also stets ein Büschel.

Ist eine einfach unendliche Flächenschar gegeben durch eine Gleichung:

$$F(x, y, z) = c,$$

wo c einen veränderlichen Parameter bedeutet, so giebt es immer eine zweifach unendliche Schar von Linien, welche die Flächen der ge-

131) Angaben über die ältere Litteratur sowie Beispiele enthält *G. S. Klügel*'s mathematisches Wörterbuch 5^1, Leipzig 1831, p. 92 ff. Weitere Beispiele finden sich in *O. Schlömilch,* Übungsbuch 2, Leipzig, 4. Aufl. 1900, § 41.

132) *E. Cesàro,* Geom. intrinseca, 1896, p. 115, deutsche Ausgabe p. 147—148. Vgl. auch *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 50 (1898), p. 276.

gebenen Schar überall rechtwinklig schneiden. Diese Linien heissen *orthogonale Trajektorien der gegebenen Flächenschar.* Ihre Gleichungen ergeben sich durch Integration des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$

Ist umgekehrt eine zweifach unendliche Linienschar im Raume durch drei Gleichungen

(I) $$x = \varphi(t, u, v), \quad y = \chi(t, u, v), \quad z = \psi(t, u, v)$$

in der Weise gegeben, dass jedem Paar spezieller Werte der Parameter u, v eine spezielle Linie der Schar und den verschiedenen Werten der Veränderlichen t jedesmal die einzelnen Punkte dieser Linie entsprechen, so können sich, wie *E. Beltrami* gezeigt hat[133]), auf die Frage, ob eine oder mehrere Flächen (*Orthogonalflächen*) vorhanden sind, welche die Linien der gegebenen Schar überall rechtwinklig schneiden, verschiedene Antworten ergeben. Setzt man nämlich:

$$T = \varphi_t^2 + \chi_t^2 + \psi_t^2, \quad U = \varphi_t\varphi_u + \chi_t\chi_u + \psi_t\psi_u, \quad V = \varphi_t\varphi_v + \chi_t\chi_v + \psi_t\psi_v$$

und:

$$A = T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right),$$

so können drei Fälle eintreten:

1) A ist identisch gleich Null. Dann ist der Ausdruck:

$$T\,dt + U\,du + V\,dv$$

entweder selbst das vollständige Differential einer Funktion $\Phi(t, u, v)$ oder doch durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor in ein solches überführbar, und es giebt unendlich viele Orthogonalflächen, deren Gleichungen man erhält, indem man t durch die Gleichung:

$$\Phi(t, u, v) = c$$

als eine Funktion der Veränderlichen u, v und des Parameters c erklärt und diese Funktion an die Stelle von t in die Gleichungen (I) einsetzt.

---

133) *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 2 (1864), p. 267—268. Für geradlinige Strahlensysteme hatte schon *L. Malus,* J. éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 8, die Bedingung für das Vorhandensein einer Schar von Orthogonalflächen im wesentlichen richtig erkannt. Wie *E. E. Kummer,* J. f. Math. 57 (1860), p. 189, nachgewiesen, besteht diese Bedingung darin, dass erstens die „Brennflächen“ des Strahlensystems *reell* sind, und dass zweitens die beiden Scharen abwickelbarer Flächen, zu welchen sich die Strahlen des Systems dann zusammenfassen lassen, einander überall rechtwinklig schneiden.

2) A ist nicht identisch gleich Null, aber wenn man t durch die Gleichung $A = 0$ als eine Funktion von u und v erklärt, so erfüllt diese die Differentialgleichung:

$$T dt + U du + V dv = 0$$

bei beliebigen Werten von u und v. Dann ist nur eine einzige Orthogonalfläche vorhanden, deren Gleichungen sich ergeben, wenn man in die Gleichungen (I) für t die durch die Gleichung $A = 0$ erklärte Funktion von u und v einsetzt.

3) Von den eben erwähnten beiden Fällen trifft keiner zu. Dann giebt es keine Orthogonalfläche[134]).

Ist eine einfach unendliche Flächenschar gegeben, so giebt es immer unendlich viele verschiedene Flächenscharen (*orthogonale Flächenscharen*), deren Flächen die der gegebenen Schar überall rechtwinklig schneiden. Aber unter diesen Flächenscharen finden sich im allgemeinen keine zwei, deren Flächen einander ebenfalls überall rechtwinklig schnitten[135]). Für das Vorhandensein zweier solchen Scharen ist vielmehr, wenn die ursprünglich gegebene Flächenschar durch die Gleichung $F(x, y, z) = c$ dargestellt wird, notwendig und hinreichend, dass die Funktion F eine gewisse partielle Differentialgleichung dritter Ordnung erfülle.

Wenn drei einfach unendliche Flächenscharen so beschaffen sind, dass jede Fläche, welche irgend einer von ihnen angehört, die Flächen der anderen Scharen überall rechtwinklig schneidet, so sagt man, dass sie ein *dreifach orthogonales Flächensystem* (*Orthogonalsystem*) bilden[136]).

24. Isotherme Linien- und Flächenscharen (III D 3 V, III D 5). Eine einfach unendliche Flächenschar $F(x, y, z) = c$ heisst nach *G. Lamé isotherm*[137]), wenn der Quotient:

---

134) Den Fall, dass die zweifach unendliche Linienschar im Raume durch zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

gegeben ist, wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z bedeuten, sowie den Fall, dass sie durch zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten x, y, z und zwei Parametern u, v bestimmt wird, hat *G. Darboux,* Leçons sur la théor. gén. des surf. 2, p. 256—273, behandelt. Ebendaselbst wird die geometrische Bedeutung der Bedingung für das Vorhandensein einer Schar von Orthogonalflächen eingehend erörtert.

135) Dies ist zuerst von *J. Bouquet,* J. de math. (1) 11 (1846), p. 446 ff. an Beispielen nachgewiesen worden.

136) Näheres über die umfangreichen, der erwähnten Differentialgleichung und den Orthogonalsystemen gewidmeten Untersuchungen siehe III D 6 a.

137) Der Ausdruck *isotherm* wird von *Lamé* zuerst in den Annales de

$$\frac{F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}}{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$$

eine Funktion von c allein ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man nach *G. Lamé*[138]) die Flächenschar immer durch eine Gleichung $V(x, y, z) = c$ von solcher Beschaffenheit darstellen, dass die Funktion V die Differentialgleichung:

$$V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=0$$

befriedigt. Ist nämlich:

$$\frac{F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}}{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\varphi(F)$$

und:

$$\int \varphi(F)\,dF=\psi(F),$$

so braucht man nur:

$$V=\int e^{-\psi(F)}\,dF$$

zu nehmen. Hierdurch wird die eingeführte Benennung gerechtfertigt, da die Flächen einer solchen Schar immer als Flächen gleicher Temperatur in einem ungleichmässig erwärmten aber in stationärem Zustand befindlichen homogenen Körper angesehen werden können[139]). Zugleich hängt hierdurch der Begriff einer isothermen Flächenschar mit dem Begriff des *Newton*'schen Potentials und dem einer „harmonischen Funktion“ (II A 7b) zusammen.

Jede Funktion V, welche zu einer isothermen Flächenschar in der angegebenen Beziehung steht, heisst ein *thermometrischer*[140]) (*thermischer, isometrischer*) Parameter der Flächenschar.

Entsprechende Erklärungen und Sätze gelten für einfach unendliche ebene Linienscharen[141]).

Chimie et de Physique par *Gay-Lussac* et *Arago* 53, Paris 1833, p. 195, gebraucht.

138) *G. Lamé,* Paris Mém. div. sav. 5 (1838), p. 174—175 = J. de math. (1) 2 (1837), p. 147—149, oder J. de math. (1) 5 (1840), p. 344, oder Leçons sur les fonctions inverses etc., Paris 1857, p. 4—6, oder Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859, p. 31—32.

139) Vgl. *J. Fourier,* Théorie analyt. de la chaleur, Paris 1822, art. 123 = Oeuvres 1, p. 99—101.

140) *G. Lamé,* Leçons sur les fonctions inverses etc. Paris 1857, p. 2.

141) Vgl. *G. Lamé,* J. éc. polyt. 14, cah. 23, 1834, p. 240—241. — *S. Lie* hat, Vorl. üb. Differentialgln. mit bek. inf. Transf., hsg. v. *G. Scheffers,* Leipzig 1891, p. 156, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass eine ebene Linienschar, welche durch eine Differentialgleichung von der Form:

$$X(x, y)\,dy - Y(x, y)\,dx = 0$$

Ist eine ebene Linienschar isotherm, so ist ihre Orthogonalschar stets ebenfalls isotherm.

Eine auf einer krummen Fläche liegende einfach unendliche Linienschar heisst isotherm, wenn sie als das konforme Abbild einer ebenen isothermen Linienschar angesehen werden kann.

Wenn alle drei Scharen eines dreifach orthogonalen Flächensystems isotherm sind, so ist das System, wie *G. Lamé* bewiesen hat[142]), entweder ein System konfokaler Flächen zweiten Grades, oder eine seiner Ausartungen, oder es besteht aus einer Schar paralleler Ebenen und zwei Scharen von Cylindern, deren Schnitte mit jenen Ebenen *beliebige* isotherme, zu einander orthogonale Linienscharen sein können, oder aus einer Schar konzentrischer Kugeln und zwei Scharen von Kegeln, die ihre Spitzen in dem gemeinsamen Mittelpunkt jener Kugeln haben und dieselben in *beliebigen*[143]) zu einander rechtwinkligen isothermen Linienscharen schneiden.

Wenn zwei Linien a, b einer ebenen Linienschar $\Phi(x, y) = c$ mit zwei Linien l, m der Orthogonalschar ein geschlossenes Viereck bilden, so kann man im allgemeinen vier bez. den Linien a, b, l, m unendlich nahe benachbarte Linien der betrachteten Scharen so bestimmen, dass an drei Ecken des erwähnten Vierecks unendlich kleine Quadrate entstehen. Dann ist aber das an der vierten Ecke entstehende unendlich kleine Viereck im allgemeinen kein Quadrat. Wenn jedoch auch an dieser vierten Ecke im allgemeinen jedesmal ein Quadrat entsteht, einerlei wie man das ursprüngliche Viereck wählt, so sagt man, die betrachtete Linienschar *vermöge zusammen mit ihrer Orthogonalschar die Ebene in unendlich kleine Quadrate zu teilen.*

Damit dies eintrete, ist notwendig und hinreichend, dass der Quotient:

$$\frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}}{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$$

eine Funktion von c allein sei[144]). Die Linienscharen, welche die in

---

gegeben ist, isotherm sei. Zugleich hat er gezeigt, dass, falls diese Bedingung erfüllt ist, die Integration der Differentialgleichung nur Quadraturen verlangt.

142) J. de math. (1) 8 (1843), p. 397. Vereinfachungen des Beweises sind angegeben von *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 18, cah. 30 (1845), p. 141, und J. de math. (1) 14 (1849), p. 401. Vgl. auch *G. Darboux,* Leçons sur la th. gén. des surf. 2, p. 399—401.

143) Vgl. hierzu die von *O. Bonnet,* J. de math. (1) 14 (1849), p. 416, gegebene Berichtigung der von *G. Lamé,* J. de math. (1) 8 (1843), p. 399, gemachten Angaben, in welchen von den Kegeln irrtümlicherweise gefordert wird, dass sie vom 2. Grade seien.

144) Einen Beweis kann man aus den von *E. Beltrami,* Gi. di mat. 2 (1864), p. 368, angestellten Betrachtungen ableiten.

Rede stehende Eigenschaft haben, erweisen sich somit als übereinstimmend mit den *isothermen* ebenen Linienscharen.

Ist $u(x, y)$ ein thermometrischer Parameter einer isothermen ebenen Linienschar, so erhält man eine *angenäherte Einteilung des von der Schar überdeckten Bereiches in Quadrate*, wenn man eine Funktion $v(x, y)$ so bestimmt, dass die Differentialgleichungen:

$$v_x = - u_y, \quad v_y = u_x$$

bestehen, und sodann nach geeigneter Annahme zweier arithmetischen Reihen:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \quad \text{und} \quad v_1, v_2, v_3, \ldots$$

von der gleichen Differenz diejenigen Linien einzeichnet, welche durch die Gleichungen:

$$u(x, y) = u_\lambda, \quad v(x, y) = v_\varkappa \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2, \cdots)$$

dargestellt werden.

Eine Ausdehnung der vorangehenden Betrachtungen auf den Raum ist nur in sehr beschränktem Masse möglich. Eine *Einteilung des Raumes in unendlich kleine Würfel* kann nämlich, wie *J. Liouville* bewiesen hat[145]), nicht anders hervorgebracht werden, als:

A) durch drei Scharen paralleler Ebenen, welche sich paarweise rechtwinklig schneiden, und:

B) durch drei Scharen von Kugeln, welche aus drei solchen Ebenenscharen durch Abbildung vermittelst reziproker Radien entstehen.

III. Inhaltsberechnungen.

25. Inhaltsberechnung ebener Flächenstücke (Quadratur)[146]). Wenn die Begrenzung eines endlichen ebenen Bereiches von einer

145) *J. Liouville* in *G. Monge*, Appl. de l'anal., 5. éd. 1850, Note VI, p. 609—616, nachdem er den Satz selbst ohne Beweis bereits J. de math. (1) 13 (1848), p. 220, und J. de math. (1) 15 (1850), p. 103, ausgesprochen hatte. Aus anderen Quellen hat *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 145, und Geom. d. Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896, p. 419—425, den gleichen Satz hergeleitet. Einen kurzen geometrischen Beweis gab *A. Capelli*, Ann. di mat. (2) 14 (1886—87), p. 227, insbesondere p. 229—230. Wegen der Ausdehnung auf einen Raum von mehr als drei Dimensionen, auf deren Möglichkeit schon *J. Liouville*, J. de math. (1) 13 (1848), p. 220, hingewiesen hatte, vgl. *S. Lie*, Götting. Nachr. 1871, p. 191, u. Math. Ann. 5 (1872), p. 186.

146) Vgl. hierzu I A 5, Nr. 15, III A 1, und *E. H. Dirksen*, Berl. Abh. 1833, p. 123. (s. Fussn. 49), sowie *P. Stolz*, Grundzüge der Diff.- u. Integralrechn. 3, Leipzig 1899, insbesondere p. 60, 111, 200 ff. — Die Inhaltsermittelung durch Anwendung mechanischer Hülfsmittel (Planimeter) ist in II A 2, Nr. 56—58 be-

endlichen Anzahl gerader Strecken gebildet wird, so kann der Bereich immer auf unzählig viele verschiedene Weisen durch eine endliche Anzahl gerader Querschnitte so in Teile zerlegt werden, dass diese Teile passend aneinander gefügt ein Rechteck decken, dessen eine Seite der Längeneinheit gleich ist. Wie *F. Schur*[147]) und *O. Rausenberger*[148]) und auf anderem Wege *W. Killing*[149]) bewiesen haben, behält die andere Seite dieses Rechtecks bei allen verschiedenen Zerschneidungen und Wiederzusammenfügungen ein und desselben Bereiches die gleiche Länge[150]).

Die Zahl, welche diese Länge misst, giebt an, wieviel Einheitsquadrate mit den Teilen des betrachteten Bereiches bedeckt werden können, und wird deshalb der *Flächeninhalt* dieses Bereiches genannt.

Wenn zweitens ein endlicher ebener Bereich $\mathfrak{B}$ in anderer Weise begrenzt, jedoch so beschaffen ist, dass die obere Grenze O der Flächeninhalte aller eingeschlossenen Bereiche von der vorher betrachteten Art mit der unteren Grenze U der Inhalte aller einschliessenden Bereiche dieser Art zusammenfällt, so nennt man den gemeinsamen Wert der beiden erwähnten Grenzen den *Flächeninhalt des Bereiches* $\mathfrak{B}$.

Fällt endlich drittens die obere Grenze O nicht mit der unteren Grenze U zusammen, so heisst O der *innere* und U der *äussere* Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$, aber ein Inhalt schlechthin kommt diesem Bereiche nicht mehr zu. (Vgl. I A 5, Nr. **15**.)

Wenn ein ebener Bereich $\mathfrak{B}$ sich ins Unendliche erstreckt, aber der im Innern eines Kreises mit einem festen Mittelpunkt und einem veränderlichen Radius r enthaltene Teil des Bereiches für jeden Wert von r einen bestimmten Inhalt hat und dieser letztere bei unbegrenzt wachsendem r einem endlichen Grenzwert zustrebt, so versteht man unter dem Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ eben diesen Grenzwert.

Ist $\mathfrak{B}$ ein endlicher ebener Bereich, dem ein bestimmter Inhalt J zukommt, und ist nach Überdeckung der Ebene von $\mathfrak{B}$ mit irgend einem Netz gleich grosser Quadrate, deren Seitenlänge λ heissen möge,

---

handelt. Vgl. hierüber auch *W. Jordan,* Handbuch der Vermessungskunde 2, 5. Aufl., Stuttgart 1897, p. 109—130, und III D 11.

147) *F. Schur,* Dorpat Naturf.-Ges. Ber. 10, 1892.

148) *O. Rausenberger,* Math. Ann. 43 (1893), p. 601.

149) *W. Killing,* Einführung in die Grundlagen der Geometrie 2, Paderborn 1898, p. 22—31.

150) Einen vom Archimedischen Axiom (I A 5, Nr. 18) unabhängigen Beweis dieses Satzes hat *D. Hilbert* gegeben, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, p. 40—49. Vgl. ferner *L. Gérard,* Bull. de math. spec. 1; Bull. de math. élém. 1 et 2; Bull. Soc. math. de France 23 (1895), p. 268.

n die Anzahl derjenigen Quadrate, welche man erhält, wenn man alle ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ enthaltenen Quadrate beibehält, und ausserdem beliebig viele von denjenigen, welche Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ enthalten, so nähert sich das Produkt $\lambda^2 n$ bei verschwindendem λ stets dem Grenzwert J.

Hat ein ebener Bereich $\mathfrak{B}$ einen bestimmten Inhalt J, so hat seine orthogonale Projektion auf eine beliebige zweite Ebene ebenfalls einen bestimmten Inhalt, und zwar, wenn α den spitzen Winkel zwischen beiden Ebenen bezeichnet, den Inhalt $J \cos \alpha$.

Wenn $f(x)$ eine Funktion bezeichnet, welche auf einem endlichen Intervall mit der unteren Grenze a und der oberen Grenze b integrierbar (II A 2, Nr. **31**) und nirgends negativ ist, so kommt demjenigen Bereich, welcher in der Ebene eines rechtwinkligen Systems von *Parallelkoordinaten* (x, y) durch die Ungleichheiten:

$$a \leqq x \leqq b, \quad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

abgegrenzt wird, stets ein bestimmter Inhalt zu, und dieser wird durch das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ dargestellt.

Ist in einem System ebener *Polarkoordinaten* (r, φ) eine (analytische (II A 1, Nr. **12**)) Linie l gegeben durch eine Gleichung $r = f(\varphi)$, so wird der Inhalt J desjenigen Bereiches, welchen der Leitstrahl r überstreicht, während die Abweichung φ stetig wachsend ein endliches Intervall $\alpha \ldots \beta$ durchläuft, gegeben durch die Gleichung:

$$J = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta r^2 d\varphi.$$

Dabei sind, falls $\beta - \alpha > 2\pi$ ist, die mehrfach überstrichenen Teile des Bereiches auch entsprechend oft bei der Inhaltsbestimmung in Anschlag zu bringen.

Führt man statt der Polarkoordinaten rechtwinklige Koordinaten x, y mit dem gleichen Anfang ein, so erhält man, wenn $x = g(t)$, $y = h(t)$ die Gleichungen von l in dem rechtwinkligen System und a, b die den Werten α, β von φ entsprechenden Werte von t bezeichnen, vorausgesetzt, dass wachsenden Werten von φ auch wachsende Werte von t entsprechen, für den Inhalt J den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} \int\limits_a^b \begin{vmatrix} g(t) & h(t) \\ g'(t) & h'(t) \end{vmatrix} dt,$$

dessen Anwendbarkeit, wie aus dem Nachfolgenden hervorgehen wird, auch auf solche Fälle ausgedehnt werden kann, in denen die gemachten Voraussetzungen nicht mehr sämtlich zutreffen.

Die vorangehenden Regeln für die Inhaltsberechnung in Parallel- und Polarkoordinaten können als besondere Fälle des folgenden allgemeinen Satzes[151]) angesehen werden:

Wenn eine Strecke $P_1 P_2$ sich in der Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems bewegt und die Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2 ihrer Endpunkte als Funktionen ein- und derselben Hülfsveränderlichen t gegeben sind, so wird der Inhalt desjenigen Bereiches, welchen die Strecke $P_1 P_2$ überstreicht, während t ein Intervall $a \ldots b$ durchläuft, vorausgesetzt, dass die Strecke $P_1 P_2$ dabei nie mehr als einmal durch den gleichen Punkt geht, gegeben durch den absoluten Wert des Ausdrucks:

$$\frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} dt.$$

Wenn im Gebiet von zwei Veränderlichen u, v ein ganz im Endlichen liegender Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben ist, der einen bestimmten Flächeninhalt hat, wenn ferner für einen den Bereich $\mathfrak{B}$ ganz im Innern enthaltenden grösseren Bereich $\mathfrak{B}'$ zwei Funktionen $g(u, v)$, $h(u, v)$ gegeben sind, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{B}'$ überall vorhanden und stetig sind und die Bedingung $\begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix} > 0$ erfüllen, und wenn endlich durch die Gleichungen $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ je zwei verschiedenen Punkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ auch verschiedene Wertepaare x, y zugeordnet werden, so hat der dem Bereich $\mathfrak{B}$ entsprechende Bereich im Gebiet der Veränderlichen x, y ebenfalls einen bestimmten Inhalt, und dieser wird durch das über $\mathfrak{B}$ zu erstreckende Integral:

$$\iint \begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix} du\, dv$$

dargestellt[152]).

Hat man in einer Ebene einen positiven und einen negativen Drehungssinn unterschieden, und ist für die Begrenzung eines in dieser Ebene enthaltenen endlichen und einfach zusammenhängenden (III A 4) von einer endlichen Anzahl analytischer Linien begrenzten Bereiches eine bestimmte Umlaufungsrichtung vorgeschrieben, so ist es häufig zweckmässig, nach dem Vorgang von *A. F. Möbius*[153]) als *Inhalt*

---

151) Vgl. *G. Peano,* Applicazioni geometriche, p. 237—239, oder Lezioni di analisi 2, p. 224.

152) Dieser Satz ist ein spezieller Fall der II A 2, Nr. 41 behandelten Regeln für die Transformation mehrfacher Integrale.

153) *A. F. Möbius,* Der barycentr. Calcul, Leipzig 1827, § 17, 18 = Ges.

des Bereiches diejenige *positive* oder *negative* Zahl zu bezeichnen, deren absoluter Wert die Anzahl der in dem Bereich enthaltenen Einheitsquadrate angiebt und deren Vorzeichen + oder — ist, je nachdem ein die Begrenzung in der vorgeschriebenen Richtung beschreibender Punkt das Innere im positiven oder negativen Sinne umläuft[154]). Zugleich pflegt man, wenn eine in der betrachteten Ebene sich bewegende Strecke, bei welcher man einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B unterschieden hat, einen festen Punkt überstreicht, eine Überstreichung in *positiver* (d. h. wie bei einer positiven Drehung um A) und in *negativer* Richtung zu unterscheiden, und sodann als Inhalt der gesamten von AB bei einer endlichen Bewegung überstrichenen Fläche die algebraische Summe derjenigen Zahlen anzusehen, welche man erhält, wenn man die in der früheren Weise erklärten Flächeninhalte der in positiver, bez. negativer Richtung überstrichenen Flächenstücke mit dem Vorzeichen +, bez. — versieht.

Bei diesen Festsetzungen können mehrere der vorangehenden Sätze durch gänzliche oder teilweise Aufhebung der ihre Gültigkeit einschränkenden Voraussetzungen erweitert werden. Ferner gilt folgender Satz[155]): Wenn in einer Ebene eine geschlossene Linie l gegeben und ein fester Punkt A nach Belieben angenommen ist, so ist der Inhalt J der Fläche, die von der geraden Verbindungslinie des Punktes A mit einem auf l beweglichen Punkte B überstrichen wird,

---

Werke 1, p. 39—41, und Leipz. Ber. 17 (1865), p. 42 = Ges. Werke 2, p. 485. Zum ersten Male dürften positive und negative Flächeninhalte in systematischer Weise unterschieden worden sein von *L. F. Meister,* Gott. Nov. Comm. 1 (1770), p. 144.

154) Nimmt man zwischen drei in der Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegenden Punkten eine bestimmte Reihenfolge P_1, P_2, P_3 an, wählt sodann die dieser Reihenfolge entsprechende Umlaufsrichtung des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ als positive und erklärt hierauf den Inhalt J des Dreiecks gemäss der obigen Festsetzung, so erreicht man den Vorteil, dass die Formel:

$$J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

in welcher x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 bez. die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3 bedeuten (vgl. *R. Baltzer,* Theorie u. Anwend. der Determinanten, Leipzig, 4. Aufl., 1875, § 15), ohne jede Ausnahme gilt.

155) Vgl. *A. F. Möbius,* Der barycentr. Calcul, Leipzig 1827, § 165, Anm. = Ges. Werke 1, p. 200, und Leipz. Ber. 17 (1865), p. 43 = Ges. Werke 2, p. 486. — Dass auch *Gauss* die Unterscheidung positiver und negativer Flächeninhalte für zweckmässig gehalten und den obigen Satz schon 1825 gekannt hat, geht aus Werke 8, p. 398 f. hervor.

während B die Linie l einmal in vorgeschriebener Richtung durchläuft, von der Lage des Punktes A unabhängig.

Falls l sich nicht selbst schneidet, stimmt J mit dem Inhalt des von l begrenzten endlichen Teiles der Ebene überein. Und wenn l sich selbst schneidet, pflegt man als *Erklärung* festzusetzen, dass unter dem *„Inhalt der geschlossenen, in vorgeschriebener Richtung zu beschreibenden Linie l“* eben der Wert J verstanden werden soll.

Zahlreiche Sätze über Beziehungen zwischen den Inhalten solcher ebener Bereiche, welche ganz oder teilweise von Linien begrenzt sind, die als Fusspunktlinien oder Rouletten (III D 4) erklärt sind, und mannigfaltige Anwendungen dieser Sätze auf die Inhaltsberechnung besonderer Bereiche hat *J. Steiner* angegeben[156]).

26. Inhaltsberechnung gekrümmter Flächenstücke (Komplanation). Wenn im Gebiet von zwei Veränderlichen u, v für einen endlichen Bereich $\mathfrak{B}$, dem ein bestimmter von Null verschiedener Inhalt zukommt, drei im Innern sowie auf der Begrenzung reguläre analytische Funktionen $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$, $\psi(u, v)$ eindeutig erklärt sind, wenn ferner die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \chi_u & \psi_u \\ \chi_v & \psi_v \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \psi_u & \varphi_u \\ \psi_v & \varphi_v \end{vmatrix} = B, \quad \begin{vmatrix} \varphi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \chi_v \end{vmatrix} = C$$

nicht sämtlich gleich Null sind, und durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

ein dem Bereich $\mathfrak{B}$ entsprechendes Flächenstück $\mathfrak{F}$ gegeben ist, so kann man eine *„dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ eingeschriebene Polyederfläche“* folgendermassen bilden: Man nimmt in der Ebene der Veränderlichen u, v ein den Bereich $\mathfrak{B}$ einfach, aber ganz überdeckendes Netz von Dreiecken an, behält von diesen nur diejenigen bei, deren Eckpunkte sämtlich dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören[157]), und verbindet jedesmal die-

156) J. f. Math. 18 (1838), p. 278 und 369 = Ges. Werke 2, p. 65, und J. f. Math. 21 (1840), p. 33 und 101 = Ges. Werke 2, p. 99. Ausdehnungen auf den Raum hat *T. A. Hirst,* Lond. Trans. 153 (1863), p. 13, gegeben. (In französischer Sprache und teilweise umgearbeitet wieder abgedruckt J. f. Math. 62 (1863), p. 246.) Vgl. ferner *A. Amsler,* Üb. d. Flächeninh. u. d. Vol. durch Bew. erz. Kurven u. Flächen u. üb. mech. Integrationen, Diss. Basel, Schaffhausen 1880, und IV 3, Nr. 22.

157) Man könnte ohne wesentliche Änderung des Nachfolgenden ausser den hier erwähnten Dreiecken auch noch beliebig viele derjenigen am Rande von $\mathfrak{B}$ gelegenen Dreiecke beibehalten, welche mit dem Bereich $\mathfrak{B}$ oder seiner Begrenzung wenigstens einen Punkt gemeinsam haben. Vgl. *O. Hölder,* Beiträge zur Potentialtheorie, Diss. Tüb., Stuttgart 1882, p. 20 ff., woselbst auch die Frage

jenigen drei Punkte von $\mathfrak{F}$, welche den Ecken eines der beibehaltenen Dreiecke entsprechen, durch ein ebenes Dreieck.

Wenn man hierbei nach willkürlicher Annahme eines konstanten Winkels ω, der grösser als $\frac{\pi}{3}$, aber kleiner als π ist, die in der Ebene u, v anzunehmenden Dreiecke der Bedingung unterwirft, dass keiner der in ihnen vorkommenden Winkel grösser als ω sein solle [158]), und sodann das $\mathfrak{B}$ bedeckende Dreiecksnetz in irgend einer Weise unbegrenzt verfeinert, jedoch so, dass alle Dreiecksseiten zuletzt unendlich klein werden, so nähert sich die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke, aus welchen die in der angegebenen Weise dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ eingeschriebene Polyederfläche zusammengesetzt ist, einem endlichen Grenzwert J, welcher unabhängig davon ist, wie man bei der Verfeinerung des Dreiecksnetzes verfährt, und auch dann keine Änderung erleidet, wenn man statt der ursprünglich gegebenen irgend eine andere den gleichen Voraussetzungen genügende analytische Darstellung des Flächenstücks $\mathfrak{F}$ zu Grunde legt.

Dieser Grenzwert J heisst der *Inhalt* des Flächenstücks $\mathfrak{F}$. Er wird durch das über $\mathfrak{B}$ zu erstreckende Integral:

$$\iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

oder auch durch:

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

dargestellt, wo zur Abkürzung:

$$E = \varphi_u^2 + \chi_u^2 + \psi_u^2, \quad F = \varphi_u\varphi_v + \chi_u\chi_v + \psi_u\psi_v, \quad G = \varphi_v^2 + \chi_v^2 + \psi_v^2$$

gesetzt ist.

Wenn man ein in der angegebenen Weise gegebenes Flächenstück $\mathfrak{F}$ in irgend einer Weise durch analytische Linien in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt, sodann diese Teile, nachdem man sie in irgend welche Lagen im Raume gebracht hat, senkrecht auf eine Ebene projiziert und durch Addition der Inhalte aller so erhaltenen Projektionen eine Summe S bildet, so stellt der Inhalt J von $\mathfrak{F}$ die obere Grenze aller Werte dar, welche S für alle möglichen Zerlegungen von $\mathfrak{F}$ und alle möglichen Stellungen der einzelnen Teile zur Projektionsebene annehmen kann [159]).

behandelt ist, wie weit sich die im vorangehenden gemachten Voraussetzungen auf ein geringeres Mass zurückführen lassen.

158) Auf die Notwendigkeit dieser oder einer gleichwertigen Nebenbedingung haben *O. Hölder,* a. a. O. p. 29, *G. Peano* (vgl. Rom. Linc. Rend. (4) 6 (1890), p. 55) und *H. A. Schwarz,* Ges. math. Abhandl. 2, Berlin 1890, p. 309—311, oder Cours de M. *Hermite,* professé pendant le 2ᵉ semestre 1881/82, second tirage, Paris 1883, p. 35—36, aufmerksam gemacht.

159) *G. Peano* hat diese Eigenschaft des Inhaltes zur Erklärung desselben

Im Anschluss an den in Nr. **10** erwähnten Vorschlag zur Erklärung des Begriffs „Länge“ bei einer Linie hat *H. Minkowski*[160]) einen ähnlichen Vorschlag auch zur Erklärung des Begriffs „Inhalt“ bei einer Fläche mit folgenden Worten gemacht: „Es sei F eine Fläche. Man konstruiere in entsprechender Weise (vgl. Nr. **10**) den *Bereich der Entfernung* $\leqq r$ *von* F. Es sei $V(r)$ das Volumen dieses Bereiches, so kann der Grenzwert von $\frac{V(r)}{2r}$ für ein nach Null abnehmendes r (vorausgesetzt, dass die Grösse $V(r)$ sowie dieser Grenzwert existiert), als *Oberfläche der Fläche* F eingeführt werden.“

Zwischen den Inhalten einander entsprechender Elemente von zwei parallelen Flächen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ besteht eine von *J. Steiner*[161]) angegebene Beziehung. Wenn nämlich $d\sigma$, $d\sigma'$, R_1, R_2, h die Zahlen bedeuten, welche sich bei Beachtung gewisser Vorzeichenregeln bez. für die Inhalte zweier einander entsprechenden Elemente von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$, die Hauptkrümmungsradien (Nr. **35**) von $\mathfrak{F}$ am Orte von $d\sigma$ und den Abstand der Flächen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ ergeben, so ist:

$$d\sigma' = d\sigma\left\{1 - h\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + h^2\frac{1}{R_1 R_2}\right\}.$$

Ist für ein endliches Intervall $a \dots b$ eine nirgends negative Funktion $f(x)$ und durch die Gleichung $y = f(x)$ eine Linie l gegeben, so wird der Inhalt derjenigen Umdrehungsfläche, welche durch die Umdrehung von l um die Abscissenaxe entsteht, gegeben durch den Ausdruck:

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Durch Multiplikation mit $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ und gleichzeitige Division durch die nämliche Zahl ergiebt sich hieraus die erste *Guldin*'sche[162])

---

benutzt. Vgl. Applicazioni geom. p. 164, und Rom. Linc. Rend. (4) 6 (1890), p. 54, woselbst auch geschichtliche Mitteilungen über andere Arten der Erklärung gegeben sind.

160) *H. Minkowski,* Deutsche Math.-Vereinig. Jahresber. 9 (1901), p. 115. Vgl. auch *C. W. Borchardt,* J. de math. (1) 19 (1854), p. 369 = Ges. Werke, hrsg. v. *G. Hettner,* Berlin 1888, p. 67.

161) *J. Steiner,* Berl. Mon.-Ber. 1840, p. 117 = Ges. Werke 2, p. 176. Verschiedene Folgerungen aus dieser Beziehung giebt *C. W. Borchardt* a. a. O.

162) So genannt wegen ihres Vorkommens in *P. Guldin,* Centrobaryca, Viennae, 1640, obwohl sie sich schon bei *Pappus* (Collect. hrsg. v. *F. Hultsch,* 2, Berlin 1877, p. 683) findet. *G. Monge* hat, Applic. de l'analyse, 5. éd. par *Liouville,* p. 333, die *Guldin*'schen Regeln auf den Fall ausgedehnt, dass die die erzeugende Figur tragende Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche abrollt

Regel: Der Inhalt einer Umdrehungsfläche ist gleich der Länge ihres Meridians multipliziert mit der Bahn, welche der Schwerpunkt dieses Meridians bei einer Umdrehung um die Axe beschreibt.

27. Inhaltsberechnung in der nichteuklidischen Geometrie[163]. In der *nichteuklidischen* Geometrie gelten, vorausgesetzt, dass man als Mass des Winkels zwischen zwei einander schneidenden Geraden g, g' die Zahl $\frac{1}{2} i \log \operatorname{nat} D$ ansieht, wo D das Doppelverhältnis des Strahlenpaares g, g' zu dem Paar der beiden vom Schnittpunkt der Geraden g, g' an den „absoluten" Kegelschnitt ihrer Verbindungsebene gehenden Tangenten bedeutet, die folgenden Erklärungen und Sätze:

Wenn ds und ds' die nichteuklidisch gemessenen Längen zweier Seiten eines unendlich kleinen Dreiecks und α den ebenfalls nichteuklidisch gemessenen von ihnen eingeschlossenen Winkel bedeuten, so nennt man das Produkt $\frac{1}{2} ds\, ds' \sin\alpha$ (dessen Wert sich nur um eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung ändert, wenn man eine der Seiten ds, ds' durch die dritte Seite des gleichen Dreiecks und zugleich α durch den neuen eingeschlossenen Winkel ersetzt) den *Inhalt* des unendlich kleinen Dreiecks. Ferner versteht man unter dem Inhalt eines ebenen Bereiches von endlichen Dimensionen die Summe der Inhalte seiner Elemente und erklärt endlich den Inhalt eines gekrümmten Flächenstücks als Grenzwert des nichteuklidisch gemessenen Inhalts einer eingeschriebenen Polyederfläche von der gleichen Beschaffenheit wie in der euklidischen Geometrie.

Ist nach Einführung irgend welcher Koordinaten u, v in einer Ebene oder auf einer krummen Fläche (Nr. **34**):

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Quadrat des nichteuklidisch gemessenen Abstandes der Punkte mit den Koordinaten u, v und $u + du$, $v + dv$, so wird der Inhalt eines beliebigen Teiles der Ebene, beziehungsweise Fläche, gegeben durch das Integral $\iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, erstreckt über den entsprechenden Bereich im Gebiet der Veränderlichen u, v.

Ist K das Krümmungsmass einer nichteuklidischen Massbestimmung, Δ das Doppelverhältnis zweier Punkte A, B zu den Schnittpunkten ihrer geraden Verbindungslinie mit der „absoluten" Fläche

163) Vgl. *J. Frischauf,* Absolute Geom. nach *J. Bolyai,* Leipzig 1872, p. 69—79; *J. Frischauf,* Elemente d. absol. Geom., Leipzig 1876, p. 90—98; *F. Engel* u. *P. Stäckel,* Urkunden zur Gesch. d. nichteukl. Geom. 1, *N. J. Lobatschefskij,* Leipzig 1898, p. 33—46, nebst Anmerkungen p. 265—282, und *F. Klein,* Nicht-Euklidische Geom. 1, autogr. Vorl. Winter 1889—90, 2. Abdr. Göttingen 1893, p. 118—125, sowie III A 1.

zweiten Grades, und hat man die Zahl $\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \log \text{nat} \, \Delta$ als Mass des Abstandes der Punkte A, B angenommen, so wird der Inhalt eines Dreiecks mit den nichteuklidisch gemessenen Winkeln α, β, γ gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{K}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

und der eines Kreises, dessen Radius nichteuklidisch gemessen die Länge r hat, durch:

$$\frac{4\pi}{K}\left(\sin \frac{r\sqrt{K}}{2}\right)^2.$$

Falls K negativ ist, hat bei den getroffenen Festsetzungen das Einheitsquadrat auf der „Grenzfläche" den Inhalt Eins.

28. **Rauminhaltsberechnung (Kubatur).** Eine Erklärung dafür, was unter dem Rauminhalt eines endlichen, von einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke begrenzten Teiles des Raumes zu verstehen sei, lässt sich *nicht* durch eine Erweiterung derjenigen Erklärung gewinnen, die im Anfang der Nr. 25 für den Flächeninhalt eines endlichen, von einer endlichen Anzahl gerader Strecken begrenzten ebenen Bereiches gegeben wurde. Denn, wie *M. Dehn*[164]) bewiesen hat, giebt es Fälle (ein Beispiel bietet das reguläre Tetraeder), in denen es auf keine Weise möglich ist, einen räumlichen Bereich der bezeichneten Art durch eine endliche Anzahl ebener Querschnitte so in Teile zu zerlegen, dass man mit diesen Teilen durch andere Anordnung derselben ein über dem Quadrat der Längeneinheit als Grundfläche stehendes rechtwinkliges Parallelepipedon genau ausfüllen könnte. Ferner ist es in vielen dieser Fälle — insbesondere beim regulären Tetraeder — auch nicht möglich, den betrachteten Teil des Raumes und ein rechtwinkliges Parallelepipedon der bezeichneten Art durch Hinzufügung einer endlichen Anzahl beziehentlich kongruenter Polyeder zu solchen Polyedern zu ergänzen, die ihrerseits in endlich viele beziehentlich kongruente Polyeder zerlegt werden könnten. Deswegen lässt sich die Anwendung unendlicher Prozesse auch in den elementarsten Teilen der Lehre von den Rauminhalten nicht vermeiden.

Von den vier Seitenflächen eines beliebigen Tetraeders T denke man sich irgend eine als Grundfläche angenommen und sodann den Raum durch drei auf einander senkrechte Scharen paralleler Ebenen,

---

164) *M. Dehn,* Gött. Nachr. 1900, p. 345, und Math. Ann. 55 (1902), p. 465 (III A 1).

von denen eine zu jener Grundfläche parallel ist, in kongruente Würfel zerlegt, deren Kantenlänge λ heissen möge. Wenn dann n die Anzahl derjenigen Würfel bedeutet, welche man erhält, wenn man alle ganz im Innern von T gelegenen Würfel beibehält, und ausserdem beliebig viele von denen, welche Punkte der Begrenzung von T enthalten, so nähert sich das Produkt $\lambda^3 n$ bei verschwindendem λ einem endlichen Grenzwert v, und zwar immer demselben, einerlei ob man die Anzahl n so klein oder so gross macht, als es bei gegebenem λ möglich ist. Für diesen Grenzwert erhält man zunächst den Ausdruck:

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$$

Dieser kann aber in einen andern, aus den sechs Kanten von T zusammengesetzten Ausdruck[165]) umgewandelt werden, dessen Form zeigt, dass der Wert von v unabhängig davon ist, welche der vier Seitenflächen von T man als Grundfläche gewählt hat. Weiter lässt sich zeigen, dass man auch die Forderung, eine der betrachteten Scharen paralleler Ebenen solle zu einer der Seitenflächen von T parallel sein, fallen lassen kann, ohne dass das Produkt $\lambda^3 n$ aufhört, dem gleichen Grenzwert v zuzustreben.

Der so erklärte Grenzwert v heisst das *Volumen* oder der *Rauminhalt* des Tetraeders T.

Sind x_ν, y_ν, z_ν für $\nu = 1, 2, 3, 4$ die Koordinaten der vier Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 eines beliebigen Tetraeders T in Bezug auf ein rechtwinkliges System $OXYZ$, so stellt der Ausdruck:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

das Volumen von T dar, versehen mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Kanten P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 ebenso zu einander liegen, wie die positiven Richtungen OX, OY, OZ der Koordinatenaxen oder nicht[166]).

Dementsprechend ist es häufig zweckmässig, nach dem Vorgang von *A. F. Möbius*, unter dem Volumen eines Tetraeders, zwischen

165) Vgl. *G. Ed. Guhrauer, Joachim Jungius* und sein Zeitalter, Stuttgart 1850, p. 297, oder *L. Euler*, Petrop. Nov. comm. 4 (1758), p. 158, oder *R. Baltzer*, Elemente der Math. 2 (6. Aufl. 1883), Buch 6, § 6, Ende von Nr. 14.

166) Vgl. *R. Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig, 4. Aufl. 1875, § 15, woselbst sich auch historische Angaben finden.

dessen Ecken eine bestimmte Reihenfolge festgesetzt ist, diejenige *positive oder negative* Zahl zu verstehen, deren absoluter Wert das Volumen in dem vorher erklärten Sinne angiebt, und deren Vorzeichen + oder — ist, je nachdem die Strahlen, welche von der ersten nach der zweiten, dritten und vierten Ecke gehen, in einem zuvor festgelegten Sinne auf einander folgen oder nicht.

A. F. Möbius hat gezeigt[167]), dass und wie man diesen Begriff des Volumens zunächst auf beliebige „gewöhnliche" und „aussergewöhnliche" Pyramiden und sodann auch auf beliebige „gewöhnliche" und diejenigen „aussergewöhnlichen Polyeder" (III A 3) ausdehnen kann, welche das „Gesetz der entgegengesetzten Kanten" befriedigen, und dabei nachgewiesen, dass sich das Volumen eines jeden solchen Polyeders als algebraische Summe der Volumina einer endlichen Anzahl von Pyramiden (oder auch Tetraedern) darstellen lässt, welche entweder der Bedingung unterworfen werden können, sämtlich ein- und denselben willkürlich gewählten Punkt als Spitze zu haben, oder der Bedingung, dass ihre Grundflächen sämtlich in ein- und derselben Ebene liegen sollen, die zwar zu einer endlichen Anzahl gerader Linien nicht parallel sein, sonst aber ebenfalls nach Belieben angenommen werden darf.

Zugleich hat *Möbius* unter Anführung von Beispielen gezeigt, dass es aussergewöhnliche Polyeder giebt, welche das Gesetz der entgegengesetzten Kanten *nicht* befriedigen, und bei welchen daher von einem Volumen nicht mehr die Rede sein kann.

Wenn die Begrenzung eines endlichen räumlichen Bereiches $\mathfrak{K}$ nicht aus einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke besteht, der Bereich jedoch so beschaffen ist, dass die obere Grenze O der (positiv genommenen) Volumina aller eingeschlossenen gewöhnlichen Polyeder mit der unteren Grenze U der Volumina aller umschliessenden gewöhnlichen Polyeder zusammenfällt, so nennt man den gemeinsamen Wert der beiden erwähnten Grenzen das *Volumen* oder den *Rauminhalt* des Bereiches $\mathfrak{K}$. Andernfalls heisst O das *innere* und U das *äussere Volumen* von $\mathfrak{K}$, aber ein Volumen schlechthin kommt dem Bereich $\mathfrak{K}$ nicht mehr zu.

Wenn ein räumlicher Bereich $\mathfrak{K}$ sich ins Unendliche erstreckt, aber der im Innern einer Kugel mit einem festen Mittelpunkt und einem veränderlichen Radius r enthaltene Teil des Bereiches für jeden Wert von r ein bestimmtes Volumen hat, und dieses letztere bei unbegrenzt wachsendem r einem endlichen Grenzwert zustrebt, so versteht man unter dem Volumen des Bereiches $\mathfrak{K}$ eben diesen Grenzwert.

---

167) *A. F. Möbius,* Leipz. Ber. 17 (1865), p. 31 = Ges. Werke 2, p. 473.

Wenn in der XY-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems $OXYZ$ ein endlicher Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben ist, welchem ein bestimmter Inhalt zukommt, und $f(x, y)$ eine in diesem Bereiche einschliesslich seiner Begrenzung stetige und nirgends negative Funktion bedeutet, so hat der Körper, welcher von $\mathfrak{B}$, dem durch die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ gehenden zur Z-Axe parallelen Cylinder und der Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt wird, ein bestimmtes Volumen, und dieses wird dargestellt durch das Integral:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

erstreckt über den Bereich $\mathfrak{B}$.[168]) (Volumenberechnung oder Kubatur durch Zerlegung in *Prismen.*)

Wenn im Gebiet von zwei Veränderlichen u, v für einen zusammenhängenden endlichen Bereich $\mathfrak{B}$, welchem ein bestimmter von Null verschiedener Flächeninhalt zukommt, drei sowohl im Innern als auf der Begrenzung reguläre analytische Funktionen $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$, $\psi(u, v)$ [169]) gegeben sind, wenn ferner die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ \varphi_u & \chi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \chi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

im Innern und auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ überall von Null verschieden ist, und wenn endlich das durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

dargestellte, dem Bereich $\mathfrak{B}$ entsprechende Flächenstück $\mathfrak{F}$ jeden vom Anfang O des Koordinatensystems der x, y, z ausgehenden Strahl in höchstens einem Punkte schneidet, so hat der von $\mathfrak{F}$ und demjenigen durch den Rand von $\mathfrak{F}$ gehenden Kegel, dessen Spitze in O liegt,

---

168) Eine Erweiterung dieses Satzes stellt der folgende von *C. F. Gauss* (Comm. Gott. 2 (1813) = Werke 5 (1877), p. 6) angegebene Satz dar:

Das Volumen eines Körpers wird durch ein jedes der drei über die gesamte Oberfläche desselben zu erstreckenden Integrale:

$$\int x \cos\alpha\, ds, \quad \int y \cos\beta\, ds, \quad \int z \cos\gamma\, ds$$

dargestellt, in welchen ds das Element der Oberfläche, x, y, z die Koordinaten dieses Elementes und α, β, γ die Winkel bedeuten, welche die nach aussen gerichtete Normale der Oberfläche am Orte von ds mit den positiven Richtungen der Koordinatenaxen bildet.

169) Hinsichtlich der Funktionen φ, χ, ψ würde die Voraussetzung genügen, dass ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in einem den Bereich $\mathfrak{B}$ und dessen Begrenzung ganz im Innern enthaltenden grösseren Bereiche vorhanden und stetig sind.

begrenzte Körper ein bestimmtes Volumen und dieses wird durch den absoluten Wert des Ausdrucks:

$$\frac{1}{3}\iint D\,du\,dv$$

dargestellt, wobei das Doppelintegral über $\mathfrak{B}$ zu erstrecken ist[170]. (Volumenberechnung durch Zerlegung in *Pyramiden.*)

Die Aufgabe, das Volumen eines gegebenen Körpers $\mathfrak{K}$ zu berechnen, lässt sich indessen häufig einfacher lösen als durch Anwendung der vorangehenden Sätze. In vielen Fällen ist es nämlich möglich, eine einfach unendliche Flächenschar, insbesondere eine Schar paralleler Ebenen, von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass das Volumen der zwischen irgend zwei unendlich nahe benachbarten Flächen der Schar enthaltenen Schicht von $\mathfrak{K}$ ohne Schwierigkeit gefunden werden kann, und dann genügt zur Berechnung des Volumens von $\mathfrak{K}$ eine *einzige* Integration. Eben deswegen gilt als praktische Regel für die Volumenberechnung, zuerst zu versuchen, eine Flächenschar von der angegebenen Beschaffenheit aufzufinden. (Volumenberechnung durch Zerlegung in *Schichten.*)

Dieses Verfahren ist insbesondere auf Umdrehungskörper anwendbar und führt, wenn man die Schar der auf der Axe senkrechten Ebenen zur Zerschneidung benutzt, zu folgender Regel:

Wenn für ein endliches Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze b heissen möge, eine nirgends negative stetige Funktion $f(x)$ gegeben ist, so wird das Volumen desjenigen Körpers, welcher durch die Umdrehung des durch die Ungleichheiten:

$$a \leqq x \leqq b, \qquad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

abgegrenzten ebenen Bereiches um die Abscissenaxe entsteht, dargestellt durch den Ausdruck:

$$\pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Durch Multiplikation mit $\int_a^b f(x)\,dx$ und gleichzeitige Division durch

---

170) Dieser Satz ist mehrfacher Erweiterungen fähig. Insbesondere stellt der folgende von *C. F. Gauss* (Comm. Gott. 2 (1813) = Werke 5 (1877), p. 10) angegebene Satz eine solche Erweiterung dar:

Das Volumen eines Körpers ist gleich dem dritten Teile des über die gesamte Oberfläche zu erstreckenden Integrals $\int r\cos\alpha\,ds$, wo ds das Element der Oberfläche, r den Abstand dieses Elementes vom Koordinatenanfang und α den Winkel bedeutet, welchen die nach aussen gerichtete Normale der Oberfläche am Orte von ds mit der Richtung vom Koordinatenanfang gegen ds bildet.

die nämliche Zahl ergiebt sich hieraus die zweite *Guldin'sche* (vgl. Nr. 26) Regel: Das Volumen eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Inhalt seines Meridianschnittes multipliziert mit der Bahn, welche der Schwerpunkt der Fläche dieses Meridianschnittes bei der Umdrehung um die Axe beschreibt.

Wenn ein zusammenhängender endlicher Bereich $\mathfrak{K}$ im Gebiet von drei Veränderlichen u, v, w, welchem ein bestimmtes Volumen zukommt, und ein Bereich $\mathfrak{K}'$ im Gebiet von drei anderen Veränderlichen x, y, z durch drei Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v, w), \qquad y = \chi(u, v, w), \qquad z = \psi(u, v, w),$$

in denen φ, χ, ψ drei sowohl im Innern als auf der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ reguläre Funktionen bedeuten, gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sind und die Funktionaldeterminante (I B 1 b, Nr. 21):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \end{vmatrix}$$

in $\mathfrak{K}$ nirgends verschwindet, so hat der Bereich $\mathfrak{K}'$ ebenfalls ein bestimmtes Volumen und dieses wird dargestellt durch den absoluten Wert des über $\mathfrak{K}$ zu erstreckenden Integrals[171]):

$$\iiint \Delta \, du \, dv \, dw.$$

Vorschriften zur Volumenberechnung in der *nichteuklidischen* Geometrie finden sich bei *J. Bolyai* und *N. J. Lobatschefsky*[172]). Vereinfachungen derselben hat *M. Simon*[173]) angegeben.

IV. Die Linien im Raume.

29. Schmiegungsebene, Krümmungskreis, Haupt- und Binormale einer gewundenen Linie[174]). Wenn eine Linie l in der Nähe eines Punktes P_0 analytisch auf die in Nr. 2, I angegebene Weise

---

171) Vgl. Fussn. 152.

172) Vgl. *J. Frischauf,* Absolute Geom. nach *J. Bolyai,* Leipzig 1872, p. 79—80, und Elemente d. absol. Geom., Leipzig 1876, p. 98—100; *N. J. Lobatschefskij,* J. f. Math. 17 (1837), p. 307—320; *F. Engel* u. *P. Stäckel,* Urkunden zur Geschichte d. nichteukl. Geom. 1, *N. J. Lobatschefskij,* Leipzig 1898, p. 46—64, nebst Anmerkungen, p. 282—308. Einige kurze Bemerkungen stehen auch in *C. F. Gauss,* Werke 8, Göttingen 1900, p. 228—229 und p. 232—233.

173) *M. Simon,* Math. Ann. 42 (1893), p. 471.

174) Angaben über die ältere Litteratur, welche sich auf die in dieser und der folgenden Nr. zu behandelnden Begriffe bezieht, macht *B. de Saint-Venant,* J. éc. polyt. 18, cah. 30 (1845), p. 1—2.

so dargestellt werden kann, dass die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{Vmatrix}$$

nicht sämtlich gleich Null sind[175]), so haben die Normalebenen von l in irgend zwei verschiedenen, dem Punkte P_0 hinreichend nahe benachbarten Punkten P_1, P_2 von l eine im Endlichen liegende Schnittlinie, welche sich bei unbegrenzter Annäherung der Punkte P_1, P_2 an den Punkt P_0 einer Grenzlage nähert, die von der Art dieser Annäherung unabhängig ist und daher auch als Schnittlinie der Normalebene in P_0 mit einer unendlich nahe benachbarten Normalebene erklärt werden kann. Diese Grenzlage heisst die *Krümmungsaxe* (*Polarlinie*) von l im Punkte P_0.

Ferner liegen irgend drei *verschiedene* Punkte P_1, P_2, P_3, welche auf l in hinreichender Nähe von P_0 nach Belieben angenommen sind, niemals in gerader Linie und bestimmen daher eine Ebene. Auch diese Ebene nähert sich bei unbegrenzter Annäherung der Punkte P_1, P_2, P_3 an den Punkt P_0 einer festen Grenzlage, welche, da sie von der Art der Annäherung unabhängig ist, auch als Grenzlage der Verbindungsebene des Punktes P_0 mit *zwei* benachbarten Punkten von l, oder als Grenzlage der Verbindungsebene der Tangente von l

175) Die Singularitäten, welche eintreten können, wenn diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist, zerfallen nach *G. K. Ch. v. Staudt,* Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 110—118, und *Ch. Wiener,* Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 95—97, in acht Arten. (Vgl. auch *F. Klein,* Anw. d. Diff.- u. Int.-Rechn. auf Geom., autogr. Vorl. 1901, Leipzig 1902, p. 437 ff.) Denkt man sich nämlich einen längs l stetig fortschreitenden Punkt P durch P_0 hindurchgehen, so kann im Augenblick des Durchgangs:

1. der Punkt P seine Bewegungsrichtung,
2. die Tangente von l in P ihre Drehungsrichtung in der Schmiegungsebene,
3. die Schmiegungsebene von l in P ihre Drehungsrichtung um die Tangente

entweder beibehalten oder umkehren. Über die Darstellung dieser Singularitäten durch Modelle vgl. *Ch. Wiener* a. a. O. und Lehrb. d. darst. Geom. 1, Leipzig 1884, p. 214—217, sowie Deutsche Math.-Verein., Katalog math. und math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente, hrsg. v. *W. Dyck,* München 1892, Nr. 226, p. 298, und *L. Brill,* Katalog math. Modelle, Darmstadt 1892, Nr. 82—89, p. 23 und 73. Perspektivische Zeichnungen und weitere Litteratur giebt *W. Schell,* Allg. Theorie d. Kurven dopp. Krümmung, 2. Aufl., p. 13—17 und p. 39. Analytische Unterscheidungsmerkmale der erwähnten acht Arten von Singularitäten finden sich bei *H. B. Fine,* Amer. J. of math. 8 (1886), p. 156, *O. Staude,* ebd. 17 (1895), p. 359, und *A. Meder,* J. f. Math. 116 (1896), p. 50 und 247.

in P_0 mit *einem* zu P_0 benachbarten Punkte von l erklärt werden kann[176]). Diese Grenzlage heisst die *Schmiegungsebene* (*Oskulationsebene, Krümmungsebene*) von l in P_0. Sie wird, wenn ξ, η, ζ die Koordinaten eines veränderlichen ihr angehörenden Punktes bedeuten, dargestellt durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi - x_0 & \eta - y_0 & \zeta - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ausser den soeben erklärten sind die folgenden, jedesmal durch den Zusatz „von l in P_0" zu vervollständigenden Bezeichnungen in Gebrauch:

Krümmungs-, *Schmiegungs-* oder *Oskulationskreis* für denjenigen in der Schmiegungsebene liegenden und durch P_0 gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Krümmungsaxe liegt.

Derselbe bildet zugleich die Grenzlage des Kreises, welcher durch drei dem Punkte P_0 benachbarte Punkte von l hindurchgeht, für den Fall, dass diese drei Nachbarpunkte dem Punkte P_0 in irgend einer Weise unbegrenzt genähert werden.

Krümmungsmittelpunkt für den Mittelpunkt, *Radius der ersten Krümmung* oder *Krümmungsradius* für den Radius des Krümmungskreises und (*erste*) *Krümmung* für den reziproken Wert dieses Radius.

Hauptnormale für diejenige Normale, welche in der Schmiegungsebene liegt.

Sie ist im allgemeinen *nicht* Tangente der Linie der Krümmungsmittelpunkte. Als ihre positive Richtung gilt die Richtung von P_0 gegen den Mittelpunkt des zugehörigen Krümmungskreises.

Binormale[177]) für diejenige Normale, welche auf der Schmiegungsebene senkrecht steht.

Sobald über die positive Richtung der Tangente eine Festsetzung getroffen ist, gilt als positive Richtung der Binormale diejenige, welche so beschaffen ist, dass die positiven Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale ebenso zu einander liegen, wie die positiven Richtungen der Axen desjenigen Koordinatensystems, auf welches l bezogen ist.

Sowohl die Hauptnormalen als die Binormalen einer Linie l bilden im allgemeinen eine *windschiefe* Fläche.

---

176) Wegen der Beweise dieser Sätze vgl. *H. A. Schwarz,* Ann. di mat. (2) 10 (1880/82), p. 129 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 296.

177) Diese Bezeichnung ist eingeführt von *B. de Saint-Venant,* J. éc. polyt. 18, cah. 30 (1845), p. 17.

Jede gewundene Linie ist die *Striktionslinie* (Ort des Fusspunktes des gemeinsamen Lotes von irgend zwei unendlich nahe benachbarten Erzeugenden) der Fläche ihrer Binormalen. Umgekehrt kann eine windschiefe Fläche dann und nur dann als Fläche der Binormalen einer Linie angesehen werden, wenn ihre Striktionslinie die Erzeugenden senkrecht schneidet.

Die von *B. de Saint-Venant*[178]) behandelte Striktionslinie der Fläche der Hauptnormalen fällt *nicht* mit der Linie der Krümmungsmittelpunkte zusammen.

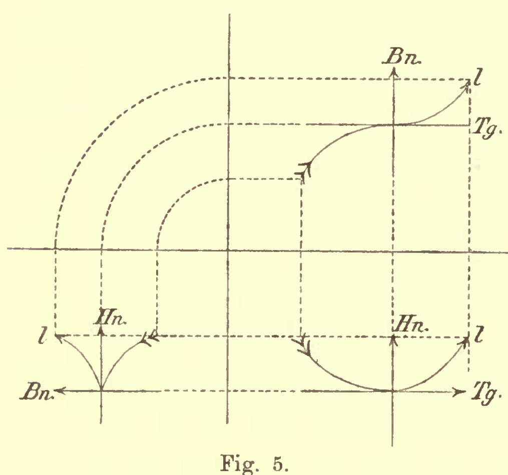


Fig. 5.

Rektifizierende Ebene für die Verbindungsebene der Tangente mit der Binormale und

Rektifizierende Gerade[179]) für die Grenzlage der Schnittlinie der rektifizierenden Ebene von l in P_0 mit der zu einem unendlich nahe benachbarten Punkt von l gehörenden rektifizierenden Ebene.

Sie steht senkrecht auf den beiden Hauptnormalen von l in P_0 und einem unendlich nahen Nachbarpunkte.

Begleitendes Dreikant für das von der Tangente, der Haupt- und der Binormale gebildete Geradenkreuz.

In welcher Weise l sich auf die Ebenen dieses Dreikants projiziert, zeigt Fig. 5.

30. Windung, Schmiegungskugel und Schmiegungsschraubenlinie einer gewundenen Linie. Eine gewundene Linie l heisst in einem Punkte P_0 *links* oder *rechts gewunden*, je nachdem für einen in P_0 auf der Schmiegungsebene (gleichgültig auf welcher Seite)

178) a. a. O. p. 29—32 und p. 44—48.

179) Diese Bezeichnungen sind von *Lancret,* Paris Mém. 1, (1805), p. 420, deswegen eingeführt worden, weil die sämtlichen rektifizierenden Geraden einer Linie l eine durch l gehende abwickelbare Fläche (*rektifizierende Fläche*) bilden, welche die Eigenschaft hat, dass l bei der Abwickelung dieser Fläche auf einer Ebene in eine Gerade übergeht.

stehenden und gegen den Mittelpunkt des Krümmungskreises blickenden Beschauer ein auf l von links nach rechts durch P_0 gehender Punkt ab- oder aufsteigend durch die Schmiegungsebene hindurchgeht[180]).

Wenn für sämtliche Punkte einer Linie l die im Anfang der Nr. 29 gemachte Voraussetzung erfüllt und die positive Tangentenrichtung festgelegt ist, so kann man einem beliebigen Punkt P von l drei Punkte T, H, B auf einer um einen festen Mittelpunkt M mit dem Radius Eins beschriebenen Kugel durch die Festsetzung zuordnen, dass die Richtungen von M gegen T, H, B beziehentlich mit den positiven Richtungen der zu P gehörenden Tangente, Haupt- und Binormale von l übereinstimmen sollen. Ändert sich die positive Tangentenrichtung von l stetig mit der Lage des Berührungspunktes, was im Nachfolgenden durchweg vorausgesetzt werden soll, so entsprechen stetigen Bewegungen von P auf l auch stetige Verschiebungen der Punkte T, H, B. Die Linien, welche von diesen Punkten beschrieben werden, während P die Linie l durchläuft, heissen sphärische Abbilder (III D 3, Nr. 7) von l, und zwar beziehentlich die *sphärische Indikatrix der Tangenten*, die *sphärische Indikatrix der Hauptnormalen* und die *sphärische Indikatrix der Binormalen*[181]).

Als positive Richtungen der von T und H beschriebenen Linien nimmt man gewöhnlich diejenigen, in welchen sich T und H bewegen, wenn P auf l in positivem Sinne fortschreitet. Dagegen pflegt man bei der von B beschriebenen Bahn nicht auf die Art der Bewegung des Punktes P, sondern darauf zu achten, in welchem Sinne die Strecke MB bei gegebener Bewegung von B sich um die Strecke MT herumdreht[182]), und bei der Berechnung der Länge eines von B in vorgeschriebener Richtung durchlaufenen Weges diejenigen Teile, für welche jene Drehung im positiven Sinne (MH gegen MB) erfolgt, mit dem Vorzeichen $+$, die andern mit dem Vorzeichen $-$ in Anschlag zu bringen.

R. Hoppe hat vorgeschlagen[183]), die unter Beachtung der vor-

---

180) Dies entspricht dem Sprachgebrauch der Technik. Dagegen gebrauchen die Botaniker und einige Mathematiker, z. B. *G. Scheffers,* Einf. in d. Theorie d. Kurven, p. 158 u. p. 200, die Worte links und rechts gewunden in umgekehrter Bedeutung.

181) Vgl. *G. Scheffers,* Einf. in d. Theorie der Kurven, p. 240—241. Ebendaselbst wird, p. 243—251 u. p. 350—352, angegeben, wie man bei gegebener sphärischer Indikatrix der Tangenten oder der Haupt- oder der Binormalen eine Linie finden kann, zu der diese Indikatrix gehört.

182) Vgl. *A. Kneser,* J. f. Math. 113 (1894), p. 92—94.

183) *R. Hoppe,* J. f. Math. 58 (1861), p. 374, und Anal. Geom. 1, p. 49—51.

stehenden Bestimmungen und der in Nr. **10** angegebenen Vorzeichenregel zu berechnenden Längen τ, $\varkappa$, ϑ der Bögen, welche von den Punkten T, H, B beschrieben werden, wenn P von einer festen Anfangslage ausgehend auf l einen Weg von der — ebenfalls gemäss Nr. **10** mit einem bestimmten Vorzeichen versehenen — Länge s zurücklegt, beziehentlich als den zur Bogenlänge s gehörenden *Krümmungswinkel, Torsionsbogen* und *Torsionswinkel* von l zu bezeichnen.

Mehr gebräuchlich als diese Ausdrücke für die drei Funktionen τ, $\varkappa$, ϑ von s sind gewisse Bezeichnungen ihrer Differentiale. Ist nämlich ds ein Differential der Bogenlänge s und sind $d\tau$, $d\varkappa$, $d\vartheta$ die entsprechenden Differentiale der Funktionen τ, $\varkappa$, ϑ, so nennt man:

$d\tau$ den zu ds gehörenden *Kontingenzwinkel,*

$d\varkappa$ den zu ds gehörenden *Winkel der ganzen Krümmung* und

$d\vartheta$ den zu ds gehörenden *Windungs-, Schmiegungs-* oder *Flexionswinkel* (zuweilen auch *Torsionswinkel*) von l.

Wenn ds positiv ist, so ist bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung:

$d\tau$ gleich dem spitzen Winkel zwischen den Tangenten,

$d\varkappa$ gleich dem spitzen Winkel zwischen den Hauptnormalen, und

$d\vartheta$ gleich dem spitzen Winkel zwischen den Schmiegungsebenen (oder auch den Binormalen) von l in den Endpunkten des Bogenelementes ds,

wobei jedoch der zuletzt erwähnte Winkel mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ zu versehen ist, je nachdem ein längs l in der positiven Tangentenrichtung fortschreitender Punkt am Orte von ds die Schmiegungsebene von l in dem gleichen Sinne durchdringt, wie dies die positive Richtung der Binormale (Nr. **29**) thut, oder nicht[184]).

Der Differentialquotient $\frac{d\tau}{ds}$ stimmt mit der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ von l im Endpunkt des Bogens s überein.

Der Differentialquotient $\frac{d\vartheta}{ds}$ heisst die *zweite Krümmung, Windung, Schmiegung, Flexion* oder *Torsion* und der Differentialquotient $\frac{d\varkappa}{ds}$ die *ganze Krümmung* von l im Endpunkt des Bogens s. Die reziproken Werte dieser Differentialquotienten heissen beziehentlich der *Radius der*

184) Diese Festsetzung über das Vorzeichen ist von *F. Frenet,* Thèse, Toulouse 1847 = J. de math. (1) 17 (1852), p. 439, getroffen worden, doch weichen manche Verfasser von derselben ab. Die verschiedenen in der Litteratur vorkommenden Bestimmungen des fraglichen Vorzeichens hat *A. Kneser,* J. f. Math. 113 (1894), p. 89, eingehend erörtert. Vgl. auch *O. Staude,* Amer. J. of math. 17 (1895), p. 361 u. 372.

zweiten Krümmung (*Windungs-, Schmiegungs-, Flexions-* oder *Torsionsradius*)[185]) und der *Radius der ganzen Krümmung* von l in dem bezeichneten Punkte.

Sind die Axen des Koordinatensystems, auf welches l bezogen ist, so zu einander gelegen wie die Richtungen nach Westen, Süden und oben (unten), so sind die Windung, der Windungsradius und der Windungswinkel von l in P_0 auf Grund der obigen Festsetzungen positiv oder negativ (negativ oder positiv), je nachdem l in P_0 rechts oder links gewunden ist, und umgekehrt[186]).

Wenn bei Anwendung der in Nr. 2, I angegebenen analytischen Darstellung einer Linie l die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ x_0''' & y_0''' & z_0''' \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist, so liegen irgend vier verschiedene auf l in hinreichender Nähe von P_0 nach Belieben angenommene Punkte niemals in einer Ebene und bestimmen daher eine Kugel mit endlichem Radius. Werden diese Nachbarpunkte in irgend einer Weise dem Punkte P_0 unbegrenzt genähert, so nähert sich die durch sie hin-

185) Eine ähnlich einfache geometrische Bedeutung wie dem Radius der ersten Krümmung kommt dem Radius der zweiten Krümmung *nicht* zu. Ein erster Versuch einer geometrischen Deutung findet sich in einer Abhandlung von *Th. Olivier,* J. éc. polyt. 15, cah. 24 (1835), p. 86. Später hat *B. de Saint-Venant,* J. éc. polyt. 18, cah. 30 (1845), p. 40—41 u. 53—54, eine solche Deutung durch folgende Sätze gegeben:

I. Trägt man den zu P_0 gehörenden Krümmungsradius ϱ_0 der Linie l von P_0 aus auf der Tangente ab — gleichgültig nach welcher Seite — legt sodann durch den erhaltenen Punkt Q eine Ebene senkrecht zur Tangente und bringt dieselbe mit der Tangentenfläche von l zum Durchschnitt, so stimmt der Radius des zu Q gehörenden Krümmungskreises der Schnittlinie (dessen Mittelpunkt auf der rektifizierenden Geraden liegt) mit dem absoluten Wert des Windungsradius von l in P_0 überein.

II. Schneidet man den (die Tangentenfläche oskulierenden) Rotationskegel, welcher die rektifizierende Gerade von l in P_0 zur Axe und die Tangente zur Erzeugenden hat, durch eine zur Axe senkrechte Ebene im Abstand ϱ_0 von der Spitze P_0, so ist der Radius des Schnittkreises gleich dem absoluten Wert des Windungsradius. Vgl. *W. Schell,* Allg. Theorie d. Kurven dopp. Krg., 2. Aufl., p. 31—35, wo eine ähnliche Deutung auch für den Radius der ganzen Krümmung gegeben ist.

186) Vgl. *A. Kneser,* J. f. Math. 113 (1894), p. 89. — Einen Vorschlag, die Vorzeichen der ersten, zweiten und ganzen Krümmung in anderer als der im Text beschriebenen Weise festzusetzen, macht *R. v. Lilienthal,* Math. Ann. 42 (1893), p. 502.

durchgehende Kugel einer festen Grenzlage, welche von der Art der erwähnten Annäherung unabhängig ist[187]) und daher noch in mannigfacher Weise auf andere Art (z. B. als Grenzlage der durch den Krümmungskreis von l in P_0 und *einen* unendlich nahen Nachbarpunkt von l gehenden Kugel) erklärt werden kann. Diese Kugel heisst die *oskulierende* oder *Schmiegungskugel* von l in P_0. Ihr Mittelpunkt liegt auf der Krümmungsaxe von l in P_0 und stimmt überein mit der Grenzlage des Schnittpunktes dieser Krümmungsaxe mit der Normalebene von l in einem zu P_0 unendlich nahe benachbarten Punkte und auch allgemeiner mit der Grenzlage des Schnittpunktes der Normalebenen von l in drei beliebigen, dem Punkte P_0 unendlich nahe benachbarten Punkten[188]).

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Schmiegungskugeln einer Linie l heisst deren *Polkurve.* Dieselbe fällt mit der Gratlinie (III D 5) der abwickelbaren Fläche der Krümmungsaxen von l zusammen. Die Tangente und die Schmiegungsebene der Polkurve fallen beziehentlich mit der Krümmungsaxe und der Normalebene der ursprünglichen Linie zusammen. Die Normalebene und die rektifizierende Ebene der Polkurve sind beziehentlich zur Schmiegungsebene und zur rektifizierenden Ebene der ursprünglichen Linie parallel[189]).

Als *Schmiegungsschraubenlinie* einer Linie l in einem Punkte P_0 bezeichnet man diejenige durch P_0 gehende gemeine Schraubenlinie

---

187) Vgl. *H. A. Schwarz,* Ann. di mat. (2) 10 (1880/82), p. 129 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 296.

188) Denjenigen Kegel, welcher die Schmiegungskugel längs des Krümmungskreises berührt, hat *W. Schell,* Allg. Theorie d. Kurven dopp. Krg., 2. Aufl., p. 67—70, den *Schmiegungsrotationskegel* von l in P_0 genannt. Derselbe berührt l in P_0 mindestens von der dritten Ordnung. — Einen zweiten zu l in enger Beziehung stehenden Rotationskegel hat schon *B. de Saint-Venant,* J. éc. polyt. 18, cah. 30 (1845), p. 42—43, betrachtet, nämlich denjenigen, der seine Spitze in P_0 hat und die *Tangentenfläche* von l längs der zu P_0 gehörenden Tangente oskuliert. Dieser Kegel entsteht durch Umdrehung der Tangente um die rektifizierende Gerade. Vgl. auch *W. Schell,* Allg. Theorie d. Kurven dopp. Krg., 2. Aufl., p. 35, und *G. Scheffers,* Einf. in d. Theorie d. Kurven, p. 254—257. — Auf einen dritten, vom vorigen verschiedenen Rotationskegel hat *G. Scheffers* a. a. O. p. 257—260, aufmerksam gemacht, nämlich denjenigen, der seine Spitze ebenfalls in P_0 hat und dort *mit l selbst* eine Berührung mindestens von der dritten Ordnung eingeht.

189) Über die Beziehungen zwischen entsprechenden Elementen einer Linie und ihrer Polkurve und den Krümmungen und Windungen beider Linien an den Orten dieser Elemente vgl. *F. Frenet,* J. de math. (1) 17 (1852), p. 443—444, oder *L. Bianchi,* Vorl. über Differentialgeom., deutsch von *M. Lukat,* Leipzig 1896, p. 25f. — Die Aufgabe, aus den Gleichungen der Polkurve die der ursprünglichen Linie abzuleiten, hat *R. Hoppe,* J. f. Math. 58 (1861), p. 374, behandelt.

(isogonale Trajektorie der Erzeugenden eines geraden Kreiscylinders, s. III D 4, Nr. 20), welche in diesem Punkte die gleiche Tangente, Krümmungsaxe und Windung hat wie l. Ihre Axe ist der rektifizierenden Geraden parallel und fällt mit der Linie des kürzesten Abstandes der Hauptnormale in P_0 von der nächstfolgenden Hauptnormale zusammen[190]). Da bei einer gemeinen Schraubenlinie der Mittelpunkt der Schmiegungskugel immer mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt, bei einer beliebigen gewundenen Linie dagegen im allgemeinen nicht, so haben eine gewundene Linie und ihre Schmiegungsschraubenlinie im allgemeinen nur eine Berührung *zweiter* Ordnung[191]). Ausser der Schmiegungsschraubenlinie giebt es im allgemeinen noch unendlich viele andere gemeine Schraubenlinien, die eine gegebene Linie l in einem gegebenen Punkte P_0 von der zweiten Ordnung berühren[192]); aber eine gemeine Schraubenlinie, die mit l in P_0 eine Berührung dritter oder höherer Ordnung hätte, ist im allgemeinen nicht vorhanden. Wohl aber lässt sich immer eine Loxodrome einer Rotationskegelfläche angeben, welche l in P_0 mindestens von der dritten Ordnung berührt und daher die *konische Schmiegungsloxodrome* von l in P_0 genannt wird[193]), und ebenso ist es, wie *Th. Olivier*[194]) bemerkt hat, auf mannigfach verschiedene Weise möglich, eine allgemeine Schraubenlinie (isogonale Trajektorie der Erzeugenden eines *beliebigen* Cylinders) so zu bestimmen, dass sie mit l in P_0 eine Berührung mindestens dritter Ordnung hat.

Dass, und wie man eine Raumkurve dritter Ordnung finden kann, die mit einer gegebenen Linie in einem gegebenen gewöhnlichen

190) Vgl. *W. Schell*, a. a. O. p. 120—121. Dieselbe Gerade ist zugleich die Axe der von *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 5 (1867), p. 21—23, bestimmten unendlich kleinen Schraubung, welche das begleitende Dreikant in eine benachbarte Lage überführt.

191) Vgl. *Th. Olivier*, J. éc. polyt. 15, cah. 24 (1835), p. 68. Vorher, p. 62, wird der gleiche Satz damit begründet, dass eine durch einen gegebenen Punkt P_0 hindurchgehende gemeine Schraubenlinie nach Gestalt und Lage schon durch fünf Konstante bestimmt ist, während dafür, dass eine solche Schraubenlinie in P_0 mit einer gegebenen Linie eine Berührung dritter Ordnung habe, die Erfüllung von sechs Bedingungen notwendig ist.

192) Vgl. *Th. Olivier*, a. a. O. p. 252—262, und *G. Scheffers*, Einf. in d. Theorie der Kurven, p. 191—197. An beiden Orten finden sich Angaben darüber, wie die fraglichen Schraubenlinien zu einander liegen.

193) *W. Schell*, a. a. O. p. 126—127.

194) *Th. Olivier*, a. a. O. p. 64, 80 u. 86—90. Dass die in dieser Abhandlung als „développantes des développées de l'hélice circulaire" bezeichneten Linien allgemeine Schraubenlinien sind, hat *Olivier* noch nicht erkannt, doch folgt dies aus der in Fussn. 208 angeführten Arbeit von *J. Bertrand*.

Punkte eine Berührung fünfter Ordnung eingeht, hat *W. R. Hamilton* [195]) auseinandergesetzt.

31. Formeln und Lehrsätze aus der Lehre von den gewundenen Linien. Nach Festlegung der positiven Tangentenrichtung einer Linie l sei s deren gemäss Nr. **10** als positiv oder negativ anzusehende Bogenlänge von einem festen Anfangspunkte bis zu einem beweglichen Punkte P, für welchen die zu Anfang der Nr. **29** angegebene Voraussetzung zutrifft, und es seien:

x, y, z die Koordinaten des Punktes P,

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungscosinus der positiven Richtung der Tangente,

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungscosinus der positiven Richtung der Hauptnormale (Nr. **29**),

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungscosinus der positiven Richtung der Binormale (Nr. **29**) von l in P,

a, b, c die Richtungscosinus derjenigen Richtung der rektifizierenden Geraden, welche mit der positiven Richtung der Binormale einen spitzen Winkel bildet,

ϱ, r, R^* die Radien der ersten, zweiten und der ganzen Krümmung,

R der Radius der Schmiegungskugel von l in P und endlich

$d\tau, d\varkappa, d\vartheta$ beziehentlich der Kontingenzwinkel, der Winkel der ganzen Krümmung und der Windungswinkel, welche dem Bogendifferential ds entsprechen;

dann gelten die folgenden Formeln und Sätze [196]):

I. Wenn:

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = A; \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = B; \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x = C$$

und der positive Wert von $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = D$ gesetzt wird, so ist [197]):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{ds^3};$$

---

195) *W. R. Hamilton,* Elemente der Quaternionen, deutsch von *P. Glan,* 2, Leipzig 1884, p. 158—160.

196) Ausführliche Zusammenstellungen von Formeln finden sich bei *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 14 (1835), p. 60—62 = Ges. Werke 7, Berlin 1891, p. 15—18; *B. de Saint-Venant,* J. éc. polyt. 18, cah. 30 (1845), p. 64—72, und *W. Láska,* Samml. v. Formeln d. rein. u. angew. Math., Braunschweig 1888—1894, p. 536—553. — Wenn man die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche nimmt, treten bei vielen Formeln erhebliche Vereinfachungen ein. Vgl. *G. Scheffers,* Einf. in d. Theorie d. Kurven, p. 178 ff. u. p. 348 ff. Mit den Hülfsmitteln der Quaternionentheorie hat *W. R. Hamilton,* Elem. d. Quaternionen, deutsch von *P. Glan,* 2, Leipzig 1884, die Lehre von den Raumkurven eingehend behandelt.

197) Vgl. *Lancret,* an dem in Fussn. 179 a. O. p. 429—434.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix};$$

$$\alpha_2 = \frac{Bdz - Cdy}{Dds}, \quad \beta_2 = \frac{Cdx - Adz}{Dds}, \quad \gamma_2 = \frac{Ady - Bdx}{Dds};$$

$$\alpha_3 = \frac{A}{D}, \quad \beta_3 = \frac{B}{D}, \quad \gamma_3 = \frac{C}{D}.$$

Ferner ist:

$$d\varkappa^2 = d\tau^2 + d\vartheta^2,$$

oder:

$$\frac{1}{R^{*2}} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$$

und:

$$a = \alpha_1 \frac{d\vartheta}{d\varkappa} + \alpha_3 \frac{d\tau}{d\varkappa}; \quad b = \beta_1 \frac{d\vartheta}{d\varkappa} + \beta_3 \frac{d\tau}{d\varkappa}; \quad c = \gamma_1 \frac{d\vartheta}{d\varkappa} + \gamma_3 \frac{d\tau}{d\varkappa}.$$ [198])

II. Die Ableitungen der neun Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_3$ in Bezug auf s können durch diese neun Richtungscosinus selbst und die Radien ϱ und r der ersten und zweiten Krümmung ausgedrückt werden mittelst der Formeln:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{\alpha_2}{\varrho}, \quad \frac{d\alpha_2}{ds} = -\frac{\alpha_1}{\varrho} + \frac{\alpha_3}{r}, \quad \frac{d\alpha_3}{ds} = -\frac{\alpha_2}{r}$$

und der sechs übrigen Gleichungen, welche hieraus durch Vertauschung von α mit β und γ entstehen (*Frenet*'sche Formeln)[199]).

III. Die Koordinaten x, y, z des Punktes P sind mit den Koordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunktes der zugehörigen Schmiegungskugel verbunden durch die Gleichungen[200]):

---

198) Vgl. *Lancret*, a. a. O. p. 430—431, und *B. de Saint-Venant*, a. a. O. p. 22 ff. (u. p. 40 f.), wo auch die Gleichungen, sowie die Krümmung und Windung der *Gratlinie der rektifizierenden Fläche* ermittelt sind. Die Elemente dieser Gratlinie giebt auch *G. Scheffers*, Einf. in d. Theorie d. Kurven, p. 317—321 u. 354 ff.

199) Vgl. *F. Frenet*, Thèse, Toulouse 1847, oder J. de math. (1) 17 (1852), p. 438—440, und *J. A. Serret*, J. de math. (1) 16 (1851), p. 193. — Wie *G. Darboux*, Leçons sur la th. gén. des surf. 1, p. 9—10, gezeigt hat, kann man den Beweis der *Frenet*'schen Formeln fast ohne Rechnung führen, wenn man sich vorstellt, dass das begleitende Dreikant an l entlang gleitet, und die Bewegung eines Dreikants mit fester Spitze, dessen Kanten beständig zu denen des begleitenden Dreikants parallel bleiben, mit den Hülfsmitteln der Kinematik verfolgt (IV 3, Nr. **21**). Den gleichen Kunstgriff hatte schon *E. J. Routh*, Quart. J. 7 (1866), p. 37, zur Lösung von Aufgaben aus der Lehre von den Raumkurven angewendet. Eine eingehende Darstellung der Bewegung des begleitenden Dreikants findet sich bei *W. Schell*, Allg. Theorie d. Kurven dopp. Krg., 2. Aufl., p. 136—141.

200) *C. G. J. Jacobi*, a. a. O. p. 61, bez. 17, oder *B. de Saint-Venant*, a. a. O. p. 33, oder *F. Frenet*, a. a. O. p. 441—442.

$$\xi = x + \varrho\alpha_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\alpha_3,$$

$$\eta = y + \varrho\beta_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\beta_3,$$

$$\zeta = z + \varrho\gamma_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\gamma_3,$$

aus denen:

$$R^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$$

folgt.

32. Differentialinvarianten und natürliche Gleichungen einer Linie im Raume. Wird eine Linie l ohne Änderung ihrer Gestalt irgendwie im Raume bewegt, so erleiden die Radien ϱ, r der ersten und zweiten Krümmung keine Änderung und das gleiche gilt auch von den nach der Bogenlänge s genommenen Ableitungen:

$$\frac{d\varrho}{ds}, \frac{d^2\varrho}{ds^2}, \ldots, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \ldots.$$

Die Radien ϱ, r und alle ihre Ableitungen nach s sind demnach „Differentialinvarianten" (II A 6, Nr. **13**) von l gegenüber allen Bewegungen im Raume und zugleich auch insofern die *einzigen* wesentlichen Differentialinvarianten, als jede andere Differentialinvariante gegenüber Bewegungen im Raume sich als eine Funktion der Grössen:

$$\varrho, \frac{d\varrho}{ds}, \frac{d^2\varrho}{ds^2}, \ldots, r, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \ldots$$

darstellen lässt[201]).

Denkt man sich umgekehrt ursprünglich nicht eine Linie l, sondern irgend zwei Funktionen $\varrho(s)$, $r(s)$ gegeben, welche die Bedingungen $\varrho(s) > 0$, $r(s) \gtrless 0$ erfüllen, so giebt es nach willkürlicher Festsetzung des positiven Drehungssinnes im Raume immer eine ihrer Gestalt nach völlig bestimmte Linie, deren Bogenlänge bis auf eine Konstante mit s und deren Radien erster und zweiter Krümmung beziehentlich mit $\varrho(s)$, $r(s)$ übereinstimmen[202]). Die Gleichungen, durch welche ϱ und r als Funktionen von s dargestellt werden, heissen deswegen die *natürlichen Gleichungen* der Linie[203]). Hiervon abweichend bezeichnet jedoch *G. Scheffers*[204]) als

201) Vgl. *S. Lie,* Vorl. über kontinuierliche Gruppen, hrsg. v. *G. Scheffers,* Leipzig 1893, p. 674—682, und *G. Scheffers,* Einf. in d. Theorie d. Kurven, p. 201—208.

202) Vgl. *S. Lie,* Vorl. über kontinuierliche Gruppen, hrsg. v. *G. Scheffers,* Leipzig 1893, p. 684—694, sowie *L. Bianchi,* Vorles. über Differentialgeometrie, p. 13—15, oder *G. Scheffers,* a. a. O. p. 210—219.

203) Vgl. Nr. **15**. — Die Aufgabe, aus den natürlichen Gleichungen einer

natürliche Gleichungen einer Linie im allgemeinen diejenigen beiden Gleichungen, welche die Differentialinvarianten niedrigster Ordnung ϱ, $\frac{d\varrho}{ds}$ und r mit einander verbinden, und in dem Ausnahmefall $\varrho = \text{Const.}$ eben die Gleichung $\varrho = \text{Const.}$ zusammen mit derjenigen Gleichung, welche r mit $\frac{dr}{ds}$ verknüpft.

Ist eine Parameterdarstellung einer Linie gegeben, so hat man, wenn man ϱ und r als Funktionen von s darstellen will, neben Differentiationen und Eliminationen auch eine Quadratur auszuführen, während die Aufstellung der beiden erwähnten Gleichungen zwischen den Differentialinvarianten niedrigster Ordnung nur Differentiationen und Eliminationen erfordert.

Nachdem für eine Linie l die Winkel τ, $\varkappa$, ϑ (Nr. **30**) und die neun Richtungscosinus $\alpha_1, \ldots \gamma_3$ (Nr. **31**) als Funktionen der Bogen länge s dargestellt sind, denke man sich für s eine neue Veränderliche $\bar{s}$ durch eine Gleichung $s = f(\bar{s})$ eingeführt, in welcher $f(\bar{s})$ eine zugleich mit $\bar{s}$ verschwindende und bei wachsendem $\bar{s}$ ebenfalls wachsende Funktion bedeutet, und durch $\bar{\tau}$, $\bar{\varkappa}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\alpha}_1, \ldots \bar{\gamma}_3$ diejenigen Funktionen von $\bar{s}$ bezeichnet, welche so aus τ, $\varkappa$, ϑ, $\alpha_1, \ldots \gamma_3$ entstehen. Dann giebt es immer eine ihrer Gestalt und Stellung nach (d. h. bis auf eine Parallelverschiebung) völlig bestimmte Linie $\bar{l}$, für welche $\bar{s}$, $\bar{\tau}$, $\bar{\varkappa}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\alpha}_1, \ldots \bar{\gamma}_3$ die gleiche Bedeutung haben wie s, τ, $\varkappa$, ϑ, $\alpha_1, \ldots \gamma_3$ für l. Von je zwei in dieser Beziehung zu einander stehenden Linien sagt *R. Hoppe*[205]), dass sie sich nur durch die „*Dimensionen*" unterscheiden, aber in den „*inneren Beziehungen*" übereinstimmen. Demgemäss stellt er neben die Einteilung der Eigenschaften einer Linie in solche, die sich lediglich auf die Gestalt und solche, die sich auch auf die Lage beziehen, eine zweite, die vorige durchkreuzende, in Eigenschaften, die nur die inneren Beziehungen, und Eigenschaften, welche die Dimensionen betreffen. Zugleich empfiehlt er, bei der Lösung von Aufgaben zuerst nur die inneren Beziehungen und dann, davon getrennt, die Dimensionen zu ermitteln. Dies kann dadurch

---

Linie deren Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten zu finden, ist von *R. Hoppe*, J. f. Math. 60 (1862), p. 182, behandelt worden. *S. Lie* hat, Christiania Videnskabsselskabs Forh., 1882, Nr. 22, gezeigt, wie dieselbe auf die Integration einer Differentialgleichung vom *Riccati*'schen Typus (II A 4 b, Nr. 8) zurückgeführt werden kann. Diese Zurückführung haben auch *G. Darboux*, Leçons sur la théorie gén. des surf. 1, p. 19—23, und *G. Scheffers*, a. a. O. p. 211—215, eingehend behandelt.

204) a. a. O. p. 210f.

205) Anal. Geom. 1, p. 61.

geschehen, dass man die eben erwähnten natürlichen Gleichungen durch ein anderes gleichwertiges System von zwei Gleichungen ersetzt, nämlich erstens eine von s freie und daher zu den inneren Beziehungen gehörende Gleichung zwischen τ und ϑ allein — die sogenannte *spezifische Gleichung*[206]) — und zweitens eine die Bogenlänge s enthaltende Gleichung, welche die Dimensionen bestimmt.

Nachdem *V. Puiseux*[207]) durch rein analytische Betrachtungen gezeigt hatte, dass die gemeine Schraubenlinie die *einzige* (reelle) gewundene Linie ist, deren Krümmung und Windung beide konstant sind (III D 4, Nr. 20), gab *J. Bertrand*[208]) einen geometrischen Beweis des gleichen Satzes, der zugleich ergab, dass jede Linie, für welche das Verhältnis der Krümmung zur Windung konstant ist, eine allgemeine Schraubenlinie (Nr. **30**, Ende) sein müsse. Wenig später begründete *J. A. Serret*[209]) diesen letzteren Satz auf analytischem Wege und bestimmte zugleich alle Linien, für welche die Windung[210]) oder die Krümmung einen konstanten Wert hat. Gleichzeitig fand *J. Bertrand*[211]), dass, abgesehen von den gemeinen Schraubenlinien, einer gegebenen Linie l dann und nur dann eine zweite Linie l' zugeordnet werden kann, welche die gleichen Hauptnormalen hat, wenn zwischen der Krümmung und Windung von l in einem beliebigen Punkte eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht[212]). Ist insbesondere die Krümmung von l konstant, die Windung dagegen nicht, so ist die Beziehung zwischen den Linien l, l', wie schon *G. Monge* bemerkt hat[213]), eine gegenseitige und jede von ihnen der Ort der Krümmungsmittelpunkte

---

206) Vgl. *R. Hoppe,* J. f. Math. 63 (1864), p. 122 ff. und Anal. Geom. 1, p. 53 u. p. 70 ff. An beiden Orten wird für verschiedene einfachere Fälle die Aufgabe gelöst, alle Linien von gegebener spezifischer Gleichung zu bestimmen.

207) J. de math. (1) 7 (1842), p. 65—69. In ähnlicher Weise hat *Puiseux* den Fall, dass das Verhältnis der Krümmung zur Windung konstant ist, J. de math. (1) 16 (1851), p. 208 ff. behandelt.

208) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 423 f.

209) *J. A. Serret,* Brief an *J. Liouville,* abgedr. in Note 1, zu *G. Monge,* Applic. de l'anal., 5. éd. 1850, p. 562 ff. Vgl. auch J. de math. (1) 16 (1851), p. 197 ff.

210) Weitere Litteratur über Linien konstanter Windung giebt *G. Darboux,* Leçons sur la théorie gén. des surf. 4, p. 429.

211) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 332 ff. Vgl. auch *J. A. Serret,* J. de math. (1) 16 (1851), p. 499, sowie eine von *A. Mannheim,* J. de math. (2) 17 (1872), p. 406, gegebene geometrische Ableitung. Scheinbare Ausnahmefälle erörtert *G. Darboux,* Leçons sur la théorie gén. des surf. 1, p. 14 f.

212) Über die Gleichungen dieser Linien vgl. *L. Bianchi,* Vorl. über Differentialgeom., deutsch v. *M. Lukat,* Leipzig 1896, p. 32—34.

213) Vgl. *G. Darboux,* Leçons sur la théorie gén. des surf. 1, p. 16—17, Anmerkung.

der andern. Ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung aller gewundenen Linien, bei denen die Radien ϱ, r der ersten und zweiten Krümmung und die Bogenlänge s durch eine beliebige Gleichung verknüpft sind, gab *S. Lie*[214]), nachdem *A. Enneper*[215]) mehrere von den bereits erwähnten verschiedene spezielle Fälle erledigt hatte. Der Fall, dass die gegebene Gleichung zwischen ϱ, r und s die besondere Form $\frac{\varrho}{r} = f(s)$ hat, ist von *G. Pirondini*[216]) behandelt worden.

33. Filar- und Plan-Evolventen und -Evoluten. Wird längs einer Linie l ein biegsamer aber nicht dehnbarer Faden aufgelegt und sodann von einem beliebigen Punkte der Linie an von dieser so abgewickelt, dass er stets gespannt bleibt, so dass in jedem Augenblick das abgewickelte geradlinige Fadenstück in seinem einen Endpunkt die Linie l berührt, und dass seine Länge der Länge des abgewickelten Bogens gleichkommt, so beschreibt das freie Ende des Fadens eine sogenannte *Filarevolvente* von l.

Umgekehrt heisst jede Linie, aus welcher l in der beschriebenen Weise als Evolvente abgeleitet werden kann, eine *Filarevolute* von l.

Wie zuerst *G. Monge*[217]) bemerkte, hat jede gegebene krumme Linie l unendlich viele verschiedene Evoluten, welche sämtlich auf der abwickelbaren Fläche der Krümmungsaxen (*Polarfläche*) von l liegen und auf dieser *geodätische* Linien (III D 3, IV) bilden. Die erwähnte Fläche wird deswegen auch als *Evolutenfläche* von l bezeichnet.

Die von ein und demselben Punkt einer Evolvente l an zwei verschiedene Evoluten gezogenen Tangenten bilden einen konstanten, d. h. von der Lage des Evolventenpunktes unabhängigen Winkel mit einander. Ist die Evolutenfläche $\mathfrak{E}$ von l gegeben, so kann man einen Punkt P mechanisch nötigen, die Linie l zu beschreiben, indem man P mit *zwei* über $\mathfrak{E}$ sich frei hinspannenden Fäden fest verbindet[218]).

---

214) *S. Lie,* Christiania Videnskabsselskabs Forh. 1882. Vgl. Fussn. 203.

215) *A. Enneper,* Gött. Nachr. 1866, p. 134, und 1881, p. 291, sowie Math. Ann. 19 (1882), p. 72.

216) *G. Pirondini,* J. f. Math. 109 (1892), p. 238.

217) *G. Monge,* Paris Sav. étr. 10 (1785) und Applic. de l'anal., § XXVII. — Über die Ermittelung der Evoluten einer gegebenen Linie und die Beziehungen zwischen den Kontingenz- nnd Schmiegungswinkeln beider Linien in entsprechenden Punkten vgl. auch *Lancret,* an dem in Fussn. 179 a. O. p. 435 ff. und *H. Molins,* J. de math. (1) 8 (1843), p. 379. In erheblich einfacherer Weise haben *G. Darboux,* Leçons sur la théorie gén. des surf. 1, p. 17 f. und *P. Stäckel,* Math. Ann. 43 (1893), p. 174—176, die Lehre von den Filarevoluten behandelt.

218) *G. Monge,* Applic. de l'anal., § XXVII, No. XXVIII.

Wenn eine Linie l nicht eben ist, so gehört weder ihre Polkurve, noch die Linie ihrer Krümmungsmittelpunkte zu den Filarevoluten von l.[219])

Lässt man eine Ebene ohne Gleitung sich so an einer gewundenen Linie l entlang bewegen, dass sie immer Schmiegungsebene derselben bleibt, so beschreibt jeder Punkt der Ebene eine sogenannte *Planevolvente* von l. Fragt man umgekehrt nach einer Linie, aus welcher l in der beschriebenen Weise abgeleitet werden kann, so wird man, wie schon *Lancret*[220]) bemerkte, auf die Polkurve von l geführt. Diese Polkurve wird deswegen auch als die *Planevolute* von l bezeichnet.

Zwei gewundene Linien werden vielfach *parallel* genannt, wenn sie als Planevolventen ein und derselben dritten Linie angesehen werden können.

V. Anfangsgründe der Flächentheorie.

34. Fundamentalgrössen der Flächentheorie. Die Lehre von den krummen Flächen wird in den aus dem 18. und dem Anfang des 19. Jahrhunderts stammenden Arbeiten von *Euler, Monge, Dupin, Cauchy* u. a. fast ausschliesslich auf die Voraussetzung gegründet, dass die zu betrachtende Fläche durch *eine* Gleichung zwischen den Koordinaten x, y, z gegeben sei. Mit Vorliebe wird diese Gleichung in der besondern Form $z = f(x, y)$ angenommen. Die Parameterdarstellung (III D 3, Nr. 4 und VI) einer Fläche ist, wenn auch vorher nicht unbekannt, doch erst in Gebrauch gekommen, nachdem *C. F. Gauss* durch seine 1822 geschriebene Preisarbeit über die winkeltreue Abbildung zweier Flächen aufeinander[221]) und durch seine 1827 beendigten *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[222]) gezeigt hatte, welche Vorteile man von ihr namentlich dann ziehen kann, wenn man die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindet, und zugleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet. Zugleich mit der Parameterdarstellung ist die Benutzung einiger im Nachfolgenden zu erklären-

219) Vgl. *G. Monge,* ebd. No. VIII, oder *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 14 (1835), p. 58 f. = Ges. Werke 7, Berlin 1891, p. 13 f.

220) a. a. O. p. 417.

221) Astr. Abh., hrsg. v. *Schumacher,* Heft 3, 1825 = Werke 4, p. 189.

222) Comm. Gott. 6 (1828) = Werke 4, p. 217.

223) Auf eine Reihe weiterer Hülfsgrössen wird man geführt, wenn man die möglichen Bewegungen eines rechtwinkligen Dreikants verfolgt, dessen Ecke

den Hülfsgrössen[223]) üblich geworden, deren Einführung zur Abkürzung der Formeln dient und für die in der Litteratur verschiedene Bezeichnungen vorkommen.

Wenn man sich eine Fläche in der Nr. 2, III angegebenen Weise dargestellt denkt, so pflegt man als positive Richtung der Normale im Punkte (u, v) diejenige anzusehen, deren Richtungscosinus durch die Ausdrücke:

$$X = \frac{A}{T}, \quad Y = \frac{B}{T}, \quad Z = \frac{C}{T}$$

gegeben werden, wo T den *positiven* Wert von $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ bezeichnet[224]).

Bei dieser Festsetzung folgen die Richtung der wachsenden u, die Richtung der wachsenden v und die positive Richtung der Normalen ebenso aufeinander wie die positiven Koordinatenrichtungen.

Ferner pflegt man nach dem Vorgang von *C. F. Gauss*[225]) zur Abkürzung:

$$\varphi_u^2 + \chi_u^2 + \psi_u^2 = E, \quad \varphi_u\varphi_v + \chi_u\chi_v + \psi_u\psi_v = F, \quad \varphi_v^2 + \chi_v^2 + \psi_v^2 = G$$

---

sich auf der betrachteten Fläche bewegt und von welchem eine Kante beständig zur Fläche senkrecht bleibt, während eine zweite Kante mit den Parameterlinien der einen Schar einen (als Funktion der Parameter) gegebenen Winkel bildet. Ausführliche Darstellungen dieses in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts ausgebildeten kinematisch-geometrischen Untersuchungsverfahrens der Flächen geben *G. Darboux,* Leçons sur la théorie gén. des surf. 1, p. 66—73, und 2, p. 347—401, und *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Flächen, p. 310—321. Auf Grund *relativer* Bewegung solcher zu Kurven auf Flächen gehörigen Darboux'schen Dreikante hat *A. Schönflies,* Gött. Nachr. 1898, p. 71, eine Reihe der grundlegenden Formeln der Flächentheorie einfach abgeleitet. Vgl. auch III D 3, Nr. **10**, **24** u. **32**, sowie IV 3, Nr. **1** u. **21**.

224) Bei imaginären Flächen würde der Fall eintreten können, dass $A^2 + B^2 + C^2$ identisch gleich Null ist. Im Nachfolgenden sollen jedoch alle imaginären Flächen von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben und ebenso auch alle Punkte reeller Flächen, für welche $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ ist, einerlei ob diese Gleichung in einer vorhandenen Singularität oder lediglich in der gewählten Darstellungsart ihren Grund hat. Ausnahmefälle wie die eben erwähnten finden sich bei *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Flächen, vielfach eingehend erörtert. Vgl. insbesondere p. 28 f., 113—116, 228 f., 243 f., 248. Im Fall der Darstellung der Fläche durch *eine* Gleichung $F(x, y, z) = 0$ wählt man als positive Richtung der Normale gewöhnlich diejenige, deren Richtungscosinus mit F_x, F_y, F_z im Vorzeichen übereinstimmen. Hiermit stimmt die von *E. Bour,* J. éc. polyt. 22, cah. 39 (1862), p. 18, getroffene Festsetzung überein, dass die positive Normale von der Fläche aus in denjenigen Raumteil hineingehen solle, wo $F(x, y, z)$ positiv ist.

225) Disquisitiones gen. circa superf. curvas, Comm. Gott. 6 (1828), Art. 10, 11 = Werke 4, Gött. 1880, p. 233, 235. Vgl. III D 3, Nr. **4** u. VI.

zu setzen. Für diese Zahlen E, F, G ist die Bezeichnung *Fundamentalgrössen erster Ordnung* und für die Zahlen:

$$X\varphi_{uu} + Y\chi_{uu} + Z\psi_{uu} = L,$$
$$X\varphi_{uv} + Y\chi_{uv} + Z\psi_{uv} = M,$$
$$X\varphi_{vv} + Y\chi_{vv} + Z\psi_{vv} = N$$

durch *R. Hoppe*[226]) die Bezeichnung *Fundamentalgrössen zweiter Ordnung* gebräuchlich geworden. Dementsprechend heissen die Differentialformen (III D 3, Nr. 4 und 8):

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

und:

$$\frac{ds^2}{\varrho} = -(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

wo $\frac{1}{\varrho}$ die (nach Nr. 35 als positiv oder negativ anzusehende) Krümmung des durch den Punkt (u, v) gehenden und durch das Verhältnis $du : dv$ bestimmten Normalschnittes bedeutet, beziehentlich die *erste* und die *zweite Fundamentalform der Fläche.*

Abgesehen von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung ist die erste Fundamentalform gleich dem Quadrat des Abstandes der Flächenpunkte (u, v) und $(u + du, v + dv)$ und die zweite Fundamentalform gleich dem doppelten Abstand des Punktes $(u + du, v + dv)$ von der Tangentenebene der Fläche im Punkte (u, v), versehen mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem der Punkt $(u + du, v + dv)$ auf der gleichen Seite dieser Tangentenebene liegt wie die positive Normale, oder nicht.

Sowohl die Fundamentalgrössen erster als die zweiter Ordnung bleiben bei einer orthogonalen Transformation der Cartesischen Koordinaten ungeändert.

Mit Hülfe der sechs Fundamentalgrössen lassen sich die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Richtungscosinus X, Y, Z in einfacher Weise durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen φ, χ, ψ und umgekehrt diese letzteren durch die ersteren ausdrücken. Man hat nämlich:

---

226) Prinzipien der Flächentheorie, Leipzig 1876 (2. Aufl. 1890 als 2. Teil des Lehrbuchs der analyt. Geometrie), p. 6. — Die Einführung der Zahlen L, M, N an Stelle der von *Gauss* benutzten Zahlen:

$$D = LT, \quad D' = MT, \quad D'' = NT$$

empfiehlt sich deswegen, weil bei Einführung neuer Parameter an Stelle von u und v die Transformationsformeln für L, M, N einfacher werden als die für D, D', D''; vgl. *J. Knoblauch,* J. f. Math. 103 (1888), p. 27 f. Ebendaselbst werden, p. 34, vier *Fundamentalgrössen dritter Ordnung* erklärt.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{FM - GL}{EG - F^2} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FL - EM}{EG - F^2} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{FN - GM}{EG - F^2} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FM - EN}{EG - F^2} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

und

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{MF - NE}{LN - M^2} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{ME - LF}{LN - M^2} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{MG - NF}{LN - M^2} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{MF - LG}{LN - M^2} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

nebst acht ähnlichen Gleichungen, welche sich aus den vorstehenden durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Veränderlichen x, y, z und X, Y, Z ergeben[227]).

Ferner können, wie schon *Gauss*[228]) bemerkt hat, die partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung einer jeden der drei Koordinaten x, y, z durch Ausdrücke dargestellt werden, welche die Form homogener linearer Funktionen der partiellen Ableitungen *erster* Ordnung der gleichen Koordinate und des zugehörigen Richtungscosinus der Flächennormale haben, mit Koeffizienten, die bei einer orthogonalen Transformation der Cartesischen Koordinaten ungeändert bleiben. Man hat nämlich:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2T^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2T^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + L \cdot X,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{GE_v - FG_u}{2T^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{EG_u - FE_v}{2T^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + M \cdot X,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2T^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2T^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + N \cdot X$$

nebst sechs ähnlichen Gleichungen, die sich durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Veränderlichen x, y, z und X, Y, Z ergeben. *A. Voss*[229]) hat diese neun Gleichungen *die partiellen Differentialgleichungen der Fläche* genannt.

Die sechs Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N sind durch die drei folgenden von einander unabhängigen partiellen Differentialgleichungen mit einander verbunden:

---

227) Die Gleichungen (2) sind zuerst von *J. Weingarten*, J. f. Math. 59 (1861), p. 382 f. angegeben worden. Aus ihnen ergeben sich die Gleichungen (1) durch Auflösung in Bezug auf $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}$. Vgl. auch III D 3, Nr. 7.

228) Disqu. gen. c. sup. curv. art. 11. Vgl. auch *R. Hoppe*, Prinzipien der Flächentheorie, § 5, sowie III D 3, Nr. 9 u. 20.

229) *A. Voss*, Math. Ann. 39 (1891), p. 184. Über die Herleitung dieser Gleichungen vgl. *R. Hoppe*, a. a. O. und *G. Scheffers*, Einf. in die Theorie der Flächen, p. 262—264.

$$4(EG-F^2)(LN-M^2)+2(EG-F^2)(E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu})$$
$$+E[(2F_u-E_v)G_v-G_u^2]+G[(2F_v-G_u)E_u-E_v^2]$$
$$+F(2F_vE_v+2F_uG_u+E_vG_u-E_uG_v-4F_uF_v)=0,$$

$$2(EG-F^2)(L_v-M_u)-(LG-2MF+NE)E_v$$
$$+(MG-NF)E_u+2(NE-MF)F_u+(LF-ME)G_u=0,$$

$$2(EG-F^2)(N_u-M_v)-(LG-2MF+NE)G_u$$
$$+(NF-MG)E_v+2(LG-MF)F_v+(ME-LF)G_v=0.$$

Die erste dieser *„Fundamentalgleichungen der Flächentheorie“* findet sich in nur wenig anderer Form schon bei *C. F. Gauss*[230]) und bringt den Satz zum Ausdruck, dass das Krümmungsmass (Nr. **36**) der Fläche sich allein durch die Fundamentalgrössen E, F, G und deren partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung ausdrücken lässt. Gleichungen, welche den beiden andern gleichwertig sind, wurden von *G. Mainardi*[231]) und *D. Codazzi*[232]) aufgestellt weswegen diese Gleichungen häufig als *„Mainardi'sche“* oder *„Codazzi'sche Gleichungen“* bezeichnet werden. Über die mannigfachen Formen der partiellen Differentialgleichungen der Flächen und der Fundamentalgleichungen sowie über ihre geometrische und kinematische Bedeutung vgl. III D 3, VI.

Sind umgekehrt ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem und in bestimmter Reihenfolge sechs reellwertige Funktionen E, F, G, L, M, N von zwei reellen Veränderlichen u, v gegeben, welche die drei vorstehenden Gleichungen und ausserdem die Bedingungen:

$$E>0, \quad G>0, \quad EG-F^2>0$$

befriedigen, so giebt es, wie *O. Bonnet*[233]) gezeigt hat, immer eine bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmte Fläche, die in Bezug auf das gegebene Koordinatensystem eine solche Parameterdarstellung:

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\chi(u,v), \quad z=\psi(u,v)$$

gestattet, dass die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung beziehentlich mit den gegebenen Funktionen $E, F, \ldots, N$ überein-

---

230) Disquisitiones gen. circa superf. curvas, Comm. Gott. 6 (1828), Art. 11 = Werke 4, Gött. 1880, p. 236.

231) Ist. Lomb. Giorn. 9 (1857), p. 394—395.

232) Ann. di mat. (2) 2 (1868—1869), p. 273 f. Glgn. (58) und (59).

233) J. éc. polyt. 25, cah. 42 (1867), p. 35. Vgl. auch *R. Lipschitz,* Berl. Ber. 1883, p. 541 ff.; *H. Stahl* und *V. Kommerell,* Grundformeln der Flächentheorie, p. 32—36, und *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Flächen, p. 321—341, sowie III D 3, Nr. **20**.

stimmen[234]). Da der von *Bonnet* herrührende Beweis dieses Satzes zugleich einen Weg liefert, auf dem man die Funktionen φ, χ, ψ durch Auflösung von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung[235]) und Ausführung von Quadraturen finden kann, so bietet sich *zur Herleitung der Gleichungen einer durch kennzeichnende Eigenschaften bestimmten Fläche das folgende allgemeine und systematische Verfahren*[236]) dar:

Man lege die Bedeutung der unabhängigen Parameter u, v in einer der Natur der Aufgabe angepassten Weise dadurch fest, dass man für zwei der sechs Fundamentalgrössen bestimmte Funktionen von u und v annimmt oder auch zwei Gleichungen zwischen den Fundamentalgrössen und u, v festsetzt. Sodann drücke man die die Fläche kennzeichnende Eigenschaft durch eine dritte Gleichung zwischen den Fundamentalgrössen aus, füge zu den erhaltenen Gleichungen die Fundamentalgleichungen hinzu, bestimme aus dem so entstehenden System von sechs Gleichungen die sechs Fundamentalgrössen und ermittele endlich eine zugehörige Parameterdarstellung der gesuchten Fläche auf dem von *Bonnet* angegebenen Wege.

35. Sätze von Meusnier und Euler, Hauptkrümmungen (III D 3, Nr. 1). Durch einen gewöhnlichen Punkt P einer Fläche $\mathfrak{F}$ denke man sich eine Tangente von $\mathfrak{F}$ gezogen und durch diese zwei ebene Schnitte der Fläche gelegt, von denen einer die Normale von $\mathfrak{F}$ in P enthält (*Normalschnitt*). Wenn dann φ den spitzen Winkel zwischen den Ebenen der beiden Schnitte und R und R' beziehlich die zu P gehörenden Krümmungsradien des Normalschnittes und des schiefen Schnittes von $\mathfrak{F}$ bedeuten, so besteht — *Satz von Meusnier*[237]) — die Gleichung:

$$R' = R \cos \varphi.$$

Hat man bei der in einem gewöhnlichen Punkt P einer Fläche $\mathfrak{F}$ errichteten Normale eine positive und eine negative Richtung unter-

---

234) Wählt man statt des ursprünglich gegebenen Koordinatensystems ein anderes, dessen Axen im umgekehrten Sinn aufeinander folgen, behält jedoch die Funktionen $E, F, \ldots, N$ unverändert bei, so erhält man als zugehörige Fläche diejenige, die aus der vorigen durch Spiegelung an einer Ebene hervorgeht.

235) Diese Auflösung lässt sich auf die nach einander vorzunehmenden Integrationen von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Vgl. *G. Scheffers,* a. a. O. p. 322—330.

236) Vgl. *H. Stahl* u. *V. Kommerell,* Grundformeln der Flächentheorie, p. 36.

237) Mémoire sur la courbure des surfaces, Paris Mém. sav. étr. 10 (1785), p. 477 (lu à l'académie le 14 et 21 Févr. 1776). — Eine Ausdehnung dieses Satzes auf singuläre Punkte gab *L. Painvin,* J. f. Math. 72 (1870), p. 340—344.

schieden, so versteht man unter der Krümmung eines durch diese Normale gelegten ebenen Schnittes von $\mathfrak{F}$ in P gewöhnlich diejenige *positive oder negative* Zahl, deren absoluter Wert die Krümmung der Schnittlinie im gewöhnlichen Sinne angiebt, und deren Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem die Richtung von P gegen den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt des Schnittes mit der positiven Richtung der Normale übereinstimmt oder nicht. Bei dieser Festsetzung gelten ohne Ausnahme die folgenden Sätze und Erklärungen:

1. Legt man durch die in einem gewöhnlichen Punkt P einer Fläche $\mathfrak{F}$ errichtete Normale ein Ebenenbüschel, so haben die Schnitte, welche die Ebenen dieses Büschels mit $\mathfrak{F}$ bilden, entweder in P alle die gleiche Krümmung — und dann heisst P ein *Kreis-* oder *Nabelpunkt* (III D 3, Nr. 4) oder auch ein *Punkt sphärischer Krümmung* von $\mathfrak{F}$ — oder die Krümmung in P erreicht für einen und nur einen der erwähnten Schnitte ein Maximum und ebenso für einen und nur einen ein Minimum. In diesem letzteren Falle stehen die Ebenen des Schnittes grösster und des Schnittes kleinster Krümmung aufeinander senkrecht. Die Ebenen dieser Schnitte heissen die *Hauptnormalebenen*, die Schnitte selbst die *Hauptschnitte*, ihre Tangentenrichtungen in P die *Hauptkrümmungsrichtungen* [238]), die Krümmungen der Hauptschnitte in P die *Hauptkrümmungen*, deren reziproke Werte die *Hauptkrümmungsradien* und die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte die *Hauptkrümmungsmittelpunkte* von $\mathfrak{F}$ in P. Die Gesamtheit der letzteren wird als *Krümmungsmittelpunktsfläche* von $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Für einen Nabelpunkt sind die beiden Hauptkrümmungen dem gemeinsamen Wert der Krümmung aller durch ihn hindurchgehenden Normalschnitte gleich zu setzen.

2. Sind $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}$ in P und $\frac{1}{\varrho}$ die zu P gehörende Krümmung eines durch die Normale von $\mathfrak{F}$ in P gehenden ebenen Schnittes, welcher mit der Ebene des Hauptschnittes von der Krümmung $\frac{1}{R_1}$ den Winkel φ bildet, so gilt — *Satz von Euler* [239]) — die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\varphi^2}{R_1} + \frac{\sin\varphi^2}{R_2}.$$

238) Die Tangenten der Hauptschnitte werden zuweilen als *Haupttangenten* von $\mathfrak{F}$ in P bezeichnet. Eine andere Bedeutung, in der das Wort Haupttangente ebenfalls gebraucht wird, ist in Nr. 37 angegeben.

239) *L. Euler,* Recherches sur la courbure des surfaces, Berlin Hist. 16, 1760. Über die Veranschaulichung dieses Satzes vgl. *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Flächen, p. 144—150.

3. Sind ferner $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho'}$ die zu P gehörenden Krümmungen irgend zweier durch P gehenden und aufeinander senkrecht stehenden Normalschnitte von $\mathfrak{F}$, so ist immer[240]):

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ wird vielfach die *mittlere Krümmung*[241]) der Fläche in P genannt (III D 3, Nr. 5).

4. Sind r, r' die zu P gehörenden Krümmungsradien zweier Normalschnitte von $\mathfrak{F}$, welche durch zwei konjugierte Tangenten (Nr. 37) von $\mathfrak{F}$ in P gehen, und R_1, R_2 wieder die Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{F}$ in P, so ist[242]):

$$r + r' = R_1 + R_2.$$

5. Vorausgesetzt, dass die positive Richtung der Normale so wie in Nr. 34 bestimmt wird, sind die Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ mit den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung verbunden durch die Gleichungen (III D 3, Nr. 4):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Für das Vorhandensein eines Nabelpunktes ist notwendig und hinreichend, dass:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

sei[243]). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ergeben sich die den Hauptschnitten entsprechenden Werte des Verhältnisses $\frac{du}{dv}$ aus der Gleichung[244]):

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0.$$

240) *Ch. Dupin*, Développements, p. 108.

241) Nach *S. Germain*, J. f. Math. 7 (1831), p. 1. Hinsichtlich der Bedeutung dieses Ausdrucks herrscht in der Litteratur keine Übereinstimmung, indem bald die ganze, bald die halbe Summe der Hauptkrümmungen als mittlere Krümmung bezeichnet wird. Über die physikalische und die geometrische Bedeutung der mittleren Krümmung vgl. *G. Scheffers*, Einf. in die Theorie der Flächen, p. 229—235.

242) *Ch. Dupin*, Développements, p. 102. Vgl. III D 3, Nr. 3.

243) Einen bei der Ableitung dieser Bedingung auftretenden, schon von *Ch. Dupin*, Dével. de géom., p. 129, bemerkten scheinbaren Widerspruch hat *O. Bonnet*, J. de math. (1) 16 (1851), p. 191, aufgeklärt.

244) Formeln, welche dieser und den vorangehenden Gleichungen bei anderen Arten der analytischen Darstellung einer Fläche entsprechen, finden sich bei *J. Knoblauch*, Einf. in d. allg. Theorie d. kr. Fl., p. 44—45 u. p. 84—86.

Ist eine Fläche $\mathfrak{F}$ auf die in Nr. 2, III erwähnte Weise gegeben und werden die Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 von $\mathfrak{F}$ in dem zu den veränderlichen Parameterwerten u, v gehörenden Flächenpunkte P als Funktionen von u und v dargestellt, so kann die Funktionaldeterminante dieser Funktionen entweder von Null verschieden oder identisch gleich Null sein. Im ersten Falle kann man — wenigstens wenn die Betrachtung auf ein hinreichend kleines Stück von $\mathfrak{F}$ beschränkt wird — auch umgekehrt u und v als Funktionen von R_1 und R_2 ansehen, und wenn $d_1 s$ und $d_2 s$ zwei von P ausgehende, in die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen fallende Linienelemente von $\mathfrak{F}$ bedeuten, so sind auch die nach den Hauptkrümmungsrichtungen genommenen Ableitungen:

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$$

als Funktionen von R_1 und R_2 darstellbar.

Diejenigen vier Gleichungen, durch welche diese Ableitungen als Funktionen von R_1 und R_2 dargestellt werden, hat *G. Scheffers*[245]) *die natürlichen Gleichungen* der Fläche genannt.

Dagegen ist für den zweiten der oben unterschiedenen Fälle, dass die erwähnte Funktionaldeterminante identisch gleich Null und daher einer der Hauptkrümmungsradien eine Funktion des andern ist[246]), eine entsprechende Erklärung bisher nicht aufgestellt worden.

Nimmt man auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ in unendlicher Nähe eines gewöhnlichen Punktes A, der kein Nabelpunkt ist, einen zweiten Punkt B nach Belieben an, so schneiden sich die zu A und B gehörenden Normalen von $\mathfrak{F}$ im allgemeinen nicht. Ihr kürzester Abstand ist vielmehr, wenn der Abstand AB als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung angesehen wird, im allgemeinen ebenfalls von der *ersten* Ordnung unendlich klein[247]), und damit dieser kürzeste Abstand von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein werde, ist notwendig, aber auch hinreichend, dass der Punkt B dem Punkt A längs einer Linie genähert werde, die in A einen der beiden zu A gehörenden Hauptschnitte von $\mathfrak{F}$ berührt[248]). Bei der Abbildung von $\mathfrak{F}$

---

245) *G. Scheffers,* Einf. in die Theorie der Flächen, p. 353.

246) Näheres nebst Litteraturangaben bei *G. Scheffers,* a. a. O. p. 354—372. Vgl. auch III D 5 (*Weingarten*'sche Flächen).

247) Vgl. *F. Joachimsthal,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 415 f. Wenn A kein parabolischer Punkt (Nr. 36) ist, so stimmt die Richtung des erwähnten kürzesten Abstandes mit der zu AB konjugierten Richtung (Nr. 37) überein. Vgl. *G. Scheffers,* a. a. O. p. 163.

248) Vgl. *G. Monge,* Appl. de l'anal., § XV, 5. éd., p. 124 ff.

durch parallele Normalen auf die Einheitskugel (Nr. 36) werden daher diejenigen von A ausgehenden Linienelemente von $\mathfrak{F}$, welche in die Hauptschnitte fallen, und nur diese durch parallele Linienelemente der Kugelfläche dargestellt.

Genaueren Aufschluss über die gegenseitige Lage der zu den verschiedenen Punkten eines unendlich kleinen Flächenstücks gehörenden Normalen hat *J. Bertrand*[249]) durch die folgenden Sätze gegeben:

Wenn man in einem gewöhnlichen Punkte A einer Fläche $\mathfrak{F}$ die Normale AZ errichtet und sodann auf $\mathfrak{F}$ von A aus zwei zu einander senkrechte gleich lange und als unendlich kleine Grössen erster Ordnung anzusehende Linienelemente AB, AC abmisst, so bildet die Normale von $\mathfrak{F}$ in B mit der Ebene ZAB den gleichen Winkel wie die Normale von $\mathfrak{F}$ in C mit der Ebene ZAC (abgesehen von unendlich kleinen Grössen zweiter oder höherer Ordnung). Und wenn dieser Winkel von Null verschieden ist, so liegen die erwähnten Normalen entweder beide im Innern, oder beide im Äussern des Ebenenwinkels BAC. Wenn ferner $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}$ in A bedeuten und α den Winkel bezeichnet, den die Richtung AB mit einem der Hauptschnitte von $\mathfrak{F}$ in A einschliesst, so wird der Winkel zwischen der Normale von $\mathfrak{F}$ in B und der Ebene ZAB gegeben durch den absoluten Wert des Ausdrucks:

$$\frac{1}{2} AB\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin(2\alpha).$$

Zu einer noch anschaulicheren Vorstellung von der Gestalt des unendlich dünnen von einer Flächennormale und den ihr unendlich nahe benachbarten Normalen gebildeten Strahlenbündels haben Betrachtungen von *Ch. Sturm*[249a]) und die umfassenderen Untersuchungen von *W. R. Hamilton*[250]) und *E. E. Kummer*[251]) über die geradlinigen Strahlensysteme geführt: Man denke sich im Krümmungsmittelpunkt eines jeden der beiden durch einen Flächenpunkt A gehenden Hauptschnitte auf der Ebene dieses Hauptschnittes ein Lot errichtet. Dann stimmt die Normale der Fläche in einem zu A benachbarten Punkt B stets mit derjenigen von B ausgehenden Geraden überein, welche die beiden eben erwähnten Lote schneidet[252]) (abgesehen

249) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 9 (1844), p. 133.

249a) *Ch. Sturm,* Par. C. R. 20 (1845), p. 556—558 u. 1239—1248. Deutsch: Ann. Phys. Chem. (3) 65 (1845), p. 116 u. 374.

250) *W. R. Hamilton,* Dublin Transactions 16, Part 1 (1830).

251) *E. E. Kummer,* J. f. Math. 57 (1860), p. 189, insbesondere p. 221—223 u. 226—230.

252) Vgl. auch *A. F. Möbius,* Leipz. Ber. 14 (1862), p. 14—16 = Ges.

von einem Richtungsunterschiede, welcher im Verhältnis zum Abstand AB unendlich klein ist) (III D 3, Nr. 5).

36. Krümmungsmass einer Fläche (III D 3, Nr. 7 und VIII). Nachdem auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ ein einfach zusammenhängendes, von singulären Punkten freies Stück $\mathfrak{S}$ abgegrenzt ist, dem ein bestimmter von Null verschiedener Inhalt zukommt, sei die positive Richtung der Normalen für einen Punkt von $\mathfrak{S}$ nach Belieben und für alle übrigen Punkte dadurch festgelegt, dass einer stetigen Ortsänderung auf $\mathfrak{S}$ auch immer eine stetige Änderung der positiven Normalenrichtung entsprechen soll. Hierauf sei jedem Punkte P von $\mathfrak{S}$ derjenige Punkt Q einer Kugel vom Radius Eins zugeordnet, in welchem die nach aussen gerichtete Normale der Kugel der positiven Normale von $\mathfrak{F}$ parallel und gleichgerichtet ist (*Abbildung durch parallele Normalen auf die Einheitskugel*).

Wenn dann erstens die Beziehung zwischen $\mathfrak{S}$ und dem Bereich $\mathfrak{S}'$ der Punkte Q eine gegenseitig eindeutige ist, so hat auch $\mathfrak{S}'$ einen bestimmten von Null verschiedenen Inhalt, und wenn ein beweglicher Punkt die positive Normale eines Elementes von $\mathfrak{S}$ längs der Randlinie desselben in einem bestimmten Sinne umkreist, so umläuft sein Bildpunkt auf $\mathfrak{S}'$ die nach aussen gerichtete Normale des entsprechenden Elementes entweder immer im gleichen oder immer im entgegengesetzten Sinne. Man nennt in diesem ersten Falle nach *C. F. Gauss*[253]) den Inhalt des Bereiches $\mathfrak{S}'$ — versehen mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem die erwähnten Umlaufungsrichtungen übereinstimmen oder nicht — die *ganze Krümmung* (*Totalkrümmung*) von $\mathfrak{S}$.

Ist zweitens $\mathfrak{S}$ so beschaffen, dass sein Abbild auf der Kugel nicht wieder ein Flächenstück, sondern eine Linie oder ein Punkt ist, so sagt man, die ganze Krümmung von $\mathfrak{S}$ sei gleich Null.

Besteht endlich drittens $\mathfrak{S}$ aus mehreren Teilen von solcher Beschaffenheit, dass für jeden von ihnen die Voraussetzung eines der vorangehenden Fälle zutrifft, so versteht man unter der ganzen Krümmung von $\mathfrak{S}$ die Summe der ganzen Krümmungen dieser Teile.

Wenn man um einen gewöhnlichen Punkt P einer Fläche $\mathfrak{F}$ ein Stück dieser letzteren abgrenzt, welches keiner anderen Bedingung unterworfen ist, als der, einen bestimmten Inhalt zu haben, und sodann

---

Werke 4, p. 586—588, und *O. Böklen,* Anal. Geom. d. Raumes, p. 16—19. Perspektivische Zeichnungen geben *Ch. Sturm,* Par. C. R. 20 (1845), p. 557 und *G. Scheffers,* Einf. in d. Theorie d. Flächen, p. 172.

253) Disquis. gen. circa superf. curvas, Art. 6, Comm. Gott. 6 (1828) = Werke 4, p. 226f.

dieses Stück um P in irgend einer Weise unbegrenzt zusammenzieht, so nähert sich der Quotient, welcher entsteht, wenn man die ganze Krümmung des Flächenstücks durch dessen Inhalt dividiert, einem von der Art der Zusammenziehung unabhängigen Grenzwert. *C. F. Gauss*, der in diesem Grenzwert zuerst denjenigen Begriff erkannte, welcher bei Flächen dem für Linien schon längst festgestellten Begriff der Krümmung entspricht, hat demselben den Namen *Krümmungsmass der Fläche in P* gegeben[254]) und nachgewiesen[255]), dass dieses Krümmungsmass mit dem Produkt der beiden Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}$ in P übereinstimmt[256]). Zugleich hat *Gauss*[257]) vier verschiedene analytische Ausdrücke des Krümmungsmasses angegeben.

Nach *J. Bertrand* und *V. Puiseux*[258]) besteht für das Krümmungs-

---

254) Ebd. Art. 6. Vgl. auch Werke 8, p. 381 u. 425. — *F. Casorati* bezeichnet es, Acta math. 14 (1890/91), p. 95, als einen Übelstand, dass das *Gauss*'sche Krümmungsmass schon dann gleich Null wird, wenn nur *eine* der Hauptkrümmungen verschwindet, und ist der Ansicht, dass es dem Sprachgebrauch mehr entsprechen würde, als Krümmungsmass eine Grösse zu bezeichnen, die nur für die Ebene identisch gleich Null, für jede krumme Fläche dagegen im allgemeinen von Null verschieden ist. Demgemäss schlägt er vor, neben dem *Gauss*'schen Krümmungsmass K und der mittleren Krümmung M die der gestellten Anforderung entsprechende Grösse:

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) = 2M^2 - K$$

einzuführen, die auch geometrisch in einfacher Weise erklärt werden kann, und nur diese letztere als Krümmungsmass schlechthin zu bezeichnen. *M. d'Ocagne* hat, Cours de géom. descr. et de géom. inf. Paris 1896, p. 338, für dieselbe die Bezeichnung *courbure moyenne quadratique* vorgeschlagen. Vgl. auch III D 3, Nr. **34**.

255) Ebd. Art. 8, und Werke 8, p. 426 f.

256) Dieser Satz findet sich schon früher in zwei Arbeiten von *Olinde Rodrigues*: Corresp. sur l'éc. polyt. 3 (1815), p. 162, und Paris Bull. Soc. Phil. 1815, p. 34.

257) Disquis. gen. circ. superf. curvas, Art. 7, 9, 10, 11. Den verwickeltsten dieser Ausdrücke hat *J. Liouville*, Par. C. R. 32 (1851), p. 533 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 130, auf die folgende unsymmetrische aber einfachere Form gebracht:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2T}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{T}\left(G_u + \frac{F}{G}G_v - 2F_v\right)\right\} - \frac{1}{2T}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{T}\left(E_v - \frac{F}{G}G_u\right)\right\},$$

wo

$$T = \sqrt{EG - F^2}$$

zu setzen ist. Das gleiche Ergebnis hat *D. Chelini*, Ann. mat. fis. 2 (1851), p. 296 ff. aus einer Formel von *O. Bonnet* (J. éc. polyt. 19, cah. 32 (1848), p. 54) abgeleitet, deren Wert und Bedeutung neuerdings von *J. Knoblauch* (Acta math. 15 (1891), p. 250) hervorgehoben wurde. Ausdrücke des Krümmungsmasses durch Determinanten haben *R. Baltzer*, Leipz. Ber. 18 (1866), p. 1, und *G. v. Escherich*, Arch. Math. Phys. 57 (1875), p. 385, gegeben.

258) *J. Bertrand*, J. de math. (1) 13 (1848), p. 80—82; *V. Puiseux*, ebd.

mass K einer Fläche $\mathfrak{F}$ in einem gewöhnlichen Punkte P die Gleichung:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{s=0} \frac{l' - l}{s^3},$$

wo l die Länge eines hinreichend kleinen geodätischen Kreises (III D 3, Nr. **36**) vom Radius s bedeutet, der auf $\mathfrak{F}$ um P als Mittelpunkt beschrieben ist, und l' die Länge eines ebenen Kreises vom Radius s.

Ähnlich ist nach *Diguet*[259]):

$$K = \frac{12}{\pi} \lim_{s=0} \frac{J' - J}{s^4},$$

wo J den Inhalt des erwähnten geodätischen und J' den des entsprechenden ebenen Kreises bezeichnet[260]).

Schneidet man durch eine um P als Mittelpunkt beschriebene unendlich kleine Kugel in $\mathfrak{F}$ eine Linie ein, so nähert sich[261]) der Quotient $\frac{p'}{p}$, wo p die Länge der eben erwähnten Linie und p' die unter Beobachtung gewisser Vorzeichenregeln berechnete Länge ihres in der oben beschriebenen Weise gebildeten Abbildes auf der Einheitskugel bedeutet, der *mittleren Krümmung* (Nr. **35**) von $\mathfrak{F}$ in P als Grenzwert.

Man sagt, ein gewöhnlicher Punkt einer Fläche sei ein *elliptischer* oder ein *hyperbolischer* oder ein *parabolischer Punkt,* je nachdem das Krümmungsmass der Fläche in diesem Punkte positiv, negativ, oder gleich Null ist, und nennt die Fläche selbst in jedem elliptischen Punkte *positiv* und in jedem hyperbolischen Punkte *negativ gekrümmt.*

37. Konjugierte Tangenten und Indikatrix[262]). Es sei t eine Tangente einer Fläche $\mathfrak{F}$ in einem elliptischen oder hyperbolischen Punkte P und l eine auf $\mathfrak{F}$ verlaufende Linie, welche nur der Bedingung unterworfen ist, t in P zu berühren, aber sonst willkürlich gestaltet werden kann. Wenn dann ein beweglicher Punkt P_1 auf l dem Punkte P unbegrenzt genähert wird, so nähert sich die Schnittlinie der Tangentenebenen von $\mathfrak{F}$ in P und P_1 einer festen von der Gestalt der Linie l unabhängigen Grenzlage t_1, welche ebenfalls $\mathfrak{F}$ in

p. 87—90. Beide Arbeiten sind, die erste fast, die zweite genau wörtlich, wiedergegeben in *G. Monge,* Appl. de l'anal., 5. éd. von *J. Liouville,* Note IV, p. 583—588.

259) *Diguet,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 83.

260) Noch andere Arten der Erklärung des Krümmungsmasses oder seiner analytischen Darstellung erwähnen *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 3 (1865), p. 234, und *A. Voss,* Math. Ann. 39 (1891), p. 186; Münch. Ber. 22 (1892), p. 249—251. Über Erweiterungen des Begriffs vgl. I B 2, Nr. **21**; III D 3, Nr. 8.

261) Nach *R. Sturm,* Math. Ann. 21 (1883), p. 379.

262) Vgl. auch III D 3, Nr. **3**.

P berührt. Und wenn man aus der Tangente t_1 in der gleichen Weise eine neue Tangente ableitet, so kommt man wieder zu der Tangente t zurück.

Je zwei Tangenten einer Fläche, welche in der eben geschilderten gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, heissen[263]) *konjugierte Tangenten* der Fläche.

Wird einem, keinen parabolischen Punkt enthaltenden Flächenstück $\mathfrak{F}$ längs einer Linie eine abwickelbare Fläche umschrieben, so sind die Tangente an die Berührungslinie und die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende der abwickelbaren Fläche konjugierte Tangenten von $\mathfrak{F}$. Insbesondere sind, wenn eine Fläche durch ein Strahlenbündel beleuchtet wird, der berührende Lichtstrahl und die Tangente an die Schattengrenze konjugiert[264]).

Sind bei Anwendung der in Nr. 2, III angegebenen Darstellungsart einer Fläche $\frac{du_1}{dv_1}$ und $\frac{du_2}{dv_2}$ die beiden Werte des Verhältnisses $\frac{du}{dv}$, welche zwei konjugierten Tangentenrichtungen entsprechen, so besteht die Gleichung (III D 3, Nr. 4):

$$L\,du_1\,du_2 + M(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + N dv_1 dv_2 = 0,$$

wo L, M, N die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Fläche in dem betrachteten Punkte bedeuten.

Ist P ein parabolischer Punkt einer Fläche $\mathfrak{F}$ und t eine Tangente von $\mathfrak{F}$ in P, so kann es zunächst vorkommen, dass sich auf $\mathfrak{F}$ eine t in P berührende Linie l finden lässt, längs deren die Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ dauernd mit der Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P übereinstimmt, sodass von einer Schnittlinie der Tangentenebenen in P und einem auf l liegenden Nachbarpunkte überhaupt nicht mehr die Rede sein kann. Ferner ist es möglich, dass man auf $\mathfrak{F}$ mehrere verschiedene t in P berührende Linien $l_1, l_2, \ldots$ von solcher Beschaffenheit ziehen kann, dass die Schnittlinie der Tangentenebenen von $\mathfrak{F}$ in P und einem Nachbarpunkte Q sich *verschiedenen* Grenzlagen nähert, je nachdem der Punkt Q längs l_1, oder l_2, oder ... an P herangerückt wird, dass also für jene Schnittlinie keine bestimmte Grenzlage vorhanden ist, die durch die Richtung von t *allein* bestimmt wäre.

Immerhin lässt sich der Begriff der konjugierten Tangenten wenigstens noch für den Fall aufrecht erhalten, dass von den beiden Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}$ in P nur *eine* gleich Null ist. Ist nämlich in diesem Fall t_1 die den Hauptschnitt von der Krümmung Null be-

263) Nach *Ch. Dupin,* Dével. de géom., p. 41—46 u. p. 91.

264) Ebd. p. 44.

rührende und t irgend eine andere Tangente von $\mathfrak{F}$ in P, so wird durch die vorher erwähnte Konstruktion der Tangente t immer die Tangente t_1 zugeordnet, und man kann mit *Ch. Dupin*[265]) sagen, dass alle Tangenten von $\mathfrak{F}$ in P der einen Tangente t_1 konjugiert seien.

Die Gesamtheit aller Paare konjugierter Tangenten einer Fläche $\mathfrak{F}$ in einem elliptischen (hyperbolischen) Punkte P stimmt überein mit der Gesamtheit aller Paare konjugierter Durchmesser (III C 1) einer bestimmten Schar ähnlicher und ähnlich gelegener, in der Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ enthaltener Ellipsen (Paare von konjugierten Hyperbeln), welche sämtlich den Punkt P zum Mittelpunkt und die Tangenten an die Hauptschnitte von $\mathfrak{F}$ in P zu Axen haben. Jedes einzelne Individuum dieser Schar von Ellipsen (Paaren konjugierter Hyperbeln) kann dadurch erzeugt werden, dass man auf jeder Tangente von $\mathfrak{F}$ in P von P aus nach beiden Seiten hin eine Länge abträgt, welche der Quadratwurzel aus dem (stets positiv zu nehmenden) zu P gehörenden Krümmungsradius des durch die betreffende Tangente gehenden Normalschnittes von $\mathfrak{F}$ proportional ist[266]). Nach *Ch. Dupin*[267]) heisst jede Ellipse oder Hyperbel, welche der in dieser Weise einem Punkt P einer Fläche $\mathfrak{F}$ zugeordneten Schar angehört, eine *Indikatrix* von $\mathfrak{F}$ in P.

Ist P ein elliptischer (hyperbolischer) Punkt einer Fläche $\mathfrak{F}$, so giebt es immer ein und nur ein elliptisches (hyperbolisches) Paraboloid (III C 4), dessen Scheitel mit P zusammenfällt, und welches in P mit $\mathfrak{F}$ eine Berührung zweiter oder höherer Ordnung hat.

Wird irgend ein ebener Schnitt dieses Paraboloides, dessen Ebene zur Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P parallel ist, orthogonal auf diese letztere projiziert, so entsteht immer eine Indikatrix von $\mathfrak{F}$ in P, und umgekehrt kann jede solche Indikatrix in der beschriebenen Weise aus einem Schnitt des Paraboloides abgeleitet werden.

Da die Schnitte, welche eine der Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P unendlich nahe $\mathfrak{F}$ schneidende Parallelebene mit $\mathfrak{F}$ und dem erwähnten Paraboloid bildet, in unendlich kleinem Abstande von P nur um Grössen von einander abweichen, die gegen jenen Abstand verschwinden, so kann man bei Vernachlässigung solcher Grössen sagen: Die Schnittlinie von $\mathfrak{F}$ mit einer Ebene der angegebenen Art ist — abgesehen von einer unendlich kleinen Parallelverschiebung in der Richtung der zu P gehörenden Flächennormale — eine Indikatrix von $\mathfrak{F}$ in P.

Ist P ein parabolischer Punkt einer Fläche $\mathfrak{F}$, in welchem jedoch nur einer der Hauptschnitte von $\mathfrak{F}$ die Krümmung Null hat, so tritt an die Stelle des Paraboloides derjenige parabolische Cylinder, welcher

---

265) Ebd. p. 133. 266) Ebd. p. 55. 267) Ebd. p. 48. Vgl. auch p. 145—147.

mit $\mathfrak{F}$ in P eine Berührung zweiter oder höherer Ordnung und dessen durch P gehender Querschnitt in P seinen Scheitel hat. Und an die Stelle der erwähnten Schar von Ellipsen, bezw. konjugierten Hyperbeln tritt die Schar derjenigen in der Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in P gelegenen Paare von parallelen Geraden, welche zu der den Hauptschnitt von der Krümmung Null berührenden Tangente von $\mathfrak{F}$ in P parallel sind und dieselbe zur Mittellinie haben.

Diejenigen beiden Tangenten einer Fläche $\mathfrak{F}$ in einem hyperbolischen Punkte P, welche Asymptoten einer (und damit auch jeder anderen) Indikatrix von $\mathfrak{F}$ in P sind, heissen *Haupttangenten*[268]) oder *Wende-* oder *Inflexionstangenten* und die durch sie bestimmten Richtungen die *asymptotischen Richtungen* von $\mathfrak{F}$ in P. — Jede Wendetangente einer Fläche ist sich selbst konjugiert. Bei der Abbildung einer Fläche $\mathfrak{F}$ durch parallele Normalen auf die Einheitskugel entspricht jedem in eine Wendetangente fallenden Linienelement von $\mathfrak{F}$ ein dazu senkrechtes Linienelement auf der Kugelfläche, und umgekehrt fällt die Richtung eines Linienelementes von $\mathfrak{F}$ mit einer Wendetangente zusammen, sobald das sphärische Abbild des Elementes auf diesem senkrecht steht.

Bei Anwendung der in Nr. 2, III angegebenen Darstellungsart einer Fläche werden die den Wendetangenten entsprechenden Werte des Verhältnisses $\frac{du}{dv}$ durch die Gleichung:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

bestimmt, wo L, M, N die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Fläche in dem betrachteten Punkte bedeuten.

38. Geometrische Bedeutung der Ableitungen dritter Ordnung der Koordinaten in der Flächentheorie. Wie schon *A. Transon*[269]) bemerkt hat, giebt es unter den Normalschnitten einer Fläche $\mathfrak{F}$ in einem gewöhnlichen Punkt P im allgemeinen entweder drei oder nur einen einzigen, der mit seinem Krümmungskreis in P eine Berührung dritter oder höherer Ordnung eingeht[270]). Für das Eintreten des einen

---

268) Nach *A. Clebsch,* J. f. Math. 67 (1867), p. 9. Eine andere Bedeutung des Wortes Haupttangente ist in Fussn. 238 angegeben.

269) J. de math. (1) 6 (1841), p. 199.

270) Zu dem gleichen Ergebnis ist *J. Maillard de la Gournerie,* J. de math. (1) 20 (1855), p. 150, gelangt. — Diejenige Gleichung, durch welche bei Anwendung der in Nr. 2, III angegebenen Darstellungsart einer Fläche die jenen Normalschnitten entsprechenden Werte des Verhältnisses $\frac{du}{dv}$ bestimmt werden, hat *J. Knoblauch,* J. f. Math. 103 (1888), p. 32—34, und Einl. in d. Theorie d. kr. Fl.,

oder des anderen Falles, sowie die Lage derjenigen Normalschnitte, welchen die erwähnte Eigenschaft zukommt, sind neben den Werten der Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Koordinaten auch die der Ableitungen *dritter* Ordnung bestimmend. Gerade hierin besteht ein Teil der geometrischen Bedeutung, welche diesen Ableitungen dritter Ordnung zukommt[271]).

---

p. 92—94, aufgestellt. Formeln zur Berechnung der Winkel zwischen den Tangenten der fraglichen Normalschnitte und der Tangente an eine Krümmungslinie gab *v. Lilienthal,* J. f. Math. 104 (1889), p. 343—344. Hinsichtlich der schiefen von ihrem Krümmungskreis hyperoskulierten Schnitte siehe III D 3, Nr. **13**.

271) Andere Aufgaben, deren Lösungen erst durch die Ableitungen dritter Ordnung bestimmt werden, behandelt *A. Mannheim,* Par. C. R. 80 (1875), p. 541 u. p. 619.

Nachtrag.

p. 2 unter „*Lehrbücher*" füge hinzu:

L. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque, Paris 1869.

L. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris 1873.

L. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876.

H. Resal, Exposition de la théorie des surfaces, Paris 1891.

p. 87 zu Fussn. 214 füge hinzu:

Vgl. auch *H. Molins,* J. de math. (2) 19 (1874), p. 425.

p. 89, Ende von Fussn. 223. Zwischen Nr. **24** und **32** schalte noch ein: **28**.

p. 91, Ende von Fussn. 228, und

p. 92, Ende von Fussn. 233. Statt Nr. **20** lies: Nr. **22**.

p. 92, Z. 15 v. o. statt VI lies: Nr. **21**—**27**.

(Abgeschlossen im Mai 1902.)

III D 3. DIE AUF EINER FLÄCHE GEZOGENEN KURVEN.

Von

R. v. LILIENTHAL

IN MÜNSTER I/W.

Die Bearbeitung der Nrn. **16** und **17** verdankt der Verfasser Herrn *H. v. Mangoldt.*

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Bemerkung. Auf die im folgenden häufiger angeführten Werke:

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Paris Bd. 1, 1887; Bd. 2, 1889; Bd. 3, 1894; Bd. 4, 1896.

L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von *M. Lukat,* Leipzig 1896/99 (im Original: Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1893, 2. Ed. 1902).

J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888,

wird unter Bezeichnung „*Darboux* 1, 2, 3, 4" „*Bianchi*", „*Knoblauch*" hingewiesen.

Weitere Litteratur s. unter III D 1, 2.

I. Methoden von Euler und Monge. Krümmungslinien, Haupttangentenkurven, konjugierte Linien.

1. Methode von Euler (vgl. III D 1, 2, Nr. 35). Den Ausgangspunkt unserer Betrachtung der auf einer Fläche gezogenen Kurven möge die in der Hist. de l'Acad. de Berlin 16, 1767 (année 1760) p. 119 erschienene Arbeit von *Leonh. Euler*, „Recherches sur la courbure des surfaces" bilden, obgleich eine geschichtliche Anordnung mit der Lehre von den kürzesten Linien auf einer Fläche beginnen müsste. *Euler* sucht sich von der Krümmung einer Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes (P) dadurch ein Bild zu machen, dass er die zu (P) gehörenden Krümmungshalbmesser der durch (P) gehenden Normalschnitte der Fläche bestimmt. Die Berechnung des grössten und kleinsten Wertes jener Krümmungsradien führt ihn zu dem Satz, dass beide Werte zu solchen Radien gehören, die in zu einander senkrechten Normalschnitten liegen. Nennt man den grössten Krümmungshalbmesser R_1, den kleinsten R_2, so findet *Euler* für einen beliebigen Krümmungsradius ϱ die Gleichung:

$$\varrho = \frac{2 R_1 R_2}{R_1 + R_2 - (R_1 - R_2)\cos 2\varphi},$$

wo φ den Winkel bedeutet, den der ϱ liefernde Normalschnitt mit dem R_1 liefernden bildet. Diese Gleichung führt ihn zu einer einfachen Konstruktion von ϱ, indem er sie als die Polargleichung eines Kegelschnitts (III C 1) betrachtet[1]). *Ch. Dupin*[2]) gab jener Gleichung die Form:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

und folgerte, dass, wenn ϱ und ϱ' zwei Krümmungshalbmesser von zu einander senkrechten Normalschnitten sind, man hat:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

eine Bemerkung, die von *J. Babinet*[3]) dahin erweitert wurde, dass:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} \cdots \frac{1}{\varrho^{(m-1)}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

falls $\varrho, \varrho', \ldots \varrho^{(m-1)}$ die Krümmungsradien sind, welche zu m Normalschnitten gehören, die miteinander gleiche Winkel bilden. Ist P_0 der

---

1) *Ch. Dupin,* Développements de géométrie, Paris 1813, p. 40.

2) Développ., p. 109. Vgl. die Konstruktion von ϱ bei *Genty,* Nouv. Ann. (3) 6 (1887) p. 24.

3) Par. C. R. 25 (1847), p. 441. Vgl. *A. Cauchy* daselbst 26 (1848), p. 494 und *M. Chasles,* p. 531.

Krümmungsmittelpunkt des zu $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gehörenden Normalschnittes, sind ferner P_1 und P_2 die Krümmungsmittelpunkte irgend zweier zu dem fraglichen Normalschnitt symmetrisch gelegener Normalschnitte, so sind PP_0 und P_1P_2 harmonische Punktepaare[4]).

Die Grössen R_1 und R_2 sollen fortan die *„Hauptkrümmungshalbmesser"* der Fläche für den Punkt (P) genannt werden, die zugehörigen Normalschnitte *„Hauptnormalschnitte"*. Je nachdem das Produkt R_1R_2 positiv oder negativ ist, heisst die Fläche im Punkte (P) *„positiv"* oder *„negativ"* gekrümmt. Für den Fall negativer Krümmung führt der *Euler*'sche Satz auf zwei weitere ausgezeichnete Normalschnitte, nämlich auf die, welche in (P) die Krümmung Null besitzen. Diese beiden Schnitte liegen symmetrisch zu den beiden Hauptnormalschnitten und bilden unter sich einen Winkel, dessen Kosinus gleich $\frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}$ ist. Die in den fraglichen Schnitten liegenden Tangenten werden *„Haupttangenten"* genannt (III D 1, 2, p. 94). Man kommt auf sie auch durch die Frage, wann eine Fläche ganz auf einer Seite der Tangentialebene liegt oder von letzterer geschnitten wird[5]). Denkt man sich in allen Punkten eines Flächenteils die in den Hauptnormalschnitten liegenden Flächentangenten, so bilden sie gleichzeitig die Tangenten zweier sich senkrecht kreuzender Scharen von Flächenkurven, die man *„Krümmungslinien"* nennt. Ebenso sind die Haupttangenten zugleich die Tangenten zweier Kurvenscharen, die man *„Haupttangentenkurven"* oder *„Asymptotenlinien"* nennt.

Die *Euler*'sche Untersuchung der Krümmung einer Fläche mit Hülfe von Normalschnitten wird vervollständigt durch den *Meusnier*-schen Satz[6]): Ein beliebiger Normalschnitt möge die Flächentangente (T) und die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ liefern. Legt man durch (T) einen zweiten Schnitt, der mit der Tangentialebene der Fläche den von Null verschiedenen Winkel ψ bilde, so wird seine Krümmung $\frac{1}{\varrho'}$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin\psi}{\varrho'}.$$

Es ist also ϱ' die senkrechte Projektion von ϱ auf die Ebene des

4) *O. Böklen,* Analytische Geometrie des Raumes, Stuttgart, 1. Aufl. 1861, 2. Aufl. 1884, p. 20.

5) *F. Joachimsthal,* Anwendung der Diff.- und Int.-Rechnung auf die allgem. Theorie der Flächen etc., 3. Aufl. hrsg. von *L. Natani,* Leipzig 1890, p. 57.

6) *Ch. Meusnier,* Paris, Mém. sav. [étr.] 10 (1785) [lu 1776], p. 477. Modelle von *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 264—266, Nr. 76.

zweiten Schnittes. Der hier auszuschliessende Fall $\psi = 0$ wird später in Nr. 36 behandelt.

Aus dem *Meusnier*'schen Satz folgt unmittelbar eine Bemerkung von *P. Hachette*[6a]). Trägt man auf den Normalen aller Schnitte, welche durch dieselbe in (P) berührende Flächentangente gehen, von (P) aus den Wert der Krümmung des betreffenden Schnittes auf, so liegen die Endpunkte der aufgetragenen Strecken — centres inverses de courbure — auf einer die Flächennormale schneidenden und zu der Ebene des durch die fragliche Tangente gelegten Normalschnitts senkrechten Geraden. Zu jedem Normalschnitt gehört so eine derartige Gerade und die Gesamtheit dieser Geraden bildet ein Cylindroid (IV 2, Nr. 16)[6b]). Auf ein anderes Cylindroid führt die folgende Betrachtung. Unterwirft man die Krümmungskreise der durch den Punkt (P) gehenden Normalschnitte einer solchen Transformation mittelst reziproker radii vectores (III A 7), deren Pol im Punkte (P) liegt, so gehen die Kreise in Gerade über, die auf der Flächennormale senkrecht sind und ein Cylindroid bilden[6c]).

Edm. Laguerre[7]) bemerkte hinsichtlich der durch dieselbe Flächentangente gehenden Schnitte, dass, wenn man in jedem derselben die im Berührungspunkt der Tangente hyperoskulierende Parabel konstruiert, die Brennpunkte dieser Parabeln auf einem Kreise liegen.

2. Methode von Monge. *G. Monge*[8]) gelangt zur Gleichung der Hauptkrümmungsradien und Krümmungslinien auf wesentlich andere Weise wie *Euler.* Er zeigt, dass eine Flächennormale von zwei unendlich benachbarten Normalen geschnitten wird, d. h. der kürzeste Abstand der Normale von den fraglichen benachbarten Normalen ist von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein. Die fraglichen Schnittpunkte sind die von (P) verschiedenen Endpunkte von R_1 und R_2, während die Fortschreitungsrichtungen, in denen man zu den fraglichen beiden Nachbarnormalen gelangt, in den Hauptnormalschnitten liegen.

Nimmt man die Gleichung der Fläche in der Form $z = f(x, y)$ und setzt wie üblich: $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so wird die Gleichung der Hauptkrümmungsradien:

6a) *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 106.

6b) *G. Scheffers* l. c. p. 148.

6c) *Salmon-Fiedler,* Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil, 3. Aufl. Leipzig 1880, p. 560; *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1901, p. 1.

7) Nouv. Annal. (2) 7 (1868), p. 137.

8) Application d'Anal., 5. Aufl., hrsg. v. *J. Liouville,* Paris 1850, § 15.

$$\varrho^2(rt-s^2)+\sqrt{1+p^2+q^2}((1+q^2)r-2ps+(1+p^2)t)\varrho$$
$$+(1+p^2+q^2)^2=0,$$ [9])

während die Gleichung der Krümmungslinien die Gestalt hat:

$$dp(dy+q\,dz)=dq(dx+p\,dz).$$ [10])

Von dieser Gleichung ausgehend kam *O. Rodrigues*[11]) zu dem Satze: „Bezeichnet man die Richtungskosinus der Flächennormalen mit X, Y, Z, so ist längs einer Krümmungslinie:

$$dx=-\varrho dX,\quad dy=-\varrho dY,\quad dz=-\varrho dZ,$$

wo ϱ den zu der betreffenden Krümmungslinie gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser bedeutet."

3. Konjugierte Tangenten und Linien. (Vgl. III D 1, 2, Nr. 37.) Zu weiterer Fruchtbarmachung des *Euler*'schen Satzes gelangte *Dupin* durch die Ausgestaltung des Begriffs *konjugierte Tangenten.* Längs einer Flächenkurve werden die Tangentialebenen der Fläche von einer abwickelbaren Fläche (III D 5, Nr. 3) eingehüllt. Zu einem Punkte (P) der Kurve gehört so die Tangente (T) der Kurve und eine zweite Flächentangente (T'), die zugleich Erzeugende jener abwickelbaren Fläche ist. (T') heisst konjugiert zu (T). Man findet leicht, dass auch (T) zu (T') konjugiert ist, weshalb man von *konjugierten Tangenten* spricht. Mit Hilfe dieser Definition erhält *Dupin*, wenn die Tangente (T) durch den Wert der Ableitung $\frac{dy}{dx}$ festgelegt ist, als Gleichung der Projektion von (T') auf die xy-Ebene die folgende[12]):

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}+\frac{r\,dx+s\,dy}{s\,dx+t\,dy}=0.$$

Den sämtlichen Werten des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ entsprechen die sämtlichen durch (P) gehenden Flächentangenten (T); die zugehörigen konjugierten Tangenten fallen in eine zusammen oder bilden ein Büschel, je nachdem $rt-s^2$ gleich Null oder von Null verschieden ist. Wir schliessen den ersten Fall aus und denken uns einen Punkt (P'), der sich so in der Tangentialebene bewegt, dass seine Bewegungsrichtung beständig der konjugierten Tangente des radius vector (PP') parallel ist. Man findet als Gleichung der Projektion des Ortes von (P') auf die xy-Ebene:

$$r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2=C,$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

---

9) *Monge* a. a. O. § 15, Nr. 3. 10) *Monge* a. a. O. § 15, Nr. 4.

11) Corréspondance sur l'éc. polyt. 3 (1816), p. 162.

12) Développ., p. 98.

Dupin nennt, ohne den Wert der Konstanten C besonders zu bestimmen, die für den Ort von (P') gefundene Kurve die *Indikatrix* der Fläche für den Punkt (P). Sie ist eine Ellipse, wenn $R_1 R_2 > 0$, eine Hyperbel, wenn $R_1 R_2 < 0$. Der Mittelpunkt der Indikatrix fällt mit (P) zusammen, ihre Hauptaxen liegen in den Hauptnormalschnitten und konjugierte Durchmesser liegen in konjugierten Flächentangenten. Ist die Indikatrix eine Hyperbel, so fallen ihre Asymptoten mit den Haupttangenten der Fläche zusammen, die letzteren berühren die Fläche in der zweiten Ordnung[13]. Weiter zeigt *Dupin* folgende Sätze:

1) Sind ϱ und ϱ' die Krümmungshalbmesser zweier Normalschnitte, die aus der Tangentialebene konjugierte Tangenten ausschneiden, so ist:

$$\varrho + \varrho' = R_1 + R_2.$$[14]

2) Die Krümmungsradien der Normalschnitte besitzen Längen, die proportional sind den Quadraten der in diesen Schnitten liegenden Durchmesser der Indikatrix[15].

3) Ist die Indikatrix eine Ellipse, so giebt es in dem Hauptnormalschnitt mit der kleinsten Krümmung zwei vom betrachteten Flächenpunkt ausgehende und zur Flächennormale symmetrisch gelegene Gerade derart, dass jedes Paar zu einander senkrechter und durch eine der beiden Geraden hindurchgehender Ebenen aus der Tangentialebene konjugierte Tangenten ausschneidet[16]. Man erkennt leicht, dass diese Geraden die Asymptoten der zur Indikatrix gehörenden Fokalhyperbel (III C 4) sind.

4) Nennt man zwei einfach unendliche auf der Fläche gelegene Kurvenscharen „konjugiert", wenn jede Einzelkurve der einen Schar von jeder Einzelkurve der anderen so geschnitten wird, dass im Schnittpunkt die betreffenden beiden Kurventangenten konjugiert sind, so bilden die Krümmungslinien das einzige konjugierte Kurvensystem, in dem jede Kurve der einen Schar von jeder der anderen rechtwinklig geschnitten wird[17], während die Haupttangentenkurven sich selbst konjugiert sind.

4. Allgemeine Parameter (III D 1, 2, Nr. 34). Die bis jetzt erwähnten Untersuchungen sind unter der Annahme durchgeführt, dass die Fläche durch eine Gleichung von der Form $z = f(x, y)$ festgelegt

---

13) Dév., p. 52. 14) Dév., p. 102.

15) Dév., p. 151. Einen ähnlichen Satz zeigte *A. Mannheim,* Par. soc. math. Bull. 22 (1894), p. 219.

16) Dév., p. 54. 17) Dév., p. 95.

sei. Geometrisch bedeutet diese Annahme eine solche Abbildungsart der Fläche auf eine Ebene (E), bei welcher das Bild eines Punktes (P) durch senkrechte Projektion von (P) auf (E) erhalten wird. *C. F. Gauss* legte seinen Untersuchungen[18]) diejenige Bestimmungsart einer Fläche zu Grunde, welche die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z durch Funktionen zweier Parameter u und v gegeben denkt. Betrachtet man u und v als die Koordinaten der Punkte einer Bildebene, so bleibt hier die Abbildungsart ganz willkürlich. Bei der fraglichen Bestimmungsart findet man unter Benutzung der Abkürzungen:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

$$L = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad M = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad N = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

— falls wie früher die Richtungskosinus der Flächennormalen mit X, Y, Z bezeichnet werden — als Gleichung der Hauptkrümmungsradien:

(a) $$(LN - M^2)\varrho^2 - (GL - 2FM + EN)\varrho + EG - F^2 = 0,$$

und als Gleichung der Krümmungslinien:

(b) $$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0,$$

während der Krümmungsradius des durch die Tangentialrichtung (dx, dy, dz) bestimmten Normalschnittes durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\Sigma dx\,dX}{\Sigma dx^2} = \frac{L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2}$$

geliefert wird. Hinsichtlich der Gleichung (a) gelten folgende Sätze:

1) Verschwindet der Koeffizient von ϱ^2 für jedes Wertsystem u, v, so ist die betreffende Fläche die Einhüllende einer Ebenenschar, also eine abwickelbare Fläche[19]) (III D 5, Nr. 3). Die Erzeugenden einer solchen bilden sowohl das einzige vorhandene System der Haupttangentenkurven als eine Schar von Krümmungslinien. Die andere Schar der Krümmungslinien wird von den rechtwinkligen Durchdringungskurven der Erzeugenden gebildet. Für den zu ihnen gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser R_1 giebt es einen einfachen Ausdruck[20]). Die durch den Flächenpunkt (P) gehende Erzeugende

---

18) Disquisitiones generales circa superficies curvas 1827. Comm. Gott. 6 (1828) = Werke 4 (1873), p. 217. Deutsch herausgegeben in Ostwald's Klassikern Nr. 5 von *A. Wangerin* 1889.

19) *G. Monge*, Appl., Fussn. 8), p. 591; *F. Joachimsthal*, Anwend. der Diff.- u. Integralrechn. auf die allgem. Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, 3. Aufl. bearbeitet von *L. Natani*, Leipzig 1890, p. 254.

20) *A. Enneper*, Zeitschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 616; *E. Picard*, Traité d'Anal. 1, Paris 1891, p. 393.

treffe die Gratlinie (Rückkehrkante) der abwickelbaren Fläche im Punkte (P_0). Ist l die Entfernung der Punkte P, P_0, und ϱ der Radius der ersten, r der der zweiten Krümmung der Gratlinie im Punkte (P_0) (III D 1, 2, Nr. **29**, **30**), so hat man:

$$R_1 = -l\frac{r}{\varrho}\cdot$$

2) Ist eine Wurzel der Gleichung konstant, die andere nicht, so ist die Fläche die Einhüllende einer Schar von Kugeln mit demselben Durchmesser, deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen, also eine Kanalfläche (III D 5, Nr. **4**). Sind beide Wurzeln der Gleichung konstant oder beständig einander gleich, so besitzen sie stets ein und denselben festen Wert. Die Fläche ist alsdann eine Kugel[21]).

3) Die Wurzeln der Gleichung sind stets reell[22]).

4) Als Bedingung für die Gleichheit der Wurzeln findet man:

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}\cdot$$

Eine Fläche besitzt daher im allgemeinen nur vereinzelte Punkte, für die die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich sind. Man nennt sie *Nabelpunkte*, oder *Kreispunkte* (III D 1, 2, Nr. **35**), weil die zugehörige Indikatrix ein Kreis ist. Füllen sie eine Linie aus, so heisst letztere „*Kreispunktlinie*". *G. Darboux* zeigte[22a]), dass ein gewöhnlicher Flächenpunkt ein Kreispunkt ist, wenn durch ihn mehr wie zehn Kreise gehen, die in ihm fünf zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein haben.

5) Das Produkt $\frac{1}{R_1 R_2}$ lässt sich durch die Grössen E, F, G und deren erste und zweite Ableitungen ausdrücken[23]) (III D 1, 2, Nr. **36**).

Hinsichtlich der Gleichung (b) gelten folgende Sätze:

1) Verschwinden ihre Koeffizienten identisch, so ist die betrachtete Fläche eine Kugel oder eine Ebene.

2) Die Gleichung liefert zwei reelle Werte für das Verhältnis $\frac{dv}{du}\cdot$

3) Für die Kreispunkte einer Fläche wird die Gleichung illusorisch. Das Verhalten der Krümmungslinien in der Umgebung eines Kreispunktes ist Gegenstand zahlreicher Arbeiten geworden. *Dupin*[24]) bildet, wenn $A = 0$ die Gleichung der Krümmungslinien ist, der Reihe nach die Gleichungen $B \equiv \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0$, $C \equiv \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0$ etc.,

21) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 73; *O. Bonnet* ib. (2) 5 (1860), p. 192; *R. Lipschitz,* Berlin, Ber. 1882, p. 186; *A. Enneper,* Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 101. 22) „*Knoblauch*", p. 32.

22a) Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 380.

23) *Gauss,* Disquis. § 11. 24) Dév. p. 160 ff.

und betrachtet die erste, nicht identisch erfüllte dieser Gleichungen als Gleichung der Krümmungslinien im fraglichen Kreispunkt. Diese Gleichungen nehmen eine einfache Form an, wenn man den Kreispunkt zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems nimmt, dessen z-Achse die Normale der Fläche im Kreispunkt ist, während z nach Potenzen von x und y entwickelt wird. Bezeichnet man die Werte der dritten Ableitungen $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ an der betrachteten Stelle mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so wird die Beziehung $B = 0$ gleichlautend mit der folgenden:

$$\left(\beta + \gamma \frac{dy}{dx}\right)\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) + \left(\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ist dieselbe nicht identisch befriedigt, so hat man es mit einem gewöhnlichen Kreispunkt zu thun. Hier kann nun bloss eine reelle Wurzel auftreten, wie beim Ellipsoid, oder es giebt drei solche, wo dann entweder alle drei Wurzeln zu Krümmungslinien gehören oder nur zwei von ihnen. Dies letztere ist der Fall, wenn der Kreispunkt nicht vereinzelt auftritt, sondern einer Kreispunktslinie angehört. Die beiden Krümmungslinien schneiden sich dann senkrecht[25]).

Zu den *Dupin*'schen Gleichungen gelangt *S. D. Poisson*[26]) durch folgende Betrachtung. Man entwickle den kürzesten Abstand der durch den Kreispunkt gehenden Flächennormalen von der durch einen benachbarten Punkt $(x + h, y + k)$ gehenden nach Potenzen von h und k. Die Entwicklung beginne mit Gliedern m^{ter} Ordnung, wo jetzt $m > 2$. Das Aggregat dieser Glieder gleich Null gesetzt, liefert die Gleichung der Krümmungslinien im betrachteten Kreispunkt. *A. Cayley*[26a]) nimmt den Kreispunkt zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen x, y-Ebene die Tangentialebene der Fläche ist und bricht die Entwicklung von z nach Potenzen von x und y mit den Gliedern dritter Ordnung ab, sodass die Fläche ersetzt wird durch eine im Kreispunkt berührende Fläche dritter Ordnung (III C 6), die den Berührungspunkt ebenfalls als Kreispunkt besitzt. Weitere Methoden findet man bei „*Darboux*" (4, p. 448). Vgl. II A 4 a, Nr. 31 u. Fussn. 122.

Denken wir uns durch die Verhältnisse $\frac{dv}{du}$ und $\frac{\delta v}{\delta u}$ zwei Flächentangenten bestimmt, so sind sie konjugiert, falls (III D 1, 2, Nr. 37):

$$L\, du\, \delta u + M(du\, \delta v + dv\, \delta u) + N\, \delta v\, dv = 0.$$

Diese Bedingung erhält, wenn man die beiden Tangenten durch die

25) *Ch. Bioche,* Par. soc. math. Bull. 18 (1890), p. 95, woselbst die bezügliche Litteratur angegeben ist.

26) J. f. Math. 8 (1832), p. 280.

26a) Phil. Mag. 26 (1863), p. 373, 441 = Coll. math. papers 5 (1892), p. 115.

Winkel φ und ψ bestimmt, die sie mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie bilden, die Gestalt:

$$\frac{\cos\varphi\,\cos\psi}{R_1}+\frac{\sin\varphi\,\sin\psi}{R_2}=0.$$

Der Winkel $\psi-\varphi$ kann für eine Fläche von positiver Krümmung nicht Null werden, muss also ein Minimum besitzen. Der entsprechende Winkel φ wird geliefert durch die Gleichung $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{R_2}{R_1}\cdot$ Die fraglichen Tangenten liegen also symmetrisch zu den Hauptnormalschnitten, und die durch sie hindurchgehenden Normalschnitte besitzen dieselbe Krümmung $\frac{2}{R_1+R_2}\cdot$ Auf das durch jene Tangenten bestimmte Liniensystem machte zuerst *Dupin*[27]) mit kurzen Worten aufmerksam und stellte es als den Haupttangentenkurven der negativ gekrümmten Flächen entsprechend hin. Ausführlicher behandelte *K. Peterson*[28]) und dann *R. Hoppe* den Gegenstand[29]). Später nannte *E. Pucci* das Doppelte jenes Winkels φ den „charakteristischen" Winkel und belegte mit dem Namen „charakteristische" Linien solche, die mit den zu R_1 gehörenden Krümmungslinien den Winkel φ bilden[30]).

Die Kurven, welche bei der *Gauss*'schen Bestimmungsart einer Fläche konstanten Werten von u oder v entsprechen, sollen „Parameterlinien" genannt werden. Sie bilden zwei einfach unendliche Scharen von Flächenkurven. Ist $F=0$, so schneiden sich diese Scharen rechtwinklig; ist $M=0$, so sind sie konjugiert; ist $F=M=0$, so fallen sie mit den Krümmungslinien, ist $L=N=0$, so fallen sie mit den Haupttangentenkurven zusammen, und ist $LG-NE=M=0$, so sind sie charakteristische Linien.

II. Weitere Methoden.

5. Geradlinige Strahlensysteme (vgl. III D 1, 2, Nr. **35**). Die Untersuchungen des Systems der Normalen einer Fläche dürfte *J. Bertrand*[31]) begonnen haben, an dessen Arbeit *O. Bonnet*[32]) anknüpfte. Betrachten wir in einem Punkte (P) einer nicht abwickelbaren Fläche

27) Dév. p. 192.

28) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 35.

29) Archiv Math. Phys. 69 (1883), p. 19.

30) Rom, Linc. R. 1 (1889¹), p. 501; daselbst eine Arbeit von *V. Reina* über denselben Gegenstand p. 881.

31) J. de math. (1) 9 (1844), p. 133.

32) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 1. Vgl. *E. E. Kummer,* J. f. Math. 57 (1860), p. 226 u. *A. Mannheim,* J. de math. (2) 17 (1872), p. 109; Principes et Développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 270; *O. Röthig,* J. f. Math. 85 (1878), p. 250.

die Normale (N) mitsamt der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Nachbarnormalen. Unter den letzteren gibt es nach Nr. 2 zwei, die (N) schneiden und zwar in den Endpunkten von R_1 und R_2. Abgesehen von diesen beiden besitzt jede Nachbarnormale einen kürzesten Abstand von (N). Derselbe ist im allgemeinen eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, nur für die in den Hauptnormalschnitten gelegenen Nachbarnormalen wird er von der dritten Ordnung unendlich klein[33]). Ein solcher kürzester Abstand treffe die Normale (N) im Punkte (P') und die Abscisse von (P') in Bezug auf (P) (Masszahl der Entfernung PP' mit Vorzeichen) sei r. Man hat dann, wenn die Nachbarnormale durch den Punkt $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ gelegt ist:

$$r = -\frac{dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ}{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Die den einzelnen Nachbarnormalen von (N) entsprechenden Werte von r besitzen einen grössten und kleinsten Wert, und diese Werte fallen mit R_1 und R_2 zusammen. Bezeichnet man mit ω den Winkel, den der zu r gehörende kürzeste Abstand mit der Tangente des zu R_2 gehörenden Hauptnormalschnittes bildet, so ist (*Hamilton*'sche Gleichung [III D 1, 2, p. 97, Fussn. 250]):

$$r = R_1 \cos^2\omega + R_2 \sin^2\omega.$$ [34])

Bei einer negativ gekrümmten Fläche erhält somit r auch den Wert Null. Da jetzt $\operatorname{tg}^2\omega = -\frac{R_1}{R_2}$, so schneiden die entsprechenden Nachbarnormalen die Haupttangenten. Längs einer Haupttangentenkurve fallen daher die Flächennormalen mit den Binormalen (III D 1, 2, Nr. 29) der Kurve zusammen.

Mit Hülfe der *Hamilton*'schen Gleichung ergibt sich, dass die kürzesten Abstände einer Flächennormalen von ihren Nachbarnormalen auf einem Cylindroid liegen. Die zu einem Punkt (P) einer Fläche (S) gehörenden Krümmungsmittelpunkte der durch (P) gelegten ebenen Schnitte von (S) bilden eine Fläche, die nach einer Drehung von der Grösse $\frac{\pi}{2}$ um die Flächennormale in das fragliche Cylindroid übergeht, wenn man sie einer Transformation mittelst reziproker radii vectores unterwirft, deren Pol im Punkte (P) liegt und deren Modul gleich R_1R_2 ist[34a]).

Schneidet eine Nachbarnormale die Flächentangente (T), so ist ihr kürzester Abstand von (N) parallel der zu (T) konjugierten Flächentangente.

33) *J. Bouquet,* J. de math. (1) 11 (1846), p. 125.

34) „*Knoblauch*", p. 71; „*Bianchi*", p. 261.

34a) *Genty,* Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 27.

Wenn φ den Winkel bedeutet, den die Tangente (T) mit dem zu R_1 gehörenden Normalschnitt bildet, so besteht die Gleichung[35]):

$$r = R_1 R_2 \frac{R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi}{R_1{}^2 \sin^2\varphi + R_2{}^2 \cos^2\varphi} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 - \varrho} = \varrho \sin^2\alpha,$$

wo α den Winkel zwischen (T) und der konjugierten Tangente von (T) bezeichnet. Gehören r' und ϱ' zu der auf (T) senkrechten Tangente, so hat man:

$$\frac{1}{r\varrho} + \frac{1}{r'\varrho'} = \frac{1}{R_1{}^2} + \frac{1}{R_2{}^2};$$

gehören r' und ϱ' zur konjugierten Tangente von (T), so ist:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{r}{r'} = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass die vom Flächenpunkt (P) verschiedenen Endpunkte der zu konjugierten Tangenten gehörenden Strecken r und r' harmonisch liegen mit dem Punkt (P) und dem Krümmungsmittelpunkt des zu $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gehörenden Normalschnitts[36]).

Lassen wir φ mit der Hälfte des charakteristischen Winkels zusammenfallen, so folgt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ führt den Namen *„mittlere Krümmung"* der Fläche für den betrachteten Punkt (vgl. III D 1, 2, p. 95 u. 99).

Eine andere hierher gehörende Art, um zu konjugierten Linien zu gelangen, ist die folgende. Man betrachte eine einfach unendliche Schar von Flächenkurven. Die Tangenten dieser Kurven bilden ein Strahlensystem (III D 9). Durch den Punkt (P) geht nun eine dem System angehörende Tangente (T), und die in ihr liegenden Brennpunkte werden von (P) und einem weiteren Punkte (P') gebildet. Der in (P') schneidende Strahl berühre die Fläche im Punkte mit den Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Dann liegt letzterer in der der Tangente (T) konjugierten Tangente.

Wir können auch durch die Betrachtung der die Tangente (T) schneidenden Nachbarnormale zum Krümmungsradius ϱ des durch (T) gehenden Normalschnitts gelangen. Projiziert man nämlich die fragliche Nachbarnormale senkrecht auf die durch (T) und die Flächennormale (N) gehende Ebene, so schneidet die Projektion die Normale (N) im Endpunkt von ϱ.[37])

35) *F. Joachimsthal*, J. de math. (1) 13 (1848), p. 415.

36) Ib. p. 422.

37) *R. v. Lilienthal*, Math. Ann. 42 (1893), p. 506.

6. Krümmungstheorie der Raumkurven. Die Untersuchung der Krümmung einer Fläche in der Nähe eines Punktes mit Hülfe von Normalschnitten erfordert nur die Kenntnis der Berechnung des Krümmungsradius einer ebenen Kurve (III D 1, 2, Nr. **14**). Denkt man sich aber auf der Fläche durch den Punkt (P) eine beliebige Kurve gezogen und berechnet für diesen Punkt den Halbmesser ihrer ersten Krümmung (III D 1, 2, Nr. 29), so ergibt sich mit einem Schlage der *Meusnier*'sche Satz und der Ausdruck des Krümmungshalbmessers ϱ des durch die Tangente der Kurve gelegten Normalschnitts. Man nennt $\frac{1}{\varrho}$ die *„Normalkrümmung“* der Kurve im Punkte (P), den Endpunkt von ϱ den *„Mittelpunkt“* der Normalkrümmung. Letzterer ergibt sich zugleich als Schnittpunkt der Flächennormale mit der Krümmungsachse (III D 1, 2, Nr. 29) der Kurve. Die Normalkrümmung der Kurve ist auch gleich der Krümmung der senkrechten Projektion der Kurve auf die durch die Flächennormale und die Kurventangente gehende Ebene.

Die Flächennormalen längs einer Flächenkurve bilden eine geradlinige Fläche, die *A. Mannheim* *„Normalie“* genannt hat (Fussn. 32). Ist dieselbe abwickelbar, so ist die Kurve eine Krümmungslinie, fällt sie mit der von den Binormalen der Kurve gebildeten Fläche zusammen, so hat man es mit einer Haupttangentenkurve zu thun.

Legt man durch eine beliebige Raumkurve (III D 1, 2, Nr. 29 f.) eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende Normalen der Kurve sind, und bezeichnet man mit φ den Winkel, den die Erzeugenden der Fläche mit den Hauptnormalen der Kurve bilden, mit s die Bogenlänge, mit $\frac{1}{r}$ die zweite Krümmung der Kurve, so ist die fragliche Fläche abwickelbar, wenn:

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{r} = 0.$$ [38]

Zwei derartige Flächen schneiden sich also unter konstantem Winkel. Daraus ergeben sich die *Joachimsthal*'schen Sätze[39]):

a) Liegt eine Krümmungslinie in einer Ebene oder auf einer Kugel, so schneidet jene Ebene oder jene Kugel die Fläche längs der Krümmungslinie unter sich gleichbleibendem Winkel.

b) Kann man eine Fläche mit einer Ebene oder einer Kugel so schneiden, dass sich der Schnittwinkel längs der Schnittlinie nicht ändert, so ist letztere eine Krümmungslinie der Fläche.

Die Betrachtung der zweiten Krümmung einer Flächenkurve

---

38) *„Darboux“* 1, p. 18. 39) J. f. Math. 30 (1846), p. 347.

führt für Asymptotenlinien zu einem einfachen Ergebnis. Hier gilt der *Enneper*'sche Satz, dass das Quadrat jener Krümmung gleich $\frac{-1}{R_1 R_2}$ ist[40]).

7. Sphärische Abbildung (vgl. III D 1, 2, Nr. 36; III D 6 a, Nr. **11**, 33). Unter der „*Einheitskugel*" verstehen wir die Kugel, welche mit dem Halbmesser 1 um den Koordinatenanfangspunkt beschrieben ist. Jedem regulären Punkt (P) einer Fläche ordnen wir auf folgende Weise einen Punkt der Einheitskugel zu, den wir das „*sphärische Bild*" von (P) nennen. Der Punkt (P) teilt die durch ihn hindurchgehende Flächennormale in zwei Halbgerade. Man wähle eine von diesen und bezeichne die Kosinus der Winkel, die sie mit den positiven Teilen der Koordinatenachsen bildet, mit X, Y, Z. Die fragliche Halbgerade nennt man den positiven Teil der Flächennormalen. Derjenige Halbmesser der Einheitskugel, der diesem positiven Teil der Normalen parallel ist, trifft die Einheitskugel in einem Punkte (Q), der das *sphärische Bild* von (P) heisst[41]). Beschreibt (P) auf der Fläche eine Kurve, so beschreibt (Q) auf der Einheitskugel das „*sphärische Bild der Flächenkurve*". Die sämtlichen durch (P) gehenden Flächenkurven, die in (P) ein und dieselbe Tangente besitzen, haben sphärische Bilder, die in (Q) ein und dieselbe Tangente besitzen. Letztere Tangente heisst das sphärische Bild der ersteren. Hiermit ist zugleich das sphärische Bild einer Halbtangente oder einer Tangentenrichtung festgelegt. Betrachten wir nämlich eine durch (P) gehende Flächenkurve, indem wir u und v als Funktionen einer neuen Veränderlichen t ansehen, so bildet die den wachsenden Werten von t entsprechende Halbtangente mit den positiven Teilen der Koordinatenaxen Winkel, deren Kosinus durch die Ausdrücke:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.}$$

bestimmt werden, wo die Wurzel im Nenner positiv ist. Das sphärische Bild der fraglichen Halbtangente ist wieder eine Halbtangente und besitzt die Richtungskosinus:

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.,}$$

wo die Wurzel ebenfalls positiv ist.

40) *A. Enneper*, Gött. Nachr. 1870, p. 499.

41) *Gauss*, Disquis. § 4 u. § 5.

Ist die betrachtete Fläche abwickelbar, so fallen die sphärischen Bilder aller Flächenkurven in eine einzige Kurve auf der Einheitskugel zusammen. Bei den nicht abwickelbaren Flächen besitzen die Punkte eines Flächenstücks sphärische Bilder, die ein Kugelstück ausfüllen. Letzteres wird das *sphärische Bild* des ersteren genannt. Sollen die Punkte des Flächenstücks den Punkten seines sphärischen Bildes eindeutig entsprechen, so darf im ersteren keine Normalenrichtung zweimal vorkommen.

Hinsichtlich der sphärischen Bilder von Tangenten gelten folgende Sätze:

a) Die der Tangente (T) konjugierte Tangente (T') liegt senkrecht zu dem sphärischen Bilde von (T). Ihre Richtungskosinus sind somit proportional den Grössen:

$$YdZ - ZdY, \quad ZdX - XdZ, \quad XdY - YdX.$$

Da zu einander senkrechte konjugierte Tangenten zu Krümmungslinien gehören, kann man die Gleichung der letzteren auch in die Form setzen:

$$\begin{vmatrix} X & dx & dX \\ Y & dy & dY \\ Z & dz & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

Für den Winkel zweier konjugierter Halbtangenten gilt der Satz, dass die sphärischen Bilder der Halbtangenten einen ihm gleichen Winkel bilden oder ihn zu zwei Rechten ergänzen, je nachdem das Produkt $R_1 R_2$ negativ oder positiv ist[42]).

Die zur Tangente (T) senkrechte Flächentangente werde mit (T_1) bezeichnet, die konjugierte der letzteren mit (T_1'). Das sphärische Bild von (T_1') ist parallel der Tangente (T)[43]). Dieser Satz wurde zuerst von *U. Dini* für die Haupttangenten ausgesprochen[44]).

b) Die Tangente einer Krümmungslinie ist ihrem sphärischen Bilde parallel und zwar ist eine Halbtangente einer Krümmungslinie ihrem sphärischen Bilde parallel oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der zur Krümmungslinie gehörende Hauptkrümmungshalbmesser negativ oder positiv ist.

c) Die Tangente einer Haupttangentenkurve steht senkrecht zu ihrem sphärischen Bilde.

Die Betrachtung des sphärischen Bildes eines Flächenstücks führte *Gauss* zu zwei wichtigen Begriffen. Das Flächenstück ist hier so begrenzt zu denken, dass für seine Punkte keine Normalenrichtung zweimal vor-

42) *V. Reina,* Rom, Linc. R. (4) 6^1 (1890), p. 205. Daselbst Litteratur.

43) *v. Lilienthal,* Math. Ann. 42 (1893), p. 516.

44) Ann. di Mat. (2) 4 (1870—71), p. 180.

kommt. Den Flächeninhalt jenes sphärischen Bildes nennt *Gauss* die *curvatura integra*[44a]) (*Gesamtkrümmung*) (III D 1, 2, Nr. **36**) des Flächenstücks und belegt — wenn wieder (Q) das sphärische Bild des Punktes (P) bedeutet — das mit einem bestimmten Vorzeichen versehene Verhältnis des den Punkt (Q) umgebenden Kugelelements zu dem den Punkt (P) umgebenden Flächenelement mit dem Namen *„Krümmungsmass"* der Fläche im Punkte (P)[45]). Jenes Vorzeichen bestimmt *Gauss* mittelst einer infinitesimalen Betrachtung. Es seien (P') und (P'') zwei dem Punkte (P) unendlich benachbarte Punkte auf der Fläche, (Q') und (Q'') ihre sphärischen Bilder. Lässt man nun einen beweglichen Punkt auf die eine oder die andere Weise das Dreieck $PP'P''$ durchlaufen, so wird sein sphärisches Bild das Dreieck $QQ'Q''$ entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Im ersten Fall ist das Krümmungsmass positiv, im zweiten als negativ anzusehen. Man kann diese Zeichenbestimmung leicht von der Benutzung unendlich kleiner Grössen befreien, indem man sie auf folgende Weise vollzieht. Dreht sich eine Halbtangente um den Punkt (P), so ist das Krümmungsmass positiv oder negativ, je nachdem sich das sphärische Bild der Halbtangente in demselben oder im entgegengesetzten Sinne um den Punkt (Q) dreht. Hiernach liefert der obige Satz über die sphärischen Bilder der Halbtangenten der Krümmungslinien sofort die fragliche Zeichenbestimmung, indem das Vorzeichen des Krümmungsmasses mit dem des Produkts $R_1 R_2$ übereinstimmen muss. Als Wert des Krümmungsmasses findet *Gauss* den reziproken Wert des Produkts $R_1 R_2$.[46])

Wir schliessen hieran die Erwähnung der Art und Weise, wie *O. Bonnet*[47]) die grundlegenden Gleichungen für eine nicht abwickelbare Fläche aufgestellt hat. Dabei wird ein Flächenpunkt (P) bestimmt gedacht durch sein sphärisches Bild und den Abstand des Koordinatenanfangspunktes von der zu (P) gehörenden Tangentialebene der Fläche. Das sphärische Bild von (P) wird festgelegt durch die geographische Länge und das Komplement der geographischen Breite, sodass seine Koordinaten die Form erhalten:

$$X = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad Y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad Z = \cos\vartheta.$$

Bonnet setzt $\varphi = x$ und führt statt ϑ die durch die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = e^y$ bestimmte Veränderliche y ein. An Stelle des fraglichen Abstandes δ wird die durch die Beziehung

44a) Vgl. *W. Boy*, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Inaug.-Diss. Gött. 1901 (III D 6 a, Nr. **11**, **14**).

45) Disquisit. § 6. 46) Disquisit. § 8.

47) J. de math. (2) 5 (1860), p. 153.

$$-z = \frac{\delta}{\sin\vartheta} = \delta \cos iy$$

festgelegte Grösse z verwertet. Jeder Wahl von z als Funktion von x und y entspricht eine Fläche, deren rechtwinklige Koordinaten ξ, η, ζ aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi\cos x + \eta\sin x + \zeta i \sin iy &= -z, \\ \xi\sin x - \eta\cos x &= \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \zeta\cos iy &= \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

berechnet werden können. Setzt man nun:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + i\,\mathrm{tg}\,iy\frac{\partial z}{\partial y} + z = u, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = v, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + i\,\mathrm{tg}\,iy\frac{\partial z}{\partial y} = w,$$

so nimmt die Gleichung der Krümmungslinien die Form an:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

während die Hauptkrümmungshalbmesser der Beziehung genügen:

$$\varrho^2 - (u+w)\cos iy\cdot\varrho + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0.$$

Verwendet man an Stelle der *Bonnet*'schen Veränderlichen x und y die komplexen Veränderlichen α, β, mit Hülfe derer die Koordinaten der Punkte der Einheitskugel durch die Gleichungen:

$$X = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad Y = i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad Z = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

dargestellt werden, und gibt der Gleichung der Tangentialebene die Gestalt:

$$(1-\alpha\beta)x + i(1+\alpha\beta)y + (\alpha+\beta)z + \xi = 0,$$

so erhält die Gleichung der Krümmungslinien die einfache Form:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}\,d\alpha^2 - \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}\,d\beta^2 = 0.\,^{48)}$$

Wendet man die für reelle Gebilde geltenden Benennungen auch auf imaginäre Gebilde an, so kommt man mit *Darboux* zu folgender Auffassung: Die geradlinigen Erzeugenden der Einheitskugel sind die sphärischen Bilder der Berührungskurven der Kegel, die von den Punkten des unendlich fernen imaginären Kugelkreises (III A 7, III C 4) aus der Fläche umschrieben sind. Die Winkelhalbierungslinien dieser Berührungskurven fallen mit den Krümmungslinien zusammen[48a]).

48) „*Darboux*" 1, p. 245. Über die Verwendung der Ebenenkoordinaten vgl. *J. Weingarten,* Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Flächen, Berlin, Festschr. d. techn. Hochsch. 1884, p. 40; „*Bianchi*" p. 139; *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geometrie, autogr. Vorles. 1, Göttingen 1893, p. 261; „*Knoblauch*" p. 83.

48a) „*Darboux*" 1, p. 243; *Scheffers,* Einf. in die Theorie der Flächen, p. 215.

8. Binäre Differentialformen. Differentialparameter. Die Grösse der Hauptkrümmungsradien einer Fläche sowie die Lage ihrer Krümmungs- und Haupttangentenlinien kann von den Mitteln, mit denen man analytisch-geometrisch eine Fläche bestimmt, nicht abhängig sein. Ist daher eine Fläche durch eine Gleichung von der Form: $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so ist in dem genannten Sinne die Wahl des Koordinatensystems ohne Einfluss, sind aber die Koordinaten x, y, z als Funktionen der Veränderlichen u und v gegeben, so ist die Abbildungsart der Fläche auf die (u, v)-Ebene ohne Einfluss. Im ersten Fall überzeugt man sich rechnerisch durch Einführung eines neuen Koordinatensystems von der Richtigkeit der Behauptung, im zweiten Falle hat man an Stelle von u und v Funktionen zweier neuer Veränderlichen etwa u' und v' einzuführen und die im Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{1}{\varrho}$ (Nr. 4) auftretenden quadratischen Differentialformen (III D 1, 2, Nr. 34):

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \equiv A,$$
$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \equiv B$$

zu transformieren. Hierbei erscheinen die Ausdrücke $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ und $\frac{1}{R_1 R_2}$ als Simultaninvarianten von A und B, während die quadratische Form von du und dv, deren Verschwinden die Gleichung der Krümmungslinien liefert, sich als eine Simultankovariante von A und B herausstellt. Ausserdem ergibt sich das Krümmungsmass $\frac{1}{R_1 R_2}$ als eine Differentialinvariante von A[49]) (I B 2, Nr. 22).

Von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der Flächenkurven war die Einführung der Differentialparameter einer Funktion. *G. Lamé*[50]) zeigte, dass, wenn die Funktionen F und G der drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben sind, die Ausdrücke:

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2,$$
$$\nabla FG = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z},$$
$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

49) „*Bianchi*“ p. 35. Ausser der dort angeführten Litteratur: „*Knoblauch*“ p. 150 und *G. Ricci,* Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova 1898, p. 36; *J. Knoblauch,* J. f. Math. 103 (1888), p. 25; *E. Padova,* Bologna Mem. (4) 10 (1890), p. 745; *G. Hessenberg,* Inaug.-Diss. Berlin 1899 = Acta math. 23, p. 121; *H. Maschke,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 197.

50) Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris 1859), p. 6. Vgl. J. de math. (1) 2 (1837), p. 147; ibid. (1) 5 (1840), p. 313. Man bezeichnete ursprünglich die Quadratwurzel aus $\Delta_1 F$ mit $\Delta_1 F$.

sich durch Einführung eines neuen Koordinatensystems nicht ändern. Man nennt $\Delta_1 F$ den ersten, $\Delta_2 F$ den zweiten Differentialparameter der Funktion F, hingegen ∇FG den Zwischenparameter, auch den gemischten Differentialparameter der Funktionen F und G. Für eine Funktion φ von u und v bezeichnet *E. Beltrami* hinsichtlich einer Fläche den Ausdruck:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}\ ^{51)}$$

als ersten Differentialparameter von φ; ferner, wenn

$$\alpha = \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad \beta = \frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

den Ausdruck[52]):

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

als zweiten Differentialparameter von φ, und endlich, wenn ψ ebenfalls eine Funktion von u und v, den Ausdruck:

$$\nabla \varphi \psi = \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2}\ ^{53)}$$

als gemischten Differentialparameter von φ und ψ. Diese drei Parameter haben die Eigenschaft ihren Wert nicht zu ändern, wenn sie nach Einführung neuer Veränderlicher statt u und v mit Hülfe der Koeffizienten der transformierten Form von A gebildet werden, sodass z. B., falls man u und v als Funktionen von u_1 und v_1 ansieht, und:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2$$

ist, man auch hat:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right)^2 - 2F_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + G_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right)^2}{E_1 G_1 - F_1^2}.$$

Die Herleitung der *Beltrami*'schen Differentialparameter aus den *Lamé*'schen hat *v. Lilienthal* in der Schrift „Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen", Leipzig 1896, p. 14 ff. dargestellt. Vgl. Math. Ann. 38 (1891), p. 441.

Über den allgemeinen Begriff eines Differentialparameters von Funktionen hinsichtlich einer quadratischen binären Differentialform

51) Giorn. di. mat. 2 (1864), p. 276. 52) Ibid., p. 358.

53) Ibid. p. 358. Eine Darstellung der Haupteigenschaften der Differentialparameter von *Beltrami* findet man in Math. Ann. 1 (1869), p. 577. Vgl. *G. Frattini*, Giorn. di mat. 13 (1875), p. 161, und III D 6 a, Nr. 1, Fussn. 3.

und die Abhängigkeit eines solchen Parameters von den hier betrachteten sehe man *Beltrami*, Giorn. di. mat. 2 (1864), p. 355, ferner die Darstellungen bei „*Bianchi*" und „*Knoblauch*", sowie „*Darboux*" 3, p. 260; *G. Frobenius*, J. f. Math. 103 (1888), p. 25; *J. Knoblauch*, ibid. 111 (1893), p. 277, 329.

Um die von *Beltrami*[54]) gefundene Bedeutung des ersten Differentialparameters darzuthun, haben wir zunächst den Begriff der Ableitung einer Funktion $f(u, v)$ nach der Bogenlänge einer Einzelkurve sowohl einer Schar von Flächenkurven sowie der Orthogonalschar zu erklären[55]). Sind die Koordinaten x, y, z einer Raumkurve als Funktionen von t gegeben, so kann man die Ableitung einer Funktion $f(t)$ von t nach der Bogenlänge s der Kurve berechnen, ohne die Bogenlänge selbst durch Integration ermittelt zu haben, vermöge der Beziehung:

$$\frac{df(t)}{ds} = \frac{f'(t)}{\sqrt{\sum \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}.$$

Betrachten wir nun eine durch eine Gleichung $\varphi(u, v) = \text{const.}$ gegebene Schar von Flächenkurven und sei $f(u, v)$ eine Funktion von u und v. Längs einer Einzelkurve der Schar mögen u und v als Funktionen von t angesehen werden. Wir erhalten jetzt als Ableitung von $f(u, v)$ nach der Bogenlänge der betrachteten Kurve:

$$\frac{df(u,v)}{ds} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}.$$

Aber man hat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0,$$

sodass:

$$\frac{df(u,v)}{ds} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}}.$$

Im Besonderen werden die Richtungskosinus der Tangenten der Kurven $\varphi = \text{const.}$:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.}$$

54) Giorn. di mat. 2 (1864), p. 276.

55) *E. Cesàro*, Lezioni di geometria intrinseca, Neapel 1896, p. 107 u. 155; deutsche Ausgabe: Vorlesungen über natürliche Geometrie, von *G. Kowalewski*

Längs einer Einzelkurve der Orthogonalschar mögen u und v als Funktionen von τ angesehen werden, während die Bogenlänge der Kurve mit σ bezeichnet sei. Da jetzt:

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{d\tau} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{d\tau}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = 0,$$

so ist:

$$\frac{du}{d\tau} : \frac{dv}{d\tau} = -F\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\frac{\partial \varphi}{\partial u} : E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

und es wird:

$$\frac{df(u,v)}{d\sigma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\left(-F\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) - \frac{\partial f}{\partial v}\left(-E\frac{\partial \varphi}{\partial v} + F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{\sqrt{EG - F^2}\cdot\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}}$$

Die Bildung der Ableitungen $\frac{df}{ds}$ und $\frac{df}{d\sigma}$ erfordert, wie man sieht, nicht, dass die Kurvenschar $\varphi = \text{const.}$ durch eine endliche Gleichung bestimmt sei. Ist sie durch eine Differentialgleichung von der Form $\xi du + \eta dv = 0$ gegeben, so hat man nur $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ durch ξ und η zu ersetzen[56]).

Ableitungen nach Bogenlängen sind vielfach benutzt worden, zuerst wohl von *Lamé* (J. de math. (1) 5 (1840), p. 340), sodann von *O. Bonnet*[57]), dessen Methode *E. Lamarle*[58]) und *Ph. Gilbert*[59]) benutzt haben, ferner von *Cesàro* in dem genannten Werk und von *A. Voss*[60]). Aber man hat hier zu unterscheiden zwischen Quotienten unendlich kleiner Grössen und Ableitungen. Die Berechnung jener Quotienten erfolgt in den genannten Arbeiten unter der Annahme $\varphi = u$ oder $\varphi = v$. Die allgemeineren hier definierten Ableitungen sind in der *Lie*'schen Theorie der infinitesimalen Transformationen einbegriffen (II A 6, Nr. 4).

Die vorige Gleichung liefert für $f = \varphi$:

$$\frac{d\varphi(u,v)}{d\sigma} = \sqrt{\Delta_1 \varphi}.$$

Diese Gleichung zeigt die von *Beltrami* angegebene Bedeutung des ersten Differentialparameters von φ, er ist das Quadrat der Ableitung von φ nach der Bogenlänge der in (P) zur Kurve $\varphi = \text{const.}$ senk-

---

Leipzig 1901, p. 137, 198; *v. Lilienthal*, Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig 1896, p. 11.

56) *v. Lilienthal*, Math. Ann. 42 (1893), p. 508.

57) J. éc. polyt. 13 (1848), p. 32; J. de math. (2) 5 (1860), p. 165.

58) Exposé géométrique du calcul diff. et int., 3, Paris 1863, p. 458.

59) Bruxelles Mém. 37 (1868), p. 1.

60) Münch. Ber. 22 (1892), p. 273.

rechten Kurve. Die fragliche Bedeutung ist in einer allgemeineren Eigenschaft von $\Delta_1 \varphi$ enthalten. Betrachten wir irgend eine Schar von Flächenkurven nebst ihrer Orthogonalschar und bezeichnen mit $\frac{df}{ds_1}$ und $\frac{df}{d\sigma_1}$ die Ableitungen von f nach der Bogenlänge der ersten und zweiten Schar, so hat man stets[61]):

$$\Delta_1 f = \left(\frac{df}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{df}{ds_2}\right)^2.$$

K. Peterson[62]) kommt auf den ersten Differentialparameter einer Funktion $f(u, v)$ durch folgende Betrachtung. Man bezeichne mit ω den Winkel der Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, mit α den Winkel der Linie $\varphi = \text{const.}$ mit der Linie $u = \text{const.}$ Man findet dann:

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{E}} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sqrt{G}}\right\}.$$

Ändert sich nun α, so wird $\frac{df}{ds}$ zu Null für $\varphi = f$ und erreicht sein Maximum in der zur Kurve $f = \text{const.}$ senkrechten Richtung. Das Quadrat dieses Maximums ist gleich $\Delta_1 f$.

Auf weitere Eigenschaften der Differentialparameter werden wir in Nr. **12** zurückkommen. Hier finde noch folgende Bemerkung Platz. Wird die Gleichung der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\varphi = \text{const.}$ in der Form $\psi(u, v) = \text{const.}$ angenommen, so hat man für die Differentiale der Koordinaten:

$$dx = \frac{dx}{ds}\frac{d\psi}{\sqrt{\Delta_1\psi}} + \frac{dx}{d\sigma}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}, \quad \text{u. s. w.}$$

Verwiesen sei auf die Darstellung bei „*Darboux*" 3, p. 193.

9. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Gauss*[63]) (III D 1, 2, Nr. **34**) stellte für die zweiten Ableitungen der Koordinaten einer Fläche Ausdrücke auf, die linear und homogen sind in den ersten Ableitungen und den Richtungskosinus der Normalen. Wir können sie kurz so schreiben:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_{11}\frac{\partial x}{\partial u} + a_{12}\frac{\partial x}{\partial v} + LX, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = a_{21}\frac{\partial x}{\partial u} + a_{22}\frac{\partial x}{\partial v} + MX,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a_{31}\frac{\partial x}{\partial u} + a_{32}\frac{\partial x}{\partial v} + NX.$$

Sind die Parameterlinien konjugiert, so verschwindet M, und die

61) *v. Lilienthal,* die unter 55) zitierte Schrift p. 15; ibid. p. 16 die entsprechende Darstellung des zweiten Differentialparameters. Vgl. das zitierte Werk von *Cesàro,* im Original p. 165, deutsche Ausgabe p. 210.

62) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 29.

63) Disquisit. § 11.

drei Koordinaten x, y, z sind partikuläre Integrale einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} + m \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + n \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0; \tag{1}$$

sind aber die Kurven $v = \text{const.}$ Haupttangentenkurven, so verschwindet L, und x, y, z sind partikuläre Integrale einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + m' \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + n' \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

In eine dieser Formen kann man aber die allgemeinere Differentialgleichung:

$$A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2} + B \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial \beta} + C \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \beta^2} + A' \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + B' \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = 0 \tag{3}$$

stets transformieren[64]). Die Gleichung ihrer Charakteristiken ist nämlich (II A 7 c, Nr. 2):

$$A\, d\beta^2 - B\, d\alpha\, d\beta + C\, d\alpha^2 = 0.$$

Zerfällt die linke Seite dieser Gleichung in zwei von einander verschiedene Faktoren und führt man deren Integrale $u = \varphi(\alpha, \beta)$, $v = \psi(\alpha, \beta)$ als neue Veränderliche ein, so nimmt die Gleichung (3) die Gestalt (1) an; in entsprechender Weise findet sich die Gestalt (2), wenn die linke Seite der Gleichung der Charakteristiken ein Quadrat ist. Man kann daher den Satz aussprechen: „Genügen die drei Flächenkoordinaten einer Gleichung von der Form (3), so bestimmen die Charakteristiken der Gleichung entweder ein System konjugierter Linien oder eine Schar von Haupttangentenkurven.“ Denkt man sich x, y, z als Funktionen von α und β gegeben und sucht eine Gleichung von der Form (3) zu bestimmen, der diese Funktionen genügen, so gelingt, da die Anzahl der wesentlichen Koeffizienten in (3) gleich vier ist die Bestimmung erst durch Hinzunahme einer weiteren Funktion von, x, y, z, die als viertes partikuläres Integral anzusehen ist. Auf diese Weise gehört zu jeder Funktion von x, y, z ein konjugiertes System auf der Fläche. Nimmt man diese Funktion gleich $x^2 + y^2 + z^2$, so erhält man das System der Krümmungslinien.

Ein ähnliches Ergebnis findet sich für die Richtungskosinus X, Y, Z der Flächennormalen und den Abstand ξ der entsprechenden Tangentialebene vom Anfangspunkt der Koordinaten. Die Grössen X, Y, Z genügen stets Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} + \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \tau \vartheta = 0, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \mu' \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \nu' \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \tau' \vartheta = 0.$$

---

64) „*Darboux*“ 1, p. 133, p. 118, p. 240; vgl. auch p. 234.

Sind die Parameterlinien konjugiert oder besteht die Schar $v = \text{const.}$ derselben aus Haupttangentenkurven, so genügt die Grösse $\xi = -\Sigma xX$ ebenfalls der ersten oder zweiten dieser Gleichungen. Man kann also hinsichtlich der Funktionen X, Y, Z, ξ einen entsprechenden Satz wie vorhin für x, y, z aufstellen, wenn man nur statt (3) die allgemeinere Gleichung:

$$A\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial\beta} + C\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\beta^2} + A'\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} + B'\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta} + C'\vartheta = 0$$

benutzt.

Setzen wir entsprechend der vorhin angewandten Bezeichnungsweise:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = b_{11}\frac{\partial X}{\partial u} + b_{12}\frac{\partial X}{\partial v} + L_1 X, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} = b_{21}\frac{\partial X}{\partial u} + b_{22}\frac{\partial X}{\partial v} + M_1 X,$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = b_{31}\frac{\partial X}{\partial u} + b_{32}\frac{\partial X}{\partial v} + N_1 X,$$

so ist im allgemeinen Fall der Zusammenhang zwischen den Grössen $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\lambda\mu}$ ziemlich verwickelt, nur wenn die Parameterlinien aus Haupttangentenkurven bestehen, finden sich einfache Beziehungen[65]. Im Besonderen hat man hier:

$$a_{21} = -b_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\sqrt{-R_1R_2}}{\partial v}, \quad a_{22} = -b_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\sqrt{-R_1R_2}}{\partial u}.$$

Somit ist $a_{22}\,du + a_{21}\,dv$ ein vollständiges Differential und ebenso $b_{22}\,du + b_{21}\,dv$.[66]) Sind die Grössen X, Y, Z als Funktionen von u und v gegeben und stellt sich der Ausdruck $b_{22}\,du + b_{21}\,dv$ als exaktes Differential heraus, so sind die Parameterlinien auf der Einheitskugel die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven einer Fläche, die sich mittels Quadraturen bestimmen lässt[67]).

Die Ausdrücke der ersten Ableitungen der Koordinaten durch die Grössen X, Y, Z sind mit Hülfe der Gleichungen:

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -L, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -M,$$
$$\sum X\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -M; \quad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -N$$

leicht zu finden (III D 1, 2, Nr. 34). Fallen die Parameterlinien mit den Haupttangentenkurven zusammen, so erhält man:

$$dx = -\sqrt{-R_1R_2}\left\{\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du - \left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right)dv\right\}, \text{ u.s.w.}$$

65) „*Bianchi*“ § 64.

66) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 339; „*Darboux*“ 4, p. 33.

67) *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 183.

Hieran knüpfte *A. Lelieuvre* folgende Bemerkung[68]). Setzt man:

$$\nu_1 = \sqrt[4]{-R_1 R_2} \cdot X, \quad \nu_2 = \sqrt[4]{-R_1 R_2} \cdot Y, \quad \nu_3 = \sqrt[4]{-R_1 R_2} \cdot Z,$$

so entsteht:

$$dx = -\left\{\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial u} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial u}\right\} du + \left\{\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial v} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial v}\right\} dv, \text{ u. s. w.}$$

Die Integrabilitätsbedingungen (II A 2, Nr. 43) der so für dx, dy, dz gefundenen Differentialformen nehmen die Gestalt an:

$$\frac{\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial u \partial v}}{\nu_1} = \frac{\frac{\partial^2 \nu_2}{\partial u \partial v}}{\nu_2} = \frac{\frac{\partial^2 \nu_3}{\partial u \partial v}}{\nu_3},$$

d. h. die Grössen ν sind partikuläre Integrale einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \vartheta \cdot f(u, v).$$

Kennt man umgekehrt drei partikuläre Integrale einer solchen Differentialgleichung, so kann man zunächst die Ausdrücke:

$$\left(\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial u} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial u}\right) du - \left(\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial v} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial v}\right) dv, \text{ u. s. w.}$$

bilden und erhält dann durch Quadraturen die Koordinaten einer Fläche, auf der die Parameterlinien Haupttangentenkurven sind. *E. Goursat*[69]) zeigte einen Weg, auf dem man von den *Lelieuvre*'schen Formeln ausgehend die Koordinaten beliebig vieler Flächen als solche Funktionen der Parameter der Haupttangentenkurven darstellen kann, die kein Integrationszeichen enthalten.

10. Kinematische Gesichtspunkte (IV 3, Nr. 1, 18—21). Wir haben hier zunächst die geometrisch gehaltenen Ausführungen von *E. Lamarle*[70]) und *A. Mannheim*[71]) zu erwähnen, von denen die ersteren auf der Kinematik der Geraden, die letzteren auf der Kinematik eines starren, vier Bedingungen unterworfenen Systems beruhen. Eingehender wollen wir den Standpunkt von *Beltrami*[72]) und *Darboux* darlegen.

Wir denken uns eine einfach unendliche Kurvenschar (S) auf der Fläche, die durch eine endliche Gleichung von der Form $\varphi(u, v) = \text{const.}$ oder durch eine Differentialgleichung von der Form:

68) *Darboux,* Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 126; „*Bianchi*" § 68; „*Darboux*" 4, p. 25. Vgl. die Anwendung auf infinit. Deformation von Flächen, III D 6 a, Nr. 32.

69) Par. soc. math. Bull. 24 (1896), p. 43.

70) Das unter 58) zitierte Werk, p. 418.

71) Cours de géométrie descriptive, Paris 1886, p. 294 ff., woselbst zahlreiche Litteraturangaben; Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 141 ff.

72) Giorn. di mat. 10 (1872), p. 109.

$$f_1(u, v)\, du + f_2(u, v)\, dv = 0$$

festgelegt sei und betrachten ausserdem die Schar (Σ) ihrer senkrechten Durchdringungskurven. Im Punkte (P) der Fläche kreuzen sich zwei Einzelkurven beider Scharen und ihre Tangenten bilden mit der Flächennormalen ein rechtwinkliges Dreikant. Die Richtungskosinus der drei Kanten sind in der unter Nr. 8 erklärten Bezeichnungsweise:

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}; \quad \frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}; \quad X, Y, Z.$$

Diese Kanten nehmen wir zu Achsen eines neuen, beweglichen Koordinatensystems und nennen sie der Reihe nach die x'-, y'-, z'-Achse. Durchläuft der Punkt (P) eine Flächenkurve, so bewegt sich mit ihm das fragliche Dreikant und zwar kann für einen unendlich kleinen Zeitraum diese Bewegung aufgefasst werden 1) als eine Schraubung, d. h. Drehung um eine bestimmte Achse und Fortschreitungsbewegung (Translation) parallel zu ihr (*Beltrami*'scher Standpunkt), oder 2) als eine Fortschreitungsbewegung in einer von (P) ausgehenden Tangentialrichtung der Fläche und eine Drehung um eine durch (P) gehende Achse (*Darboux*'scher Standpunkt). Dabei ist bekanntlich die unter 1) auftretende Schraubungsachse parallel der unter 2) gedachten Drehungsachse und die Grösse der Drehung ist in beiden Fällen dieselbe. *Beltrami* bestimmt die Richtungskosinus der Schraubungsachse im System der x'-y'-z'-Koordinaten und zeigt für eine Verrückung des Punktes (P) in der x'-Achse, dass diese Verrückung auf einer Krümmungslinie oder Haupttangentenkurve erfolgt, je nachdem die Schraubungsachse zur x'- oder zur y'-Achse senkrecht ist. Zieht man auch die übrigen von *Beltrami* nicht berücksichtigten Verrückungen des Dreikants in Betracht, so erhält man eine einfach unendliche Anzahl von Schraubungsachsen, die ein Cylindroid bilden[73]). Hier zeigt sich, dass die Verrückung des Punktes (P) stets in einer Krümmungslinie erfolgt, wenn die Schraubungsachse senkrecht zur Verrückungsrichtung liegt. Die entsprechenden Schraubungen sind die einzigen, die sich auf blosse Drehungen beschränken. Erfolgt die Verrückung auf der zu R_1 (oder R_2) gehörenden Krümmungslinie, so trifft die entsprechende Schraubungsachse den von (P) verschiedenen Endpunkt von R_1 (oder R_2). — Die Verrückung erfolgt auf einer Haupttangentenkurve, wenn die Schraubungsachse senkrecht ist zu der auf der Verrückungsrichtung senkrechten Flächentangente.

Darboux bezieht ebenfalls die Fortschreitungs- und Drehungs-

73) v. *Lilienthal*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 11 (1902), p. 38.

bewegung auf das System der x'-y'-z'-Achsen. Dabei werden die Komponenten der Fortschreitung durch die Gleichungen gegeben[74]):

$$\sum dx \frac{dx}{ds} = \xi du + \xi_1 dv, \quad \sum dx \frac{dx}{d\sigma} = \eta du + \eta_1 dv,$$
$$\sum dx X = 0,$$

und die Komponenten der Drehung durch die Gleichungen:

$$\sum X\, d\frac{dx}{d\sigma} = p\, du + p_1 dv, \quad \sum \frac{dx}{ds} dX = q\, du + q_1 dv,$$
$$\sum \frac{dx}{d\sigma}\, d\frac{dx}{ds} = r\, du + r_1 dv.$$

Die Grössen ξdu, ηdu, $p du$, $q du$, $r du$ oder $\xi_1 dv$, $\eta_1 dv$, $p_1 dv$, $q_1 dv$, $r_1 dv$ haben also die Bedeutung der Translations- und Rotationskomponenten bei einer auf einer Kurve $v = \text{const.}$ oder $u = \text{const.}$ vor sich gehenden Verrückung. Ein mit dem Dreikant fest verbundener Punkt, dessen Koordinaten hinsichtlich der drei Kanten x' y', z' seien, erfährt durch die unendlich kleine Bewegung des Dreikants eine Verrückung, deren Komponenten hinsichtlich der drei Kanten durch die Ausdrücke

$$\xi du + \xi_1 dv + (q\, du + q_1 dv) z' - (r\, du + r_1 dv) y',$$
$$\eta du + \eta_1 dv + (r\, du + r_1 dv) x' - (p du + p_1 dv) z',$$
$$(p\, du + p_1 dv) y' - (q\, du + q_1 dv) x'$$

bestimmt werden. Die Gleichungen der bisher betrachteten Kurvensysteme auf einer Fläche ergeben sich jetzt folgendermassen. Die der Tangente (dx, dy, dz) konjugierte Tangente ist die Schnittlinie der beiden x', y'-Ebenen, die zu den Punkten (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ gehören. Die Punkte der konjugierten Tangente müssen also Verrückungen erfahren, die in der zu (P) gehörenden x', y'-Ebene liegen, d. h.:

$$(p\, du + q_1 dv) y' - (q\, du + q_1 dv) x' = 0$$

ist die Gleichung der konjugierten Tangente. Fällt letztere mit der durch die Verrückung von (P) bestimmten Tangente zusammen, so ist diese Verrückung auf einer Haupttangente erfolgt, d. h.

$$(p\, du + p_1 dv)(\eta\, du + \eta_1 dv) - (q\, du + q_1 dv)(\xi\, du + \xi_1 dv) = 0$$

ist die Gleichung der Haupttangentenkurven.

Die Gleichung der Krümmungslinien ergiebt sich hier von zwei Gesichtspunkten aus. Einmal bilden die z'-Kanten längs einer Krümmungslinie eine abwickelbare Fläche. Bei einer Verrückung

74) „*Darboux*" 2, p. 347 ff.

von (P) auf einer Krümmungslinie muss also ein Punkt der z'-Kante in dieser Kante verschoben werden, für ihn ist somit $x' = y' = 0$ und:

$$\xi\,du + \xi_1 dv + (q\,du + q_1 dv)\,z' = 0,$$
$$\eta\,du + \eta_1 dv - (p\,du + p_1 dv)\,z' = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Beziehungen z', so folgt die Gleichung der Krümmungslinien, eliminiert man du und dv, so ergiebt sich die Gleichung der Hauptkrümmungshalbmesser. Zweitens kann man fragen, für welche Verrückungen des Punktes (P) sich Punkte (x', y', z') finden, die in Ruhe bleiben. Als Bedingung des jetzt verlangten gleichzeitigen Verschwindens der Verrückungskomponenten erscheint ebenfalls die Gleichung der Krümmungslinien.

III. Geodätische Krümmung.

11. Historisches. Die erste veröffentlichte Betrachtung des heutzutage mit dem Namen *„geodätische Krümmung einer Flächenkurve"* belegten Ausdrucks dürfte von *F. Minding*[75]) herrühren, der 1830 den folgenden Satz aufstellte: „Längs der Kurven, die auf einer Fläche bei kürzestem Umfang ein Flächenstück von gegebenem Flächeninhalt begrenzen, ändert sich die Grösse $\frac{\cos i}{R}$ nicht, wo R den Halbmesser der ersten Krümmung der Kurve und i den Winkel bedeutet, den die Schmiegungsebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche einschliesst." Kurz darauf wies *Minding*[76]) nach, dafs jener Ausdruck sich allein durch die Grössen E, F, G und ihre ersten Ableitungen sowie durch die Differentiale du, dv, d^2u, d^2v darstellen lässt. Später zeigte *Ch. Delaunay*[77]), dass die Frage nach den Flächenkurven, die bei gegebener Länge ein möglichst grosses Flächenstück begrenzen, ebenfalls auf die Kurven führt, für die der Ausdruck $\frac{\cos i}{R}$ konstant ist. *O. Bonnet*[78]) nannte jenen Ausdruck die *„geodätische Krümmung"*.

R. Liouville beschäftigt sich in der ersten und zweiten Note zur fünften Auflage von *Monge*'s Application d'analyse à la géométrie (Paris 1850) ausführlich mit der geodätischen Krümmung und ebenso *J. Bertrand* im Traité de calcul différentiel et intégral, 1, Paris 1862, p. 736. Vgl. *„Darboux"* 3, p. 113.

---

75) J. f. Math. 5 (1830), p. 297. Vgl. III D 6a, Nr. **1**, Fussn. 2.

76) Ib. 6 (1830), p. 159. Vgl. III D 6a, Nr. **2**, **15**.

77) J. de math. (1) 8 (1843), p. 241. Vgl. *E. Catalan*, J. éc. polyt. 17 (1843), p. 151; *O. Bonnet*, ib. 19 (1848), p. 44; *„Darboux"* 3, p. 151.

78) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 43.

In dem vor kurzem (1900) herausgegebenen Nachlass von *Gauss* findet sich p. 387 eine mit der *Minding*'schen gleiche Definition der geodätischen Krümmung, die *Gauss* „Seitenkrümmung" nennt. Wir bezeichnen sie für den Augenblick mit Kg. Von der Seite 389 der *Gauss*'schen Arbeit an ist aber unter „Seitenkrümmung" das über eine Flächenkurve hinerstreckte Integral $\int \mathrm{Kg}\, ds$ zu verstehen, denn der von *Gauss* für das „Differential der Seitenkrümmung" gefundene Ausdruck stimmt bis auf den Faktor ds mit dem von *Minding* für $\frac{\cos i}{R}$ gegebenen überein. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass *Gauss* den *Bonnet*'schen, weiter unten (Nr. **15**) erwähnten, Satz über die curvatura integra eines von beliebigen Flächenkurven begrenzten Polygons schon gekannt hat.

12. Definitionen und Ausdrücke für die geodätische Krümmung. (Vgl. Nr. **15**.) Anschauliche Definitionen der geodätischen Krümmung sind die folgenden:

1) Betrachten wir eine Flächenkurve und in ihr einen Punkt (P). Die zu (P) gehörende Krümmungsachse (III D 1, 2, Nr. 29) der Kurve schneidet die zu (P) gehörende Tangentialebene der Fläche im *Mittelpunkte* der zu (P) gehörenden geodätischen Krümmung der Kurve; der Abstand des Mittelpunkts vom Punkte (P) heisst der *Halbmesser* der geodätischen Krümmung.

2) Es sei (P_1) ein zweiter Punkt der Kurve, (T') und (T_1') seien diejenigen Normalen der Kurve in (P) und (P_1), die zugleich Flächentangenten sind. Die senkrechte Projektion von (T_1') auf die durch (T') und die Sehne (PP_1) gelegte Ebene schneide (T') im Punkte (S). Lässt man nun den Punkt (P_1) sich dem Punkte (P) immer mehr nähern, so rückt (S) in den Mittelpunkt der zu (P) gehörenden geodätischen Krümmung der Kurve[79]).

3) Projiziert man die Flächenkurve senkrecht auf die zu (P) gehörende Tangentialebene der Fläche, so ist die Krümmung der Projektion gleich der geodätischen Krümmung der Kurve.

Ausdrücke für die geodätische Krümmung. Der oben gekennzeichnete *Minding*'sche Ausdruck ist zu gross, um hier Platz zu finden[80]); eine Vereinfachung des Ausdrucks stellt die *Bonnet*'sche Formel dar. Ist $\varphi(u, v) = \text{const.}$ die Gleichung der betrachteten Flächenkurve, so besteht für ihre geodätische Krümmung $\frac{1}{R}$, falls:

---

79) *R. v. Lilienthal,* Math. Ann. 42 (1893), p. 506; „*Darboux*" 3, p. 117.

80) Vgl. *Beltrami,* Giorn. di mat. 3 (1865), p. 86.

$$\mathfrak{N} = \sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}$$

die Gleichung[81]):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\mathfrak{N}} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial u} - E\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\mathfrak{N}}\right\}.$$

Der *Beltrami*'sche Ausdruck ist der folgende[82]):

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} + \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right).$$

J. Liouville führte den Winkel (i) ein, den die betrachtete Flächenkurve mit der Parameterlinie $u =$ const. bildet, wobei die Parameterlinien als rechtwinklig angenommen werden. Sind K_1 und K_2 die geodätischen Krümmungshalbmesser der Linien $v =$ const. und $u =$ const., so ist:

$$\frac{1}{R} = -\frac{di}{ds} + \frac{\cos i}{K_2} + \frac{\sin i}{K_1}.$$

Diese Gleichung findet sich in der Note II p. 574 der *Liouville*'schen Ausgabe von *Monge*'s Application. Eine Erweiterung der Formel für beliebige Parameterlinien gab *Liouville* in den Par. C. R. 32 (1851), p. 533, während im folgenden Bande der C. R. (1851), p. 89 *Bonnet* die *Liouville*'schen Formeln aus seinen früheren ableitet[83]). An den *Liouville*'schen Ausdruck hat *G. Ricci*[83a]) eine Reihe von Folgerungen geknüpft, von denen wir hier die folgende hervorheben: Die geodätische Krümmung einer Schar isogonaler Trajektorien der Parameterlinien sei $\frac{1}{R}$, ihre Bogenlänge s; für die Orthogonalschar der betrachteten Schar sei die geodätische Krümmung $\frac{1}{R'}$, die Bogenlänge σ. Dann ist in ein und demselben Flächenpunkt, wie man auch die erste Schar wählen möge, der Ausdruck:

$$\frac{d\frac{1}{R}}{ds} - \frac{d\frac{1}{R'}}{d\sigma}$$

konstant und wird von *Ricci* die *Anisothermie* des Büschels der isogonalen Trajektorien der Parameterlinien genannt.

Hat man es mit einer einzelnen Flächenkurve zu thun, so sehe man ihre Koordinaten als Funktionen ihrer Bogenlänge s an. Dann folgt:

$$\frac{1}{R} = \sum\left(Y\frac{dz}{ds} - Z\frac{dy}{ds}\right)\frac{d^2x}{ds^2}.$$

81) Par. C. R. 42 (1856), p. 1137; J. de math. (2) 5 (1860), p. 166.

82) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 83.

83) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 43.

83a) Die unter 49) zitierten Lezioni, p. 214.

Ist aber die Kurve als Individuum einer Kurvenschar betrachtet, so kennt man damit auch die Schar der senkrechten Durchdringungskurven. Jetzt wird unter Benutzung der oben definierten Ableitungen nach Bogenlängen:

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{dx}{d\sigma}\,\frac{d^2x}{ds^2},$$

wo $\frac{d^2x}{ds^2}$ soviel bedeutet wie $\frac{d}{ds}\,\frac{dx}{ds}$.

Ein anderer Weg, der zu übersichtlichen Ausdrücken für die geodätische Krümmung führt, ist der folgende. Man nehme irgend zwei einfach unendliche Kurvenscharen auf der Fläche, die sich unter dem Winkel φ schneiden mögen. Mit s_1 und s_2 bezeichne man ihre Bogenlängen, mit σ_1 und σ_2 die ihrer orthogonalen Trajektorien. Setzt man nun:

$$dx = \frac{dx}{ds_1} S_1 + \frac{dx}{ds_2} S_2 = \frac{dx}{d\sigma_1} S_1' + \frac{dx}{d\sigma_2} S_2',$$

so sind S_1, S_2, S_1', S_2' lineare Differentialformen von du und dv, die die integrierenden Faktoren λ_1, λ_2, λ_1', λ_2' besitzen mögen. Bezeichnen wir nun mit $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$ die geodätischen Krümmungen der durch die Differentialgleichungen $S_2 = 0$ und $S_1 = 0$ festgelegten Kurven, mit $\frac{1}{K_1'}$ und $\frac{1}{K_2'}$ die ihrer orthogonalen Trajektorien, so hat man[84]):

$$\frac{1}{K_1} = \frac{d}{d\sigma_1} \log \frac{\lambda_2'}{\sin\varphi}, \qquad \frac{1}{K_2} = \frac{d}{d\sigma_2} \log \frac{\lambda_1'}{\sin\varphi},$$

$$\frac{1}{K_1'} = \frac{d}{ds_1} \log \frac{\lambda_2}{\sin\varphi}, \qquad \frac{1}{K_2'} = \frac{d}{ds_2} \log \frac{\lambda_1}{\sin\varphi}.$$

Endlich lässt sich für die geodätische Krümmung einer Kurve ein Ausdruck aufstellen, der dem *Euler*'schen für die Normalkrümmung entspricht. Denken wir uns wieder das bewegliche System der x', y', z'-Achsen. Jede unendlich kleine Verrückung des Anfangspunkts (P) dieses Systems bewirkt eine unendlich kleine Verrückung des Dreikants, die als eine Schraubenbewegung aufgefasst werden kann. Einer auf der zu R_1 (R_2) gehörenden Krümmungslinie erfolgenden Verrückung des Punktes (P) entspricht, wie wir in Nr. **10** sahen, eine Schraubungsachse, die durch den Endpunkt von $R_1(R_2)$ geht und die Tangente der zu $R_2(R_1)$ gehörenden Krümmungslinie in einem Punkte schneidet, der mit (P_1) bez. (P_2) bezeichnet werden möge. Die durch (P_1) und (P_2) gehende Gerade enthält die Mittelpunkte der geodätischen Krümmungen $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$ der Kurven, deren Tangenten mit der x'- bez. y'-Achse zusammenfallen. Sie ist zugleich der Ort derjenigen

84) *v. Lilienthal,* Math. Ann. 42 (1893), p. 514.

Punkte der Tangentialebene, die durch die Verrückungen des Dreikants senkrecht zur Tangentialebene verschoben werden. Bezeichnet man nun die mit geeignetem Vorzeichen versehenen Masszahlen der Strecken PP_1 und PP_2 mit l_1 bez. l_2, so bestehen die Gleichungen[85]):

$$\frac{1}{K_1} = \frac{\cos\varphi}{l_1} - \frac{\sin\varphi}{l_2}, \quad \frac{1}{K_2} = \frac{\sin\varphi}{l_1} + \frac{\cos\varphi}{l_2}.$$

Bonnet und *Liouville* wandten die geodätische Krümmung zur Vereinfachung der Darstellung des *Gauss*'schen Krümmungsmasses an. Werden die geodätischen Krümmungen der Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ mit $\frac{1}{K_u}$ und $\frac{1}{K_v}$ bezeichnet und ist φ der Winkel, unter dem sich die Parameterlinien schneiden, so findet *Liouville* die Gleichung[86]):

$$\frac{\sqrt{EG-F^2}}{R_1 R_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{K_v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{K_u}\right).$$

13. Sätze über die geodätische Krümmung. 1) Hinsichtlich der durch einen Flächenpunkt gehenden ebenen Schnitte, die von ihrem Krümmungskreis hyperoskuliert werden (Nr. 39, III D 1, 2, Nr. 38) — bei Ausschluss der Normalschnitte (Nr. 32) und des Tangentialschnitts — gab *A. Ribaucour* folgende Sätze[87]). Man bezeichne die geodätische Krümmung eines solchen Schnitts mit T. Die in dem Schnitt liegende Flächentangente ist zugleich Tangente einer Flächenkurve von konstanter Normalkrümmung. Die geodätische Krümmung dieser Kurve sei T_1. Dann ist $3T = 2T_1$. Die Mittelpunkte der geodätischen Krümmungen aller durch denselben Flächenpunkt (P) gehender hyperoskulierter Schnitte liegen in der Tangentialebene auf einer Kurve dritter Ordnung, welche in (P) die beiden Krümmungslinien berührt, und deren drei Inflexionspunkte auf der Geraden liegen, welche die geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien enthält.

2) In Betreff der oben erklärten Schraubungsachsen gilt der Satz, dass eine solche nur dann der Tangentialebene parallel ist, wenn sie zu der Tangente gehört, die zur Verbindungslinie der Mittelpunkte der geodätischen Krümmungen $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$ senkrecht ist. Ihre Projektion auf die Tangentialebene fällt dann zusammen mit der der fraglichen Tangente konjugierten Tangente.

85) *v. Lilienthal,* Jahresb. der deutschen Mathem.-Ver. 11 (1902), p. 41.

86) Par. C. R. 32 (1851), p. 533; J. éc. polyt. 19 (1848), p. 53; Par. C. R. 33 (1851), p. 91. Vgl. *Beltrami,* Giorn. di mat. 3 (1865), p. 238, 240.

87) Par. C. R. 80 (1875), p. 642. Vgl. ibid. *A. Mannheim,* p. 725; *E. Laguerre,* p. 822; *A. Mannheim,* ibid. 80 (1876), p. 554; *E. Cosserat,* Toulouse, Mém. (9) 7 (1895), p. 377.

3) Hinsichtlich einer einfach unendlichen Schar von Flächenkurven kann man nach dem Ort der Punkte fragen, in denen eine Einzelkurve der Schar von ihrer benachbarten die kürzeste oder grösste Entfernung hat. Man nennt den fraglichen Ort die „*Striktionslinie*“ der Schar. Nach *F. Brioschi*[88]) leitete zuerst *P. Maggi*, sodann *A. Bordoni*[89]) die Gleichung der Striktionslinie her. Nehmen wir die Kurvenschar als die Schar der Parameterlinien $v =$ const., so ist die Gleichung der Striktionslinie:

$$E^2 \frac{\partial G}{\partial u} + F^2 \frac{\partial E}{\partial u} - 2EF \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Hier gilt der *Beltrami*'sche Satz: Die Striktionslinie einer Kurvenschar ist der Ort der Punkte, in denen die geodätische Krümmung der Kurven der Orthogonalschar verschwindet[90]).

4) Besteht zwischen den geodätischen Krümmungen $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$ zweier Orthogonalscharen eine Gleichung, so sind die Verbindungslinien der Mittelpunkte jener Krümmungen die Normalen einer Fläche[91]).

5) Ein Satz über die geodätische Krümmung des sphärischen Bildes einer auf einer positiv gekrümmten Fläche gezogenen Kurve ist von *Bonnet* aufgestellt[92]). Mit ds sei das Bogenelement der Kurve, mit $\frac{1}{K}$ ihre geodätische Krümmung, mit $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$ seien die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien bezeichnet, während die Kurve die zu R_1 gehörende Krümmungslinie unter dem Winkel α schneiden möge. Das sphärische Bild der Kurve besitze das Bogenelement $d\sigma$, die geodätische Krümmung $\frac{1}{K'}$, und schneide das sphärische Bild der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie unter dem Winkel β. Die geodätischen Krümmungen der sphärischen Bilder der Krümmungslinien seien $\frac{1}{K_1'}$ und $\frac{1}{K_2'}$. Dann bestehen die Gleichungen:

$$\frac{ds \cdot \cos\alpha}{K_1} = \frac{d\sigma \cdot \cos\beta}{K_1'}, \qquad \frac{ds \cdot \sin\alpha}{K_1} = \frac{d\sigma \cdot \sin\beta}{K_1'}.$$

Mit Hülfe derselben zeigt *Bonnet*, dass das über eine geschlossene von Ecken freie Flächenkurve hinerstreckte Integral von $\frac{ds}{K}$ gleich ist dem über das sphärische Bild der Kurve erstreckten Integral von $\frac{d\sigma}{K'}$.

88) Mailand, Ist. Lombardo Giorn. 9 (1856), p. 400.

89) Mailand, Ist. Lombardo Mem. 5 (1856), p. 265.

90) *Beltrami*, Giorn. di mat. 3 (1865), p. 231.

91) *Th. Caronet*, Par. C. R. 115 (1892), p. 589.

92) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 127, 128.

Über das Verhalten der geodätischen Krümmung gegenüber Punkttransformationen einer Fläche siehe *R. Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), p. 186, über die Bestimmung von Flächenkurven mit vorgeschriebener geodätischer Krümmung siehe „*Darboux*" 3, p. 144, über die geodätische Krümmung der sphärischen Bilder der Flächenkurven siehe *v. Lilienthal*, Math. Ann. 42 (1893), p. 522.

IV. Geodätische Linien.

14. Geodätische und kürzeste Linien. Die Lehre von den geodätischen Linien entwickelte sich aus der 1687 von *Joh. I. Bernoulli*[93]) gestellten Aufgabe, zwischen zwei auf einer Fläche gegebenen Punkten die ganz in der Fläche liegende kürzeste Verbindung herzustellen, mit anderen Worten, die Gestalt eines zwischen den beiden Punkten auf der Fläche gespannten Fadens zu ermitteln. Schon *J. Bernoulli* fand die wesentlichste Eigenschaft der kürzesten Linien, dass nämlich in jedem ihrer Punkte ihre Schmiegungsebene zur Tangentialebene der Fläche senkrecht steht. Zieht man aber auf einer Fläche von einem Punkte (P) aus eine Linie mit der ebengenannten Eigenschaft, so zeigt schon das Beispiel der Kugel, dass auf der Linie ein Punkt (P_1) liegen kann von der Art, dass die Linie wohl die kürzeste Verbindung von (P) mit den auf ihr zwischen (P) und (P_1) liegenden Punkten, nicht aber mit den über (P_1) hinaus liegenden Punkten darstellt. Wir nennen daher *geodätische Linie* eine solche, deren Schmiegungsebene stets senkrecht zur Tangentialebene der Fläche ist, deren geodätische Krümmung also durchweg verschwindet. Hingegen werde eine von einem Flächenpunkt (P) ausgehende geodätische Linie nur insoweit *kürzeste Linie* genannt, als sie die kürzeste auf der Fläche mögliche Verbindung zwischen (P) und den von ihr durchzogenen Punkten darstellt, falls nur solche Verbindungen berücksichtigt werden, die der betrachteten geodätischen Linie hinreichend benachbart sind. Dass jede von einem Punkt ausgehende geodätische Linie innerhalb eines gewissen den Punkt umgebenden Bereichs zugleich kürzeste ist, zeigt *Darboux* (Leçons 2, p. 408). *C. Jacobi* sprach ohne Beweis den Satz aus, dass auf einer negativ gekrümmten Fläche eine geodätische Linie nie aufhöre, kürzeste zu sein. Beweise für diesen Satz gaben *Bonnet*[94]), *E. B. Christoffel*[95]), *H. v. Mangoldt*[96]). *Bonnet* zeigte[97]), dass

93) *P. Stäckel*, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipz. Ber. 1893, p. 444.

94) Par. C. R. 40 (1855), p. 1311 u. 41 (1855), p. 32.

95) Berlin, Abhandl. 1868, p. 151.

96) J. f. Math. 91 (1881), p. 25.

97) Par. C. R. 40 (1855), p. 1311; „*Darboux*" 3, p. 103.

wenn längs einer geodätischen Linie das Produkt der Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 positiv und kleiner wie a^2 ist, die Linie in einem die Grösse πa übersteigenden Intervall nicht mehr eine kürzeste Linie sein kann.

v. Mangoldt unterscheidet (a. a. O.) auf einer Fläche Punkte erster und zweiter Art, je nachdem die sämtlichen von dem Punkte ausgehenden geodätischen Linien beständig kürzeste Linien bleiben oder nicht. Die Einhüllenden derjenigen von einem Punkt zweiter Art ausgehenden geodätischen Linien, die mit der Zeit aufhören kürzeste zu sein, sind von *A. v. Braunmühl* namentlich auf dem Ellipsoid untersucht[98]).

Für eine durchweg positiv gekrümmte Fläche zeigte *H. v. Mangoldt* a. a. O., dass auf ihr Punkte erster Art nur vorkommen können, wenn ihre Gesamtkrümmung kleiner wie die halbe Einheitskugel ist; ferner, dass zutreffenden Falls diese Punkte entweder vereinzelt auftreten, wie auf dem elliptischen Paraboloid, oder einen endlichen Bereich auf der Fläche ausfüllen, während der übrige Teil der Fläche nur Punkte zweiter Art enthält, wie es beim zweischaligen Hyperboloid stattfindet.

Die Aufgabe, zwischen zwei gegebenen Flächenpunkten die kürzeste ganz in der Fläche liegende Verbindung aufzufinden[98a]), lässt unter Umständen unendlich viele Lösungen zu. Es kommt hier einmal auf den *Typus* der Verbindungslinie an, wobei diejenigen Verbindungslinien als demselben Typus angehörend betrachtet werden, die durch stetige Deformation in einander übergeführt werden können, und dann auf den Umstand, ob neben den kontinuierlichen auch diskontinuierliche Lösungen zugelassen werden[98b]). Die geodätischen Linien eines Cylinders, d. h. die isogonalen Trajektorien seiner Erzeugenden liefern hier das einfachste Beispiel. Dieselbe Eigenart wie die vorige hat die Aufgabe, die kürzeste ganz in der Fläche liegende Verbindung zwischen einem Punkt und einer geschlossenen Kurve aufzufinden[98c]), wo sich dann zeigt, dass diese Kurve von der fraglichen Verbindungslinie senkrecht getroffen wird.

15. Eigenschaften geodätischer Linien. Bewegt sich ein Punkt ohne Reibung auf einer Fläche, so beschreibt er eine geodätische Linie, wenn keine beschleunigende Kraft auf ihn wirkt, oder eine solche,

98) Inaug.-Diss. München 1878 und Math. Ann. 14 (1878), p. 557 u. 20 (1882), p. 557, auch Modellsammlung von *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 104—108. Vgl. *L. Krüger,* Inaug.-Dissert. Tübingen, Berlin 1883.

98a) „*Darboux*“ 3, p. 86, 106; *D. Hilbert,* Jahresber. Math.-Ver. 8 (1900), p. 186.

98b) *A. Kneser,* Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900, p. 174.

98c) *J. Hadamard,* J. de math. (5) 3 (1897), p. 348.

die eine von der Zeit freie Kräftefunktion U besitzt, für die $\Delta_1 U$ auf der Fläche eine Funktion von U allein ist (*A. Enneper,* Gött. Nachr. 1869, p. 62). Im letzteren Fall gehört die Bahnkurve des Punktes zu den orthogonalen Trajektorien der Kurven $U =$ const., welch' letztere von *A. de Saint-Germain Niveaulinien* genannt werden (J. de math. (3) 2 (1876), p. 325. Vgl. *P. Stäckel,* Über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. Inaug. Diss. Berlin 1885.) Es ordnen sich so die Untersuchungen über den Verlauf der geodätischen Linien den allgemeineren über den Verlauf der Bahn eines bewegten Punktes unter. Für eine Fläche von überall positivem Krümmungsmass zeigt *J. Hadamard* (J. de math. (5) 3 (1897), p. 331), dass auf ihr jede geschlossene geodätische Linie von jeder anderen geodätischen Linie unendlich oft geschnitten wird, falls man sich die letztere von einem Punkt durchlaufen denkt. Es können also geschlossene geodätische Linien, dei sich nicht schneiden, hier nicht auftreten. Für eine überall negativ gekrümmte Fläche zeigt *Hadamard* (J. de math. (5) 4 (1898), p. 27) unter weitgehenden Voraussetzungen über die Gestalt der Fläche dass jedem Typus einer Verbindung zweier Punkte eine und nur eine geodätische Verbindung dieser Punkte entspricht; ferner, dass auch jedem Typus einer geschlossenen Kurve eine geschlossene geodätische Linie entspricht, wobei nur die Umringe um die sich ins Unendliche erstreckenden, aber einer bestimmten Richtung sich asymptotisch nähernden (röhrenförmigen) Teile der Fläche eine Ausnahme machen. So ist auf einer Fläche von zweifachem Zusammenhang nur *eine* geschlossene geodätische Linie möglich. Ausser den geschlossenen und den ins Unendliche verlaufenden geodätischen Linien werden von *Hadamard* noch solche unterschieden, die sich einer geschlossenen geodätischen Linie asymptotisch nähern oder die nach Annäherung an eine erste geschlossene geodätische Linie sich von ihr entfernen, um sich einer zweiten zu nähern u. s. f. Eine eingehende Untersuchung des Verlaufs der geodätischen Linien auf den geradlinigen Flächen zweiter Ordnung gab *J. Hadamard* (Par. soc. math. Bull. 26 (1898), p. 165).

Aus dem Umstand, dass die Binormale einer geodätischen Linie senkrecht zur Flächentangente ist, ergibt sich die Differentialgleichung der geodätischen Linien in der Form:

$$X(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + Y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + Z(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0.$$

Sieht man hier x, y, z als Funktionen von u und v an und zudem längs einer geodätischen Linie v als eine Funktion von u, so folgt für v eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$v'' = a_0 + a_1 v' + a_2 v'^2 + a_3 v'^3,$$ [99])

d. h. v ist eine Funktion von u mit zwei Parametern. Es gibt daher auf einer Fläche doppelt unendlich viele geodätische Linien. Eine einzelne ist durch die Forderung bestimmt, dass sie einen gegebenen Punkt in gegebener Richtung durchziehen soll. Die geodätischen Linien, welche von ein und demselben Punkte (P) ausgehen oder ein und dieselbe Flächenkurve (L) senkrecht schneiden, bilden somit eine einfach unendliche Schar. In betreff solcher Scharen zeigte *Gauss*[99a]), dass, wenn man von (P) oder von (L) aus auf den fraglichen geodätischen Linien sich gleiche Bogenlängen abgesteckt denkt, die Endpunkte dieser Bögen eine Kurve bilden, welche die Kurven der betrachteten Schar senkrecht schneidet. Durch diesen Satz wurde *Gauss* zur Einführung der sogenannten geodätischen Polarkoordinaten geführt, die sich folgendermassen festlegen lassen. Man nehme zu Parameterlinien die von einem beliebig gewählten Punkte (P) ausgehenden geodätischen Linien (*Polarradien*) und ihre senkrechten Durchdringungskurven (*Polarkreise*). Die von (P) aus gerechnete Bogenlänge der geodätischen Linien nenne man p, den Winkel, den im Punkte (P) eine der geodätischen Linien mit einer bestimmten durch (P) gezogenen Flächentangente bildet, nenne man q. Für diese Parameter nimmt das Quadrat des Linienelements der Fläche die Form an:

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2,$$

wo für $p = 0$ auch $m = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial p} = 1$ wird. Das Krümmungsmass wird durch den Ausdruck $-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}$ geliefert, und die Gleichung der geodätischen Linien erhält die Gestalt:

$$d\vartheta = -\frac{\partial m}{\partial p} dq,$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, unter dem die geodätische Linie die Parameterlinien $q = \text{const.}$ schneidet[100]). Mit Hülfe der obigen Gleichungsform der geodätischen Linien bewies *Gauss* für ein auf einer Fläche gelegenes aus geodätischen Linien gebildetes Dreieck (*geodätisches Dreieck*) den Satz: Auf einer positiv gekrümmten Fläche ist der Überschuss der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks über 180°, auf einer negativ gekrümmten Flüche der Fehlbetrag der

99) Über die Bedingung, unter der eine allgemeine Gleichung von dieser Form die Gleichung geodätischer Linien ist, siehe *R. Liouville,* Par. C. R. 108 (1889), p. 495.

99a) Disquisit. Nr. 15, 16.

100) Disquisit. Nr. 19.

Winkelsumme eines solchen Dreiecks an 180° gleich dem in Graden ausgedrückten Flächeninhalt des sphärischen Bildes des Dreiecks[100a]). *Bonnet* verallgemeinerte den *Gauss*'schen Satz dahin, dass auf einer positiv gekrümmten Fläche die Gesamtkrümmung eines krummlinigen Dreiecks gleich ist dem Überschuss seiner Winkelsumme über zwei Rechte vermindert um das über die Begrenzung hinerstreckte Integral der geodätischen Krümmung der Begrenzungslinie[101]). Für den Umfang (U) und den Inhalt (J) eines Polarkreises gelten bei hinreichend kleinem Polarradius r die *Bertrand*'schen Gleichungen[102]):

$$U = 2\pi r - \frac{\pi r^3}{3\varrho_1\varrho_2}\cdots, \quad J = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12\varrho_1\varrho_2}\cdots$$

Neben dem System der geodätischen Polarkoordinaten betrachtet *Gauss* noch ein zweites System von Parameterlinien[103]). Man ziehe nach Belieben die Kurve (L) auf der Fläche, rechne ihre Bogenlänge von einem willkürlich auf ihr festgelegten Punkte aus und bezeichne mit q eine irgendwie gewählte Funktion dieser Bogenlänge, mit p die von (L) aus gerechnete Bogenlänge der zu (L) senkrechten geodätischen Linien. Man kann beide Systeme von Parameterlinien durch die Aussage kennzeichnen, dass die Kurven $q =$ const. geodätische Linien mit der Bogenlänge p sind und von den Kurven $p =$ const. senkrecht geschnitten werden. Den Zusammenhang dieser Parameter p, q mit den allgemeinen u und v stellen nach *Gauss* die Gleichungen dar:

$$E\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + G\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2,$$

$$\left(E\frac{\partial p}{\partial v} - F\frac{\partial p}{\partial u}\right)\frac{\partial q}{\partial v} = \left(F\frac{\partial p}{\partial v} - G\frac{\partial p}{\partial u}\right)\frac{\partial q}{\partial u}.$$

Gauss benutzt dieselben zur Berechnung der Hypotenuse und der Winkel eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks mittelst Reihenentwicklung. Die hierbei im *Gauss*'schen Text überlieferten Unrichtigkeiten sind in der deutschen Ausgabe der Disquisitiones von *A. Wangerin*[104]) aufgedeckt und beseitigt.

Wenn die Kurven $q =$ const. eine Einhüllende besitzen, werden

---

100a) Disquisit. Nr. 20. Vgl. die Bemerkung bei „*Darboux*" 3, p. 138 über nichtgeodätische Linien, für die derselbe Satz gilt.

101) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 131; 24 (1865), p. 214; vgl. „*Darboux*" 3, p. 126. *G. Darboux*, Ann. éc. norm. (1) 7 (1870), p. 175; *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 361 = Opere Mat. 1, Mailand (1902), p. 349. Vgl. III D 6 a, Nr. **11**, Fussn. 110.

102) J. de math. (1) 13 (1848), p. 82; *Diguet* ib. p. 86; vgl. *G. Ossian Bonnet*, Par. C. R. 97 (1883), p. 1360.

103) Disquisit. Nr. 22.

104) *Ostwald*'s Klassiker Nr. 5, 1889. Vgl. „*Darboux*" 3, p. 157.

die Kurven $p = \text{const.}$ auch die *geodätischen Evolventen* der Einhüllenden genannt.

Eine fernere Eigenschaft der geodätischen Linien ist die folgende[105]): Die Tangenten einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Linien bilden das Normalensystem einer Schar von Parallelflächen. Die Erzeugung der letzteren hat *J. Weingarten* in dem Satz veranschaulicht[106]): Spannt man über eine gegebene Fläche senkrecht gegen eine willkürlich auf derselben gezeichnete Kurve eine Schar biegsamer Fäden, denen man sämtlich von den Punkten dieser Kurve an gleiche Länge gibt, so erzeugen die Endpunkte dieser Fäden bei ihrer Abwicklung die allgemeinste Fläche, für welche die gegebene mit einer Schale der Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte zusammenfällt. Bei dieser Abwicklung beschreibt jeder Endpunkt eines Fadens eine Krümmungslinie der erzeugten Fläche. — Einen allgemeineren Satz gab *Beltrami*[107]): Wenn ein Normalensystem unter konstantem Winkel eine Fläche schneidet, so sind die Flächenkurven, welche die Strahlen senkrecht durchdringen, die orthogonalen Trajektorien einer Schar geodätischer Linien. — Wir können auch die Bogenlängen von zwei einfach unendlichen Scharen geodätischer Linien als Parameter u, v einführen, wo man nach Belieben jede der beiden Scharen als von einem festen Punkte ausgehend oder eine feste Kurve senkrecht schneidend betrachten kann. Die Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind dann die orthogonalen Trajektorien der beiden Scharen und werden „geodätische Parallelen“ genannt. *J. Weingarten*[108]) zeigte, dass das Quadrat des Linienelements hier die Form hat:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\cos\omega\, du\, dv}{\sin^2\omega},$$

sodass, wenn:

$$p = \frac{u+v}{2}, \quad q = \frac{u-v}{2}$$

auch:

$$ds^2 = \frac{dp^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dq^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Man nennt die Kurven $u + v = \text{const.}$ und $u - v = \text{const.}$ *geodätische Ellipsen* und *Hyperbeln*. Sie bilden den Ort der Punkte, für welche die Summe oder die Differenz der geodätischen Entfernungen von

---

105) *Bertrand*, Traité § 661, 662.

106) J. f. Math. 62 (1863), p. 61.

107) Giorn. di mat. 2 (1864), p. 298. Vgl. *E. Laguerre*, Nouv. Ann. (2) 17 (1878), p. 184.

108) J. f. Math. 62 (1863), p. 166; vgl. *Bonnet*, J. éc. polyt. 25 (1867), p. 96.

zwei festen Punkten oder zwei festen Kurven auf der Fläche konstant ist. Auf diese Kurvenscharen, welche mit den konfokalen Kegelschnitten der Ebene eine Reihe von Eigenschaften gemein haben, machte wohl zuerst *O. Böklen*[109]) aufmerksam und zwar in rein geometrischer Weise, später *E. Betti*[110]), dessen analytisches Verfahren nicht einwandsfrei ist. In der erstgenannten Arbeit findet sich bereits der Satz, dass die Krümmungslinien des Ellipsoids aus geodätischen Ellipsen und Hyperbeln bestehen, deren Brennpunkte Kreispunkte des Ellipsoids sind. Später dehnte *O. Böklen*[111]) seine Betrachtungen auf weitere Flächenkurven aus, die durch einfache Beziehungen zwischen u und v erhalten werden, wie z. B. die geodätischen Lemniskaten.

Liouville zeigte[112]), dass sich nur auf den abwickelbaren Flächen zwei Scharen geodätischer Linien unter konstantem Winkel schneiden können (III D 5, Nr. 3).

Beltrami[113]) führte den Begriff der geodätischen Krümmung in folgender Weise auf den der geodätischen Linien zurück. Man betrachte eine Flächenkurve (L) und denke sich die zu ihr senkrechten geodätischen Linien. Durch den Punkt (P) von (L) lege man eine Kurve (C), welche die fraglichen geodätischen Linien so schneidet, dass ihre Tangenten denen der geodätischen Linien in den Schnittpunkten konjugiert sind. Der dem Punkte (P) auf (L) unendlich benachbarte Punkt werde mit (P') bezeichnet. Die Kurve (C) schneide die durch (P') gehende geodätische Linie (G) im Punkte (P''). Alsdann schneidet die zu (P'') gehörende Tangente von (G) die durch (P) gehende und zu (L) senkrechte Flächentangente im Mittelpunkte der zu (P) gehörenden geodätischen Krümmung der Kurve (L).

U. Dini[114]) beantwortete die Frage, unter welchen Umständen es möglich ist, auf einer Fläche eine solche Linie (L) zu ziehen, dass, wenn man die geodätischen Linien betrachtet, die sie unter einem konstanten, aber von einem Rechten verschiedenen Winkel schneiden, und auf diesen Linien von (L) aus gleiche Bogenlängen abträgt, sich eine isogonale Trajektorie der geodätischen Linien ergibt. Derartige Linien (L) finden sich nur auf Rotationsflächen (III D 5, Nr. 4) und den auf solche abwickelbaren Flächen (III D 6 a, Nr. **23**, **31**). Längs einer

109) Zeitschr. Math. Phys. 3 (1858), p. 257; Analytische Geometrie des Raumes, Stuttgart 1861, 2. Aufl. 1884, p. 74.

110) Ann. di mat. (1) 3 (1860), p. 336.

111) Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 264.

112) „*Darboux*" 2, p. 422.

113) Giorn. di mat. 2 (1864), p. 17.

114) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 65.

Linie (L) ändert sich das Krümmungsmass der Fläche nicht. Ist letzteres überhaupt konstant, so tritt eine besondere Bedingung hinzu.

16. Reduzierte Länge eines geodätischen Kurvenbogens. Der oben erwähnte Ausdruck $-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}$ für das Krümmungsmass $\varkappa$ bei Anwendung geodätischer Polarkoordinaten hat *E. B. Christoffel* (Berlin Abh. 1868, p. 131) zur Einführung des Begriffs *reduzierte Länge* eines geodätischen Kurvenbogens veranlasst. Nehmen wir an, dass auf einer Fläche eine einzelne von einem gewöhnlichen Punkt A ausgehende geodätische Linie gegeben sei. Dann kann man das Krümmungsmass $\varkappa$ der Fläche längs der Linie als eine Funktion einer einzigen Veränderlichen, nämlich der von A aus gerechneten Bogenlänge v der Linie ansehen. Man betrachte nun die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\mu}{dv^2} + \varkappa\mu = 0.$$

Diejenige Lösung $\mu_0(v)$ unserer Gleichung, für die $\mu_0(o) = 0$ und $\left(\frac{d\mu_0(v)}{dv}\right)_{v=o} = 1$ wird, nennt *Christoffel* die reduzierte Länge des Kurvenbogens von der Länge v. Für ein System geodätischer Polarkoordinaten fällt somit die reduzierte Länge jedes vom Punkte $p = 0$ ausgehenden geodätischen Bogens mit dem zugehörigen Wert von m zusammen.

Wie *Christoffel* bewiesen hat, bleibt die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens ungeändert, wenn man Anfangs- und Endpunkt desselben vertauscht (a. a. O. p. 139; *A. Brill*, Münch. Abh. (II Kl.) 14 (1883), p. 117).

Zählt man auf einer geodätischen Linie von einem festen Anfangspunkte Abscissen und sind r_1, r_2 die Abscissen der Endpunkte eines Stückes dieser Linie, so genügt die reduzierte Länge m dieses Stückes der Differentialgleichung:

$$m\frac{\partial^2 m}{\partial r_1 \partial r_2} - \frac{\partial m}{\partial r_1}\frac{\partial m}{\partial r_2} = 1.$$

(*Christoffel* a. a. O. p. 149 u. 166; *Brill* a. a. O. p. 118).

Hat man auf einer Fläche ein System geodätischer Polarkoordinaten angenommen, so besteht für die reduzierte Länge m eines geodätischen Bogens, welcher den Anfangspunkt des Systems mit einem beliebigen, durch seine Koordinaten p, q bestimmten Punkt verbindet, unter der Voraussetzung, dass p eine gewisse Grenze nicht überschreitet, eine nach Potenzen von p fortschreitende konvergente Reihenentwicklung von der Form:

$$m = p - \frac{\varkappa_0}{6} p^3 + Qp^4 + Rp^5 + Sp^6 + \cdots,$$

in welcher $\varkappa_0$ das Krümmungsmass der Fläche im Anfangspunkt der geodätischen Polarkoordinaten bedeutet, und für $n > 3$ der Koeffizient von p^n jedesmal eine homogene ganze rationale Funktion $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades von $\sin q$ und $\cos q$ ist („*Darboux*" 3, p. 162).

Christoffel hat die Frage erörtert (Berlin. Abh. 1868, p. 157 ff.), wie man nach Annahme eines beliebigen Systems krummliniger Koordinaten auf einer Fläche die reduzierte Länge eines auf dieser Fläche verlaufenden geodätischen Bogens als Funktion der Koordinaten seiner beiden Endpunkte bestimmen könne. Ferner hat er gezeigt (a. a. O. p. 144), wie man, wenn die reduzierte Länge einer durch die Koordinaten ihrer Endpunkte bestimmten geodätischen Linie als Funktion dieser Koordinaten bekannt ist, die Winkel finden kann, welche die betrachtete geodätische Linie in ihren Endpunkten mit den Koordinatenlinien bildet. Für Rotationsflächen zeigte *Brill* (Münch. Abh. 2. Kl. 14 (1883), p. 132; vgl. *M. Lévy*, Paris C. R. 86 (1878), p. 949) wie man die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens finden kann, falls derselbe durch die Koordinaten seiner Endpunkte in einem aus den Meridianen und Parallelkreisen gebildeten krummlinigen Koordinatensystem bestimmt ist.

17. Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke. Es sei $\mathfrak{S}$ ein einfach zusammenhängendes, von singulären Punkten freies Flächenstück von solcher Beschaffenheit, dass je zwei Punkte von $\mathfrak{S}$ höchstens durch *eine* ganz in $\mathfrak{S}$ verlaufende geodätische Linie verbunden werden können. Dann sind die Seiten und Winkel eines auf $\mathfrak{S}$ liegenden geodätischen Dreiecks durch dessen Eckpunkte eindeutig bestimmt. Formeln für die Änderungen, welche die Elemente eines solchen Dreiecks bei gegebenen unendlich kleinen Verschiebungen der drei Ecken erleiden, haben *Christoffel* (a. a. O. p. 133) und *Brill* (a. a. O. p. 118) aufgestellt. Wenn $\mathfrak{S}$ nicht auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, so ist es im allgemeinen unmöglich, die Ecken eines auf $\mathfrak{S}$ liegenden geodätischen Dreiecks stetig so zu verschieben, dass die Seitenlängen und die Winkel des Dreiecks keine Änderung erleiden. Für einzelne spezielle Dreiecke erscheint die Möglichkeit einer solchen Verschiebung nicht gerade ausgeschlossen, doch ist ein Beispiel eines solchen Falles bis jetzt nicht bekannt.

Ist $\mathfrak{S}$ auf eine Rotationsfläche abwickelbar, deren Krümmungsmass nicht konstant ist, so kann jedes im Innern von $\mathfrak{S}$ liegende geodätische Dreieck ohne Änderung seiner Seitenlängen und Winkel stetig verschoben werden, aber im allgemeinen nur auf eine einzige

Weise, nämlich so, dass sich die drei Eckpunkte auf den bei der Abwickelung in die Parallelkreise der Rotationsfläche übergehenden Linien bewegen.

Hat endlich 𝔖 konstantes Krümmungsmass, so ist jedes im Innern von 𝔖 liegende geodätische Dreieck ohne Änderung seiner sechs Elemente ebenso wie ein ebenes Dreieck in seiner Ebene in jeder beliebigen Weise beweglich.

Bei einem geodätischen Dreieck, dessen Seitenlängen und Winkel unverändert bleiben sollen, erscheinen zunächst vier Fälle denkbar; nämlich, dass das Dreieck auf der dasselbe tragenden Fläche entweder unbeweglich oder mit einem, zwei oder drei Freiheitsgraden beweglich ist. Dementsprechend hatte *Christoffel* (a. a. O. p. 172) eine Einteilung aller Flächen in vier Gattungen vorgeschlagen, je nachdem für ein auf der Fläche willkürlich angenommenes geodätisches Dreieck im allgemeinen der erste, zweite, dritte oder vierte der erwähnten Fälle eintritt. Zugleich hatte er gezeigt, dass diese vier Gattungen sich analytisch durch die Beschaffenheit einer gewissen, von sechs Veränderlichen abhängenden Determinante dritten Grades von einander unterscheiden würden, indem für die Flächen erster Gattung die Determinante im allgemeinen von Null verschieden, für die Flächen zweiter Gattung dagegen die Determinante, aber nicht jede ihrer Unterdeterminanten zweiten Grades, für die Flächen dritter Gattung jede Unterdeterminante zweiten Grades, aber nicht jedes Element, und für die Flächen vierter Gattung auch jedes Element identisch gleich Null sein müsste. Die Flächen vierter Gattung fallen, wie bereits von *Christoffel* (a. a. O. p. 174) gezeigt wurde, mit den Flächen konstanten Krümmungsmasses (III D 5, Nr. 32) zusammen. Dasselbe gilt aber, wie *v. Mangoldt* (Freiburg i/B. naturf. Ges. 8 (1882) u. J. f. Math. 94 (1883), p. 21) und *J. Weingarten* (Berl. Ber. 1882, p. 453) nachgewiesen haben, auch von den Flächen dritter Gattung, sodass diese besondere Gattung ausscheidet. Zugleich reichen die von *Weingarten* a. a. O. erhaltenen Ergebnisse hin, um darzuthun, dass die Linien konstanten Krümmungsmasses auf den Flächen zweiter Gattung geodätisch äquidistant (parallel) sein müssen. Den Beweis dafür, dass diese Linien auch isotherm (Nr. **19**) und daher die Flächen zweiter Gattung auf Rotationsflächen abwickelbar sind, hat *v. Mangoldt* (J. f. Math. 94 (1883), p. 36) erbracht. Dieser Beweis kann dadurch vereinfacht werden, dass man, nachdem durch synthetische Betrachtungen im Anschluss an die erwähnte Arbeit von *Weingarten* festgestellt ist, dass die Linien konstanten Krümmungsmasses geodätisch äquidistant (parallel) sein müssen, bei der weiter durchzuführenden Rechnung das Quadrat des Linienelements

der betrachteten Fläche nicht in der Form: $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$, sondern in derjenigen Form annimmt, die den Flächen mit geodätisch äquidistanten Linien konstanten Krümmungsmasses eigentümlich ist, nämlich:

$$ds^2 = du^2 + \frac{(f(u) - \varphi(v))^2}{f'(u)} dv^2,$$

wo $\varphi(v)$ eine beliebige Funktion von v und $f(u)$ eine nur der Bedingung $f'(u) > 0$ unterworfene, sonst ebenfalls beliebige Funktion von u bedeutet[114a]).

18. Integration der Gleichung der geodätischen Linien. Hinsichtlich der Integration der Gleichung der geodätischen Linien erwähnen wir zuerst die Arbeiten von *C. G. Jacobi.* In einem Briefe an *D. F. J. Arago* teilte er mit, dass er die Differentialgleichung der geodätischen Linien des Ellipsoids mittels Quadraturen integriert habe, die die Auswertung hyperelliptischer Integrale erfordern[115]). Die von *Jacobi* im Wintersemester 1842—43 gehaltenen, 1866 von *A. Clebsch* herausgegebenen Vorlesungen über Dynamik enthalten p. 212 die nähere Ausführung dieser Integration[116]) und geben p. 176 den allgemeinen Satz, dass man von der Differentialgleichung der geodätischen Linien nur ein erstes Integral:

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v, a)$$

mit der wesentlichen willkürlichen Konstanten a zu kennen braucht, um die Integration mittels Quadraturen ausführen zu können[117]).

Liouville zeigte in der Note III zu seiner Ausgabe von *Monge*'s Application, auch J. de math. (1) 11 (1846), p. 345; ibid. (1) 12 (1847), p. 410, dass man die geodätischen Linien derjenigen Flächen, deren Linienelement sich durch eine Gleichung von der Form:

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2)$$

darstellen lässt, durch Quadraturen integrieren kann. Solche Flächen hat man später *Liouville*'sche Flächen genannt. Zu ihnen gehören die abwickelbaren Flächen, die Rotationsflächen und die Flächen zweiten Grades. Eine geometrische Eigenschaft der geodätischen

114a) „*Darboux*" 3, p. 191.

115) Par. C. R. 8 (1839), p. 284; J. f. Math. 19 (1837), p. 309.

116) Vgl. *A. Minding,* J. f. Math. 20 (1840), p. 323; *M. Chasles,* J. de math. (1) 11 (1846), p. 5, 105; *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geom. 1 (1893), p. 50. *C. Weierstrass,* Berl. Ber. 1861, p. 988 = Math. Werke 1, Berlin 1894, p. 257. Über die geodätischen Linien auf den Rotationsflächen zweiten Grades siehe *G. H. Halphen,* Traité des fonctions elliptiques 2, Paris 1888, chap. VI.

117) Vgl. *Bonnet,* Paris, C. R. 42 (1856), p. 1137. *E. Beltrami,* Mailand Ist. Lomb. Rend. (2) 1 (1868), p. 708 = Opere mat. Mailand (1902), p. 366.

Linien auf den Rotationsflächen hatte bereits *A. C. Clairaut*[118]) veröffentlicht. In jedem Punkt einer solchen schneiden sich ein Parallelkreis und ein Meridian. Das Produkt aus dem Halbmesser des Parallelkreises und dem Sinus des Winkels, den die geodätische Linie mit dem Meridian bildet, bleibt längs einer solchen Linie ungeändert. *F. Joachimsthal* zeigte[118a]), dass für jeden Punkt einer geodätischen Linie des Ellipsoids das Produkt, dessen einer Faktor der Abstand des Mittelpunkts des Ellipsoids von der dem Punkt zugehörenden Tangentialebene, dessen anderer Faktor der der Tangente der geodätischen Linie parallele Halbmesser des Ellipsoids ist, einen konstanten Wert besitzt, ein Satz, der ebenfalls für die Punkte einer Krümmungslinie des Ellipsoids gilt. Die von einem Kreispunkt des Ellipsoids (III C 4) ausgehenden geodätischen Linien treffen sich im diametral gegenüberliegenden Kreispunkt, besitzen gleiche Länge und sind durch elliptische Funktionen darstellbar[119]). Die Gleichung der geodätischen Linien auf den *Liouville*'schen Flächen ist[119a]):

$$\int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u) - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\psi(v) + a}} = b,$$

wo a und b willkürliche Konstanten bezeichnen. Bedeutet ω den Winkel der von dem Punkt (u, v) ausgehenden geodätischen Linien mit der diesen Punkt durchziehenden Parameterlinie $v = \text{const.}$, so hat man:

$$a = \varphi(u) \sin^2 \omega - \psi(v) \cos^2 \omega.$$

Es gehören also zu einem Werth von a zwei von dem fraglichen Punkt ausgehende geodätische Linien, deren Tangenten symmetrisch zur Tangente der Kurve $v = \text{const.}$ liegen. Wir greifen durch Festsetzung der Vorzeichen der in der Integralgleichung auftretenden Wurzeln eine dieser Tangenten heraus und fassen auf ihr den Punkt (A) ins Auge, in dem die Tangente diejenige Fläche berührt, die mit der gegebenen zusammen die Krümmungsmittelpunktsfläche der das Tangentensystem der Kurven $a = \text{const.}$ rechtwinklig schneidenden Flächen bildet. Lässt man a sich stetig ändern, so beschreibt der Punkt (A) eine allgemeine Strophoide, und umgekehrt hat man es,

118) Par. Hist. 1733 (Par. 1735), p. 409. Vgl. *H. Resal,* Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 57.

118a) J. f. Math. 26 (1843), p. 158. Vgl. *J. Liouville*, J. de math. (1) 9 (1844), p. 401; (1) 11 (1846), p. 21.

119) „*Darboux*" 3, p. 15; *C. Jordan,* Cours d'anal. 3, Paris 1887, p. 497; Modelle von *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 103. *M. Roberts,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 275; *R. Langenbeck,* Inaug.-Diss. Göttingen 1877.

119a) „*Darboux*" 3, p. 9. Vgl. *P. Stäckel,* Math. Ann. 35 (1889), p. 91.

wenn letzteres der Fall ist, mit einer *Liouville*'schen Fläche zu tun[119b]). *P. Stäckel* zeigte, dass bei gewissen, sehr allgemeinen Bedingungen für die Funktionen φ und ψ eine geodätische Linie auf einer *Liouville*'schen Fläche entweder geschlossen ist oder einen gewissen Bereich auf der Fläche überall dicht (I A 5, Nr. **11**) bedeckt[119c]). So verläuft z. B. eine geodätische Linie auf einer Rotationsfläche im allgemeinen innerhalb eines von zwei Parallelkreisen mit demselben Halbmesser begrenzten Flächenteils; auf dem Ellipsoid verläuft eine nicht durch einen Kreispunkt gehende Geodätische in einem von zwei symmetrischen Krümmungslinien begrenzten Flächenteil.

Beltrami[120]) folgerte aus der ersten der beiden oben verzeichneten *Gauss*'schen Gleichungen einen Satz über den ersten Differentialparameter einer Funktion $\varphi(u, v)$. Eliminiert man nämlich mit Hülfe der Gleichung $\varphi(u, v) = t$ eine der Veränderlichen u und v aus dem Ausdruck $\Delta_1 \varphi$ und fällt dabei auch die andere fort, ist also $\Delta_1 \varphi$ eine Funktion von t allein, so sind die Kurven $\varphi =$ const. auf der Fläche die orthogonalen Trajektorien einer Schar geodätischer Linien. Im besonderen hat, wenn $\Delta_1 \varphi = 1$, die Grösse t die Bedeutung der Bogenlänge dieser geodätischen Linien.

Die Lösung der Gleichung $\Delta_1 \vartheta = 1$ reicht völlig hin, um die endliche Gleichung der geodätischen Linien ohne weitere Integration aufzustellen[121]). Kennt man ein Integral $\vartheta = f(u, v, a)$ mit der wesentlichen, also nicht blos additiven Konstanten a, so ist die endliche Gleichung der geodätischen Linien durch die Beziehung: $\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = b$, wo b eine neue willkürliche Konstante bedeutet, gegeben[122]). Ein derartiges Integral $f(u, v, a)$ ist mit Hülfe einer Quadratur bestimmbar[123]), wenn man eine weitere Funktion φ der vier Veränderlichen $u, v, p = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}$, $q = \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ kennt von der Art, dass aus den Gleichungen $\varphi = a$ und $\Delta_1 \vartheta = 1$ sich Ausdrücke von p und q ergeben, welche die Differentialform $p\,du + q\,dv$ als exaktes Differential hervorgehen lassen. Man erhält dann durch Quadratur dieses Differentials ϑ als Funktion von u, v, a und damit nach dem vorigen Satz die Gleichung der geodätischen Linien. Die Bedingung, der die Funktion φ unterliegt, lässt sich dahin aussprechen, dass die Gleichung:

119b) *E. Wälsch*, Par. C. R. 116 (1893), p. 1435; Wien. Ber. 106 (1897), p. 323. Vgl. die allgemeinere Untersuchung von *E. Wälsch*, Par. C. R. 125 (1897), p. 521.

119c) Jahresber. der d. Math.-Ver. 9 (1901), p. 121.

120) Giorn. di mat. 2 (1864), p. 277; Math. Ann. 1 (1869), p. 577.

121) „*Knoblauch*" p. 157.

122) „*Darboux*" 2, p. 428; „*Bianchi*" p. 170.

123) „*Darboux*" 3, p. 23.

$$\frac{\partial \Delta_1 \vartheta}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \Delta_1 \vartheta}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Delta_1 \vartheta}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial \Delta_1 \vartheta}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$$

für jedes Wertsystem u, v, p, q, das der Gleichung $\Delta_1 \vartheta = 1$ genügt, bestehen muss. Da die allgemeine Bestimmung der Funktion φ bisher nicht gelungen ist, hat man umgekehrt gefragt, wie die Funktionen E, F, G beschaffen sein müssen, damit eine Funktion φ von vorgeschriebener Form der Aufgabe genüge. Wir erwähnen die Sätze: 1) Hat φ die Form $f_1(u,v)p + f_2(u,v)q$, so ist die entsprechende Fläche auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar. 2) Hat φ die Form $f_1(u,v)p^2 + f_2(u,v)pq + f_3(u,v)q^2$, so gehört die Fläche zu den *Liouville*'schen, falls man nur reelle Flächen berücksichtigt[124]). Diese quadratischen Integrale sind genauer von *G. Königs, G. Ricci* und *L. Raffy* untersucht[125]). Wendet man symmetrische Parameter α, β an und setzt: $ds^2 = \lambda d\alpha d\beta$ (Nr. 19), so kommt die Frage, ob sich ds^2 auf die *Liouville*'sche Form bringen lässt, heraus auf das Vorhandensein einer Funktion A von α und einer Funktion B von β, die der Gleichung genügen:

$$2A\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha^2} + 3\frac{dA}{d\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} + \frac{d^2A}{d\alpha^2}\lambda = 2B\frac{\partial^2\lambda}{\partial\beta^2} + 3\frac{dB}{d\beta}\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \frac{d^2B}{d\beta^2}\lambda.$$

Sind A_1 und B_1, sowie A_2 und B_2 zwei Lösungspaare dieser Gleichung, so bilden auch die mit den willkürlichen Konstanten a und b gebildeten Funktionen $aA_1 + bA_2$, $aB_1 + bB_2$ ein Lösungspaar („*Darboux*" 2, p. 209). Letzteres wird als von den ersten Paaren abhängig betrachtet. Es handelt sich nun um die Anzahl der voneinander unabhängigen Lösungspaare. Giebt es mehr wie drei quadratische Integrale, so sind genau fünf solche vorhanden. Die Fläche besitzt dann konstantes Krümmungsmass und die allgemeinste Form des Quadrats ihres Linienelements ist: $(\wp(\alpha + \beta) - \wp(\alpha - \beta))\, d\alpha\, d\beta$, wo $\wp$ die *Weierstrass*'sche elliptische Funktion bedeutet. Sind drei unabhängige Integrale vorhanden, so hat man es mit einer auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Fläche zu thun. Die *Königs*'sche Arbeit

---

124) *F. Massieu*, Sur les intégrales algébriques des problèmes de mécanique, Par. Thèse 1861; *E. Bour*, J. éc. polyt. 22 (1862), p. 176, wo auch homogene Integrale dritten und vierten Grades betrachtet sind; vgl. *M. Lévy*, Par. C. R. 85 (1877), p. 904, 938, 1009.

125) *G. Königs*, Par. sav. étr. 31 (1894), Nr. 6; vgl. die Note von *G. Königs* in „*Darboux*" 4, p. 368; *G. Ricci*, Rom, Linc. Atti (5) 2^1 (1893), p. 73; vgl. *G. Ricci*, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova 1898, p. 253; *L. Raffy*, Par. C. R. 108 (1889), p. 493; J. de math. (4) 10 (1894); p. 331; Par. soc. math. Bull. 22 (1894), p. 63, 84; „*Darboux*" 3, p. 23. Hinsichtlich der allgemeinen rationalen Integrale vgl. *M. Lévy*, Par. C. R. 85 (1877), p. 1065, 1150 u. „*Darboux*" 3, p. 66; *W. Anissimoff*, Ann. éc. norm. (3) 18 (1901), p. 371.

behandelt auch die Beziehung des Gegenstandes zu der *S. Lie*'schen Untersuchung (Math. Ann. 20 (1882), p. 357) über die Flächen, auf denen die geodätischen Linien eine infinitesimale Transformation gestatten.

Die geodätischen Linien auf den pseudosphärischen Flächen werden in III D 5, Nr. **34** besprochen.

V. Isotherme Linien.

19. Geometrische und physikalische Entstehungsart. Zu diesen Scharen gelangt man durch die Lösung einer geometrischen und einer physikalischen Aufgabe. Die erstere lässt sich folgendermassen aussprechen: Die gegebene Fläche soll *winkeltreu*, d. h. so auf eine Ebene abgebildet werden, dass irgend zwei Kurven auf der Fläche sich unter demselben Winkel schneiden, wie ihre Bilder in der Ebene. Man drückt dies auch in der Weise aus, dass man sagt, das Bild soll der Fläche *in den kleinsten Teilen ähnlich* sein oder die Abbildung soll eine *konforme* sein (III D 1, 2, Nr. **24**; III D 6 a, Nr. **3** ff.). Nennen wir die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte der Bildebene p und q und betrachten x, y, z als Funktionen von p und q, so erfordert die fragliche Abbildungsart, wenn:

$$E' = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2, \quad F' = \sum \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}, \quad G' = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2$$

genommen wird, dass:

$$E' = G', \quad F' = 0$$

sei. Die Parameterlinien $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ schneiden sich also senkrecht, und die unendlich kleinen Rechtecke, in die sie die Fläche zerlegen, sind, wenn man die Differentiale dp und dq jedesmal als gleich betrachtet, Quadrate. *Bonnet* hat die fraglichen Linien „*isometrische Linien*" genannt. Sind die Koordinaten einer Fläche als Funktionen zweier Veränderlicher u und v gegeben, so hängt die Bestimmung der isothermen Linien von der Lösung der Aufgabe ab, die Veränderlichen u und v so durch zwei neue Veränderliche p und q darzustellen, dass:

$$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 = \lambda (dp^2 + dq^2).$$

Die Grössen $\alpha = p + qi$, $\beta = p - qi$ heissen die symmetrischen Parameter der Fläche[126]). Bei Anwendung derselben erhält das Quadrat des Linienelements die Form:

$$ds^2 = \lambda \, d\alpha \, d\beta,$$

126) Diese Bezeichnung rührt von *E. Bour* her; J. éc. polyt. 22 (1862), p. 3.

und die Gleichung der geodätischen Linien wird:

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial \alpha} \frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial \beta} \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2,$$ [127]

woraus hervorgeht, dass man die imaginären Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ (Minimalkurven) als imaginäre geodätische Linien anzusehen hat.

Gauss[128]) schlug zur Lösung der obigen Aufgabe folgenden Weg ein. Man zerlege den Ausdruck $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ in die beiden Faktoren:

$$\sqrt{E}du + Hdv \text{ und } \sqrt{E}du + H_1dv,$$

wo:
$$H = \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}, \quad H_1 = \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}.$$

Gelingt es nun, vier reelle Funktionen $f_1, \ldots, f_4$ von u und v zu finden derart, dass:

$$(f_1 + if_2)(\sqrt{E}du + Hdv) = df_3 + idf_4,$$

so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten. Nimmt man nämlich $f_3 = p$, $f_4 = q$ und drückt u und v durch p und q aus, so wird:

$$ds^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{f_1^2 + f_2^2} \text{ d. h. } \lambda = \frac{1}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Gauss nennt $f_1 + if_2$ den integrierenden Faktor der Differentialform $\sqrt{E}du + Hdv$. Doch ist hier zu bemerken, dass die Bestimmung eines solchen Faktors für eine komplexe Differentialform nicht wie bei den reellen integrierenden Faktoren von einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, sondern von einer solchen zweiter Ordnung abhängt, was man am einfachsten erkennt, wenn man $f_1 + if_2$ in die Form $\varrho e^{i\varphi}$ setzt. Es ergibt sich dann für ϱ die Differentialgleichung:

$$\Delta_2 \log \varrho = \frac{1}{R_1 R_2}.$$ [129]

Kennt man ein Integral dieser Differentialgleichung, so erhält man φ durch eine Quadratur. Aus den für die Funktionen $f_1 \ldots f_4$ geltenden Bedingungen folgert man leicht, dass sowohl f_3 wie f_4 Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\Delta_2 f = 0$ sind. Kennt man umgekehrt eine Lösung f dieser Gleichung, so lässt sich mit Hülfe einer Quadratur eine zweite Lösung g derselben Gleichung finden derart, dass die Kurvenscharen $f = \text{const.}$, $g = \text{const.}$ auf der

---

127) *S. Lie*, Math. Ann. 20 (1882), p. 367.

128) Werke 4, p. 193.

129) *Beltrami*, Math. Ann. 1 (1869), p. 575; „*Darboux*" 3, p. 216; *R. Lipschitz*, Bull. sci. math. (2) 16 (1892), p. 206.

Fläche rechtwinklig und isotherm sind[130]). Mit dem Lösungspaar f, g sind aber alle übrigen Lösungspaare gegeben; denn nimmt man eine beliebige Funktion F von $f + gi$ und setzt:

$$F(f + gi) = m + ni,$$

so bilden m und n ebenfalls ein Lösungspaar, und man hat stets:

$$\Delta_1 (m + ni) = 0.$$

Ein anderer Weg, die quadratische Differentialform ds^2 in die Gestalt $\lambda (dp^2 + dq^2)$ zu transformieren, ist von *J. Weingarten* angegeben worden[131]).

Die physikalische Frage[131a]), welche auf die betrachteten Kurven führt, ist die folgende. Man denke sich die Fläche erwärmt und einen stationären Wärmezustand hergestellt, bei dem sich also die Temperatur eines Punktes nicht mit der Zeit ändert. Wie findet man die Linien auf der Fläche, längs derer die Temperatur sich gleichbleibt? Die Antwort ist diese. Bedeutet $\tau = \varphi (u, v)$ die Temperatur, so muss die Funktion φ der Gleichung $\Delta_2 \varphi = 0$ genügen. Nun wird aber die fragliche Kurvenschar nicht nur durch die Gleichung $\varphi (u, v) =$ const., sondern durch jede Gleichung von der Form $F(\varphi (u, v)) =$ const. festgelegt. Es fragt sich also, wann die durch eine Gleichung $\psi (u, v) = \sigma$ bestimmte Kurvenschar isotherm ist und wie die zugehörige Funktion φ — der thermometrische Parameter — berechnet wird. Die Lösung ist die folgende[132]). Man eliminiere mit Hülfe der Gleichung $\psi (u, v) = \sigma$ aus dem Ausdruck $\frac{\Delta_2 \psi}{\Delta_1 \psi}$ etwa u. Fällt dann auch v fort, sodass $\frac{\Delta_2 \psi}{\Delta_1 \psi} = g(\sigma)$, so ist die Kurvenschar $\psi =$ const. isotherm und ebenso die Schar ihrer orthogonalen[132a]) Trajektorien, sowie jede Schar ihrer isogonalen Trajektorien[132b]). Bringt man $g(\sigma)$ auf die Form $\frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}$, so wird $\varphi = A \int \frac{d\sigma}{f(\sigma)} + B$, wo A und B Konstante bedeuten. Sind die Parameterlinien isotherm, so hat man $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$.

---

130) *Beltrami*, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 335; „*Bianchi*" p. 69.

131) Über die Theorie der auf einander abwickelbaren Flächen, Berlin 1884, p. 21.

131a) Zuerst von *G. Lamé* für Flächenscharen aufgeworfen (III D 1, 2, Nr. 24).

132) *Beltrami*, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 369.

132a) *Beltrami*, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 372.

132b) *Ricci*, Lezioni, p. 205.

20. Eigenschaften isothermer Scharen. Wir bezeichnen wie früher mit s die Bogenlänge der Kurven einer Schar, mit σ die der Kurven der Orthogonalschar und setzen:

$$dx = \frac{dx}{ds} T_1 + \frac{dx}{d\sigma} T_0, \text{ u. s. w.}$$

Die geodätische Krümmung der ersten Schar sei $\frac{1}{R_s}$, die der zweiten $\frac{1}{R_\sigma}$. Nach dem obigen sind entweder beide Scharen isotherm oder keine von beiden. Die Bedingung für das erstere ist:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{R_s} = \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{R_\sigma}.$$

Diese Gleichung zeigt ein Mittel an, um zu erkennen, ob eine Schar isotherm ist, falls sie durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt ist. Die fragliche Beziehung findet sich bereits im wesentlichen bei *Bonnet*[133]). Die Differentialformen T_1 und T_0 besitzen, wenn obige Beziehung besteht, einen gemeinsamen integrierenden Faktor, der sich durch eine Quadratur bestimmen lässt[134]). Hierin liegt der *Lie*'sche Satz[135]): Ist eine Isothermenschar durch ihre Differentialgleichung definiert, so kann die Integration der letzteren durch zwei Quadraturen geleistet werden. Die in obiger Gleichung ausgesprochene Eigenschaft isothermer Linien lässt unmittelbar erkennen, dass auf einer Kugel jedes aus Kreisen bestehende Orthogonalsystem isotherm ist. Ein solches System wird aus der Kugel von zwei Ebenenbüscheln ausgeschnitten, deren Axen reziproke Polaren (III C 4) der Kugel sind[136]).

Beltrami[137]) zeigte, dass der Ort der Punkte, in denen sich zwei isotherme, nicht rechtwinklige Scharen unter konstantem Winkel schneiden, wieder eine isotherme Schar liefert. — Die Parameterlinien sind jedesmal isotherm, wenn das Quadrat des Linienelements die *Liouville*'sche Form hat. *U. Dini*[138]) wies nach, dass hier die Parameterlinien zugleich ein System von geodätischen Ellipsen und

133) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 47; vgl. „*Darboux*" 3, p. 154.

134) *v. Lilienthal,* Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig 1896, p. 17.

135) *S. Lie,* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, hrsg. von *G. Scheffers,* Leipzig 1891, p. 162; „*Bianchi*" p. 73.

136) *Bonnet,* J. éc. polyt. 20 (1853), p. 117; „*Bianchi*" p. 81; „*Darboux*" 3, p. 155.

137) Giorn. di mat. 2 (1864), p. 374.

138) Ann. di mat. (2) 3 (1869—70), p. 270.

Hyperbeln bilden, und umgekehrt, dass, wenn auf einer Fläche ein derartiges System isotherm ist, die Fläche zu den *Liouville*'schen gehört.

Darboux [139]) stellte dem *Dini*'schen Satz einen weiteren an die Seite. Kann man ein System orthogonaler Parameterlinien auf zweifache Weise als ein System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln auffassen, so ist das auf unendlich viele Weisen möglich, d. h. es gibt unendlich viele Paare von Linien (*Basislinien*), für welche der Ort der Punkte, deren geodätische Entfernungen von den Linien eines Paars konstante Summe oder Differenz besitzen, mit den Parameterlinien zusammenfällt, und das Quadrat des Linienelements, bezogen auf die fraglichen Parameterlinien, hat dann die *Liouville*'sche Form. Die zu einem Paar von Basislinien geodätisch parallelen Linien können hier stets als die geodätischen Evolventen (Nr. 15) gewisser unter Umständen imaginärer Kurven betrachtet werden.

Über die Bedeutung der isothermen Scharen für die Herstellung geographischer Karten (III D 6 a, Nr. 8; VI I 4) siehe „*Darboux*" 2, p. 153 u. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 43.

VI. Parameterlinien. Fundamentalgleichungen.

21. Parameter- und Koordinatenlinien. Die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse einer Fläche hängt ab von einem irgendwie gewählten System von zwei einfach unendlichen Kurvenscharen auf der Fläche, die man füglich als „*Koordinatenlinien*" bezeichnen kann. Sie spielen dieselbe Rolle, wie in der Ebene die zu den Koordinatenaxen parallelen Geraden; hier wie auf der Fläche wird ein Punkt bestimmt durch die beiden sich in ihm schneidenden Koordinatenlinien. Sind die Koordinaten der Flächenpunkte als Funktionen zweier Veränderlicher u, v gegeben, so sind die Kurven $u =$ const., $v =$ const. die *Parameterlinien* (Nr. 4). Man kann aber auch die Fläche überziehen mit irgend einem System von Kurven, die durch endliche Gleichungen: $\varphi(u, v) =$ const., $\psi(u, v) =$ const. oder durch Differentialgleichungen:

$$f_1(u,v)\,du + f_2(u,v)\,dv = 0, \qquad g_1(u,v)\,du + g_2(u,v)\,dv = 0$$

gegeben sein können. Bezieht man die Punkte der Fläche auf diese beiden Scharen, so sind letztere „*Koordinatenlinien*" auf der Fläche. Obgleich man theoretisch dadurch, dass man u und v durch φ und ψ ausgedrückt denkt, die Koordinatenlinien zu Parameterlinien machen kann, ist doch aus mehrfachen Gründen, namentlich wegen der prak-

139) „*Darboux*" 3, p. 19, 21.

tischen Schwierigkeit, die Ausdrücke von u und v durch φ und ψ wirklich zu finden, die Unterscheidung von Koordinatenlinien und Parameterlinien geboten. Wir wollen nun die wichtigeren Gesichtspunkte, von denen aus man die fraglichen Liniensysteme betrachtet hat, darlegen.

22. Methode von Gauss. Hier fallen die Koordinatenlinien mit den Parameterlinien zusammen. Die zweiten Ableitungen der Koordinaten (Nr. 9, III D 1, 2, Nr. 34) werden dargestellt durch die ersten und durch die Richtungskosinus X, Y, Z der Normalen. *A. Voss*[140]) hat die in Rede stehenden Beziehungen die „Differentialgleichungen der Fläche" genannt. Die Koeffizienten der Darstellungen hängen von den in Nr. 4 erklärten Grössen E, F, G, L, M, N ab, die man nach dem Vorgange von *Hoppe* „*Fundamentalgrössen*" nennt. Hinzuzunehmen sind die in III D 1, 2, Nr. 34 angeführten Ausdrücke der ersten Ableitungen von X, Y, Z, deren Koeffizienten in den Fundamentalgrössen rational sind. Die Integrabilitätsbedingungen der auf diese Weise erhaltenen Darstellungen von $d\frac{\partial x}{\partial u}$, $d\frac{\partial x}{\partial v}$, $dX, \ldots$ werden geliefert durch ein System von drei partiellen Differentialgleichungen zwischen den Fundamentalgrössen. Man nennt diese Gleichungen die „*Fundamentalgleichungen*" (III D 1, 2, Nr. 34). Eine derselben drückt das Krümmungsmass $\frac{1}{R_1 R_2}$ nur durch E, F, G und deren Ableitungen aus und ist von *Gauss* aufgestellt. Die beiden übrigen sind in schwerfälliger Weise zuerst von *G. Mainardi*[141]) hergeleitet und später von anderen in einfachere Gestalt gebracht[142]). Von Wichtigkeit ist hier der *Bonnet*'sche Satz, dass, wenn man sechs Funktionen E, F, G, L, M, N kennt, die den Fundamentalgleichungen genügen, hierdurch eine Fläche bis auf ihre Lage im Raum und eine Spiegelung an einer Ebene bestimmt ist[143]).

Da die in Rede stehende Form der Fundamentalgleichungen ziemlich verwickelt ist und die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen nicht ohne weiteres erkennen lässt, hat man versucht, auf verschiedene Arten jene Gleichungen zu vereinfachen. *E. Bour*[144])

140) Math. Ann. 39 (1891), p. 184.

141) Mailand, Ist. Lomb. Giorn. 9 (1856), p. 386.

142) *R. Hoppe,* Prinzipien der Flächentheorie. Zweiter Teil des Lehrbuchs der anal. Geom., Leipzig 1890, p. 8; „*Knoblauch*" p. 77.

143) J. éc. polyt. 25 (1867), p. 31; *R. Lipschitz,* Berl. Ber. 1883, p. 541; vgl. *H. Stahl* u. *V. Kommerell,* Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, Leipzig 1893, p. 32; „*Bianchi*", p. 93; *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 321. Vgl. noch III D 6 a, Nr. 2, Fussn. 20^b.

144) J. éc. polyt. 22 (1862), p. 1.

nahm zu Parametern die *Gauss*'schen geodätischen Polarkoordinaten. Für den Fall, dass die Parameterlinien mit den Krümmungslinien zusammenfallen, sind die Fundamentalgleichungen in den von *G. Lamé*[145]) für dreifach orthogonale Flächensysteme entwickelten Fundamentalgleichungen enthalten und von *A. Enneper*[146]) direkt hergeleitet. Die beiden von der *Gauss*'schen verschiedenen Fundamentalgleichungen sind von *J. Knoblauch* für die Krümmungslinien als Parameterlinien in eine Form gebracht, die nur geometrische Grössen und zwar die Hauptkrümmungsradien, die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien und die vier Hauptkrümmungsradien der beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche enthält[147]).

23. Methode von Codazzi. Verschieden von der bisher betrachteten und geometrischer gehalten ist die *D. Codazzi*'sche Ableitung der Fundamentalgleichungen[148]). Hier werden die Parameterlinien als rechtwinklig vorausgesetzt und die Richtungskosinus ihrer Tangenten, sowie ihrer Haupt- und Binormalen eingeführt. Es lassen sich nun die auf die eine Parameterlinie bezogenen Richtungskosinus leicht mit Hülfe der auf die andere bezogenen Richtungskosinus und die der Flächennormalen ausdrücken. Nimmt man noch die *Frenet*'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. **31**) hinzu, so ergeben sich für die nach u und v genommenen zweiten Ableitungen der Richtungskosinus je zwei der Form nach verschiedene Ausdrücke. Ebenso finden sich für die entsprechenden zweiten Ableitungen der Koordinaten je zwei Ausdrücke. Man braucht nun blos die fraglichen auf die Koordinaten und die Tangenten der Parameterlinien bezüglichen Ausdrücke einander gleichzusetzen, um die Fundamentalgleichungen zu erhalten. Durch Einführung der beiden Hauptkrümmungsradien sowie des Winkels der Linien $v = \text{const.}$ mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie gibt *Codazzi* jenen Gleichungen eine zweite verhältnismässig einfache Gestalt. *O. Bonnet*[149]) gab den *Codazzi*'schen Formeln in ihrer ersten Gestalt einen Ausdruck, der die geometrische Bedeutung der auftretenden Funktionen benutzt. Die grosse Arbeit von *Codazzi* in den Ann. di mat.[150]) gibt die Verallgemeinerung der *Lamé*'schen Gleichungen für beliebige krummlinige Koordinaten im Raume und als be-

145) Siehe Fussn. 50).

146) Zeitschrift Math. Phys. 7 (1862), p. 89.

147) Acta math. 15 (1891), p. 253; vgl. *v. Lilienthal,* Math. Ann. 38 (1891), p. 450.

148) Paris, Mém. sav. [étr.] 27 (1882). Die Arbeit stammt aus dem Jahr 1859.

149) Par. C. R. 57 (1863), p. 805.

150) (2) 1 (1867), p. 293; (2) 2 (1868), p. 101, 269; (2) 4 (1870), p. 10.

sonderen Fall die Fundamentalgleichungen für beliebige Parameterkurven. Man vergleiche die Anmerkung bei „*Darboux*" 2, p. 369.

24. Methode von Darboux [151]). Hier werden die Koordinatenlinien als rechtwinklig angenommen. Ihre Tangenten bilden zusammen mit der Flächennormalen ein bewegliches Dreikant. Als fundamentale Grössen kommen nun in Betracht die Nr. **10** erklärten Grössen $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1$, die man als die Komponenten der auf das bewegliche Dreikant bezogenen Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des Dreikants auffassen kann für Verrückungen auf der Linie $v =$ const. oder $u =$ const., falls man jedesmal die Veränderliche u oder v der Zeit gleich setzt. Die Fundamentalgleichungen werden gewonnen mit Hülfe der Beziehungen, die zwischen den Ableitungen der Koeffizienten einer orthogonalen Substitution (III B 2) und den Koeffizienten selbst bestehen, und nehmen die einfache Form an:

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial v} = r p_1 - p r_1,$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1.$$

Hier lassen sich r und r_1 durch die Koeffizienten des Quadrats des Linienelements und den Winkel der x'-Axe mit der Linie $v =$ const. ausdrücken, ausserdem besteht zwischen diesem Winkel, den fraglichen Koeffizienten und den Grössen p, p_1, q, q_1 eine in Hinsicht der letzteren lineare Gleichung. Es treten also im Ganzen in den Fundamentalgleichungen sieben Funktionen auf.

25. Willkürliche Koordinatenlinien. Lässt man die Koordinatenlinien vollkommen willkürlich, so vereinfachen sich die auszuführenden Rechnungen durch Verwendung der in (Nr. 8) erklärten Ableitungen nach den Bogenlängen der Koordinatenlinien und denen ihrer orthogonalen Trajektorien. Für rechtwinklige und mit den Parameterlinien zusammenfallende Koordinatenlinien ist das Verfahren auf kinematischer Grundlage von *E. Cesàro* [152]) auseinandergesetzt. Der allgemeine Fall ist von *Ph. Gilbert* [153]) unter Benutzung der *Bonnet*'schen Bogendifferentiale der Koordinatenlinien erörtert. Die

151) „*Darboux*" 2, p. 363.

152) Das unter 55) zitierte Buch im Original p. 157, in der deutschen Ausgabe p. 201.

153) Siehe Fussn. 59).

einfachste und umfassendste Behandlung der Frage scheint die im folgenden gekennzeichnete zu sein[154]).

Die Bogenlängen der Koordinatenlinien mögen mit σ_1 und σ_2, die ihrer senkrechten Durchdringungskurven bez. mit σ_3 und σ_4, der Winkel der Koordinatenlinien mit φ bezeichnet werden. Den wachsenden Bogenlängen entsprechen die positiven Halbtangenten und letztere legt man zweckmässig so, dass die Tangenten der Kurven (σ_2) und (σ_3) sich durch positive Drehungen $(< \pi)$ um die Flächennormale aus der Tangente der Kurve (σ_1) ergeben, die Tangente der Kurve (σ_4) durch negative Drehung $(< \pi)$ aus der Tangente der Kurve (σ_2). Ist nun $\frac{1}{P_\alpha}$ die Normalkrümmung der Kurve (σ_α), $\frac{1}{K_\alpha}$ ihre geodätische Krümmung ist ferner:

$$n_1 = \frac{\cos\varphi}{K_1} - \frac{\sin\varphi}{K_3}, \quad n_2 = \frac{\cos\varphi}{K_2} - \frac{\sin\varphi}{K_4},$$

sowie:

$$\frac{d\,\frac{df}{d\sigma_\alpha}}{d\sigma_\alpha} = \frac{d^2 f}{d\sigma_\alpha^2}, \quad \frac{d\,\frac{df}{d\sigma_\alpha}}{d\sigma_\beta} = \frac{d^2 f}{d\sigma_\alpha d\sigma_\beta},$$

so ergibt sich:

$$\frac{d^2x}{d\sigma_1{}^2} = \frac{1}{K_1}\frac{dx}{d\sigma_3} + \frac{X}{P_1}, \quad \frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} = n_1\frac{dx}{d\sigma_3} + mX,$$

$$\frac{d^2x}{d\sigma_2 d\sigma_1} = n_2\frac{dx}{d\sigma_4} + mX, \quad \frac{d^2x}{d\sigma_2{}^2} = \frac{1}{K_2}\frac{dx}{d\sigma_4} + \frac{X}{P_2}.$$

Ein derartiges System, in dem aber n_1 und n_2 andere, in Nr. **31** zu besprechende Bedeutungen haben, ist zuerst von *Voss*[155]) veröffentlicht.

Die Grössen n_1 und n_2 lassen sich geometrisch auf folgende Art kennzeichnen. Man lege durch die geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_1) und (σ_3) eine Gerade (L_1). Die Tangente der Kurve (σ_4) möge die Gerade (L_1) in einem Punkte schneiden, dessen Abscisse hinsichtlich des betrachteten Flächenpunktes t_1 sei. Ebenso lege man durch die geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_2) und (σ_4) eine Gerade (L_2) und bezeichne mit t_2 die Abscisse ihres Schnittpunkts mit der Tangente der Kurve (σ_3). Dann ist:

$$n_1 = -\frac{1}{t_1}, \quad n_2 = -\frac{1}{t_2}.$$

Hinsichtlich der Grösse m sei bemerkt: a) Sind $\frac{1}{P}$ und $\frac{1}{P'}$ die Normalkrümmungen der Kurven, die den Winkel bez. den Nebenwinkel der Kurven (σ_1) und (σ_2) halbieren, so ist:

154) *v. Lilienthal*, Math. Ann. 42 (1893), p. 511.

155) Münch. Ber. 1892, p. 274.

$$m = \frac{1+\cos\varphi}{P'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right) = \frac{\cos\varphi - 1}{P''} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right).$$

b) Ist φ_1 der Winkel zwischen der positiven Halbtangente der Kurve (σ_1) und der ihr konjugierten, durch eine positive Drehung um die Flächennormale zu erhaltenden Halbtangente, so ist, falls die Kurve (σ_1) keine Haupttangentenkurve:

$$m = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{P_1 \sin\varphi_1}.$$

Bedeutet φ_2 den Winkel, um den die positive Halbtangente der Kurve (σ_2) im negativen Sinne gedreht werden muss, damit sie mit ihrer konjugierten zusammenfalle, so hat man, falls die Kurve (σ_2) keine Haupttangentenkurve:

$$m = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi)}{P_2 \sin\varphi_2}.$$

c) Schneiden die Kurven (σ_1) und (σ_2) die zu R_1 gehörende Krümmungslinie unter den Winkeln α und β, so ist:

$$m = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{R_1} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{R_2}.$$

Neben der geometrischen Bedeutung der betrachteten Grössen erwähnen wir die kinematische. Letztere lässt sich zunächst aus der Kinematik einer Geraden [156]) herleiten. Geht die Tangente der Kurve (σ_1) durch Translation des Berührungspunktes und Drehung um ihn in die ihr längs (σ_1) benachbarte Tangente über, und bewegt sich der Berührungspunkt mit der Geschwindigkeit Eins, so gibt es eine Drehungsachse in der Normalebene der Kurve (σ_1). Jetzt sind $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{-1}{P_1}$ die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit bezogen auf die Flächennormale und die Tangente der Kurve (σ_3). Geht aber die Tangente der Kurve (σ_1) in die ihr längs der Kurve (σ_2) benachbarte Lage über und bewegt sich wieder der Berührungspunkt mit der Geschwindigkeit Eins, so gibt es eine Drehungsachse in dem durch die Tangente der Kurve (σ_2) gelegten Normalschnitt der Fläche. Hier sind n_1 und $\frac{-m}{\sin\varphi}$ die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit, bezogen auf die Flächennormale und die Tangente der Kurve (σ_2). Entsprechende Sätze gelten für die Bewegungen der Tangente der Kurve (σ_2).

Eine zweite kinematische Bedeutung gewinnen die betrachteten Grössen, wenn man die Koordinatenlinien als rechtwinklig voraussetzt. Hier tritt die Kinematik eines festen Systems (IV 3, Nr. 21)

156) *E. Lamarle,* Théorie géom. des centres et axes instantanés de rotation, Bruxelles-Paris 1859.

in ihre Rechte. Lassen wir die x'-, y'-, z'-Kante eines beweglichen Dreikants mit der Tangente der Kurve (σ_1), der der Kurve (σ_2), und der Flächennormalen zusammenfallen, und geben der Translationsbewegung des Dreikants jedesmal die Geschwindigkeit Eins, so werden die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit bei einer unendlich kleinen Verrückung auf der Kurve (σ_1) gleich:

$$m, \quad \frac{-1}{P_1}, \quad \frac{1}{K_1},$$

bei einer solchen auf der Kurve (σ_2) gleich:

$$\frac{1}{P_2}, \quad -m, \quad -\frac{1}{K_2}.$$

Es wurde oben bemerkt, dass die Ableitungen nach Bogenlängen sich der *Lie*'schen Theorie der infinitesimalen Transformationen (II A 6, Nr. 4) einordnen. Sowie in dieser Theorie der Ausdruck:

$$A(B(f)) - B(A(f))$$

bei beliebig gewählter Funktion f von grundlegender Bedeutung ist, spielt hier der entsprechende Ausdruck:

$$\frac{d^2 f}{d\sigma_1\, d\sigma_2} - \frac{d^2 f}{d\sigma_2\, d\sigma_1}$$

eine wichtige Rolle. Nehmen wir:

$$dx = \frac{dx}{d\sigma_1} T_1 + \frac{dx}{d\sigma_2} T_2,$$

und sind λ_1 und λ_2 integrierende Faktoren der Differentialformen T_1 und T_2, so besteht die Gleichung:

$$\frac{d^2 f}{d\sigma_1\, d\sigma_2} - \frac{d^2 f}{d\sigma_2\, d\sigma_1} = \frac{d \log \lambda_1}{d\sigma_2} \frac{df}{d\sigma_1} - \frac{d \log \lambda_2}{d\sigma_1} \frac{df}{d\sigma_2}.$$

Zudem ist:

$$\frac{d \log \lambda_1}{d\sigma_2} = -\frac{n_1 \cos\varphi + n_2}{\sin\varphi}, \quad \frac{d \log \lambda_2}{d\sigma_1} = -\frac{n_1 + n_2 \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Kann man λ_1 gleich Eins nehmen, so ist T_1 ein exaktes Differential; die Kurven $T_1 = 0$ gestatten dann die infinitesimale Transformation $d\sigma_1$, d. h. sie sind dadurch entstanden, dass auf den Kurven $T_2 = 0$ von einer willkürlich angenommenen aber nicht zu ihnen gehörenden Kurve aus gleiche Bogenlängen abgetragen sind. Dann gilt die rein geometrische Beziehung:

$$n_1 \cos\varphi + n_2 = 0.$$

Gestatten die Kurven $T_1 = 0$ die Transformation $d\sigma_1$ und gestatten zugleich die Kurven $T_2 = 0$ die Transformation $d\sigma_2$, so verschwindet sowohl n_1 wie n_2. Jetzt liegt ein von *Voss* „äquidistant“ genanntes Kurvensystem vor, von dem in Nr. 40 die Rede sein wird.

Die Fundamentalgleichungen kann man ebenfalls für willkürlich gelassene Koordinatenlinien aufstellen, doch empfiehlt es sich hier, zu Koordinatenlinien solche zu wählen, die für die Krümmung der Fläche kennzeichnend sind. Für die Krümmungslinien als Koordinatenlinien ergibt sich:

$$\frac{d\frac{1}{R_1}}{d\sigma_2} = \frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{d\frac{1}{R_2}}{d\sigma_1} = \frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right),$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{d\frac{1}{K_1}}{d\sigma_2} + \frac{d\frac{1}{K_2}}{d\sigma_1} - \frac{1}{K_1^2} - \frac{1}{K_2^2}.$$

26. Methode von R. Lipschitz. Bezeichnend ist hier, dass die Parameterlinien durch ihre sphärischen Bilder (Nr. 7) als bestimmt gedacht sind. Nimmt man letztere als von vornherein gegeben an, so stellen sich die Koordinaten der Fläche als Integrale von exakten Differentialen dar. Die Integrabilitätsbedingungen der letzteren liefern dann die beiden von der *Gauss*'schen verschiedenen Fundamentalgleichungen.

Lipschitz[157]) nimmt zu Koordinatenlinien die Krümmungslinien, zu Parameterlinien die Kurven, deren sphärische Bilder aus den Meridianen und Parallelkreisen der Einheitskugel bestehen. Die Lage der Krümmungslinien wird bestimmt durch den sogenannten Stellungswinkel, den die zum Hauptkrümmungshalbmesser R_1 gehörenden Krümmungslinien mit den Meridianen bilden. Der Fall, in dem die sphärischen Bilder der Parameterlinien beliebig vorgeschrieben sind, ist von *R. v. Lilienthal* in entsprechender Weise behandelt[158]).

Darboux[159]) wählt zu Koordinatenlinien die Kurven, deren Tangenten auf den willkürlich zu wählenden Parameterlinien der Einheitskugel senkrecht sind. Die sich so ergebenden Formeln sind als eine Erweiterung der *Lelieuvre*'schen (Nr. 9) zu betrachten und von *A. Voss*[160]) ausführlicher untersucht.

27. Methode von A. Ribaucour. Wir erwähnen endlich den Standpunkt von *A. Ribaucour*[161]), den er mit dem Namen „*Perimorphie*" belegt hat. Hier werden die Punkte einer Fläche auf eine zweite,

157) Berl. Ber. 1883, p. 169.

158) Unters. zur allgem. Theorie der krummen Oberflächen u. geradlinigen Strahlensysteme, Bonn 1886, p. 8.

159) „*Darboux*" 4, p. 42.

160) Münch. Ber. 1897, p. 229.

161) Étude des élassoïdes, Bruxelles Mém. 44 (1880), p. 4; J. de math. (4) 7 (1891), p. 11.

gegebene Fläche, die *„Bezugsfläche“* bezogen und auf letzterer wird ein orthogonales System von Parameterlinien angenommen. Die Koordinaten (x', y', z') der ersteren stellen sich dar in der Form:

$$x' = x + \xi \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \eta \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}} + \zeta X, \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen für die Grössen ξ, η, ζ werden sehr verwickelt. Die Methode gewinnt erhöhte Bedeutung für die Theorie der Strahlensysteme (III D 9) und die Abbildung der Flächen aufeinander (III D 6 a, Nr. **13**, **25**).

VII. Die allgemeine Flächenkurve.

28. Methode von Laguerre. Geodätische Torsion. Will man die Krümmungsverhältnisse einer auf einer Fläche gezogenen Kurve untersuchen, so hat man die Veränderlichen u und v als Funktionen einer neuen Veränderlichen zu betrachten und kann nun die Regeln der Kurventheorie (III D 1, 2, Nr. **31**) anwenden, wobei die *Gauss*'schen Formeln für die zweiten Ableitungen der Koordinaten zu benutzen sind. Allein dieser Weg führt zu verwickelten und geometrisch undurchsichtigen Ausdrücken. Man hat daher andere Wege eingeschlagen. Wir erwähnen zuerst das *E. Laguerre*'sche Verfahren[162]), das *Darboux*[163]) seinen Entwicklungen zu Grunde gelegt hat. — Man denke sich wie oben auf der Fläche ein bewegliches, rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt. Den Winkel, den die Tangente der betrachteten Flächenkurve mit der x'-Axe bildet, nenne man i, und ω den Winkel zwischen der Hauptnormale der Kurve und der Flächennormale. *Laguerre* leitet unter Benutzung der *Frenet*'schen Formeln folgende Beziehungen ab, in denen $\frac{1}{\varrho}$ die erste, $\frac{1}{\tau}$ die zweite Krümmung der betrachteten Kurve, s ihre Bogenlänge bedeutet:

$$\frac{ds \cos\omega}{\varrho} = \sin i\,(p\,du + p_1 dv) - \cos i\,(q\,du + q_1 dv),$$

$$\frac{ds \sin\omega}{\varrho} = di + r\,du + r_1 dv,$$

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d\omega}{ds} = -\left(p\frac{du}{ds} + p_1\frac{dv}{ds}\right)\cos i - \left(q\frac{du}{ds} + q_1\frac{dv}{ds}\right)\sin i.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert die Normalkrümmung, die zweite die geodätische Krümmung der Kurve. *Darboux* zeigte[164]), dass:

---

162) Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 60.

163) *„Darboux“* 2, p. 347 ff. Im besonderen p. 354, 357.

164) *„Darboux“* 2, p. 356.

$$\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\cos\omega}{\varrho}\right) = 2\cos i\left(p\frac{du}{ds} + p_1\frac{dv}{ds}\right) + 2\sin i\left(q\frac{du}{ds} + q_1\frac{dv}{ds}\right).$$

Die hier links stehende Ableitung muss verschwinden, wenn die betrachtete Kurve eine Krümmungslinie ist, weil für eine solche die Normalkrümmung ein Maximum oder Minimum ist, sodass jetzt die Gleichung:

$$\cos i\,(p\,du + p_1 dv) + \sin i\,(q\,du + q_1 dv) = 0$$

die Krümmungslinien, die Gleichung:

$$\sin i\,(p\,du + p_1 dv) - \cos i\,(q\,du + q_1 dv) = 0$$

die Haupttangentenkurven, die Gleichung:

$$di + r\,du + r_1 dv = 0$$

die geodätischen Linien bestimmt. Die letzte *Laguerre*'sche Gleichung zeigt, dass der Ausdruck $\frac{1}{\tau} - \frac{d\omega}{ds}$ mit der Normalkrümmung die Eigenschaft teilt, sich nicht zu ändern, wenn er für verschiedene Kurven mit derselben Tangente gebildet wird. Nehmen wir unter diesen die geodätische Linie, so wird der fragliche Ausdruck gleich der zweiten Krümmung derselben. Es handelt sich hier um den von *Bonnet*[165]) mit dem Namen *zweite geodätische Krümmung* belegten Begriff, den man heutzutage mit dem Namen *geodätische Torsion* belegt. Von einem anderen Gesichtspunkte aus wurde die fragliche Torsion zuerst von *J. Bertrand*[166]) eingeführt und zwar folgendermassen. Mit (N) bezeichne man die Flächennormale, mit (P') einen dem Punkte (P) unendlich benachbarten Punkt der Fläche. Die durch (P') gehende Flächennormale bildet mit der Ebene (N, PP') einen unendlich kleinen Winkel, der durch $\overline{PP'}$ dividiert die geodätische Torsion liefert. Die geodätische Torsion einer Krümmungslinie ist somit beständig gleich Null, sodass, wenn eine Krümmungslinie zugleich eine geodätische Linie ist, sie notwendig eben sein muss, und wenn eine geodätische Linie eben ist — aber nicht gerade — sie notwendig eine Krümmungslinie sein muss. Weitere Ausdrücke für die geodätische Torsion sind:

$$\frac{(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2}{\sqrt{EG - F^2}\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)},$$ [167])

und:

---

165) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 16.

166) J. de math. (1) 9 (1844), p. 134.

167) „*Knoblauch*" p. 258.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\sin 2\alpha,$$ [168])

wo α den Winkel bedeutet, den die Tangente der Kurve mit dem zu R_1 gehörenden Hauptnormalschnitt bildet. Man kann diesem Ausdruck auch die Gestalt geben:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{\varrho'},$$

wenn $\frac{1}{\varrho'}$ die Krümmung desjenigen Normalschnittes ist, der zu dem Winkel $\alpha+\frac{\pi}{4}$ gehört. *J. Knoblauch*[169]) findet, falls φ den Winkel zwischen der Tangente der Kurve und ihrem sphärischen Bilde bedeutet, für die geodätische Torsion den Ausdruck:

$$-\frac{1}{\varrho}\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\omega.$$

Konstruiert man in jedem Punkt einer Flächenkurve diejenige die Fläche berührende Kugel, welche den zum Berührungspunkt gehörenden Krümmungskreis (III D 1, 2, Nr. 29) der Kurve enthält, so schneiden sich nach *G. Demartres*[169a]) zwei unendlich benachbarte Kugeln unter einem Winkel, der durch das Bogenelement der Kurve dividiert, die geodätische Torsion der Kurve liefert.

29. Ableitungen nach Bogenlängen. Ein zweiter Weg zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse einer Flächenkurve besteht in der Benutzung der in Nr. 8 definierten Ableitungen nach Bogenlängen. Bezeichnen wir mit $\frac{1}{\varrho_n}$ und $\frac{1}{\varrho_g}$ die Normal- und geodätische Krümmung der Kurve, so wird die erste Krümmung der Kurve durch die Gleichung festgelegt:

$$\frac{1}{\varrho^2}=\frac{1}{\varrho_n^2}+\frac{1}{\varrho_g^2}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen werden:

$$\varrho\left(\frac{1}{\varrho_g}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{X}{\varrho_n}\right),\quad \text{u. s. w.}$$

und die Richtungskosinus der Binormalen:

$$\varrho\left(\frac{1}{\varrho_g}X-\frac{1}{\varrho_n}\frac{dx}{d\sigma}\right),\quad \text{u. s. w.}$$

Für die zweite Krümmung folgt:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\omega}{ds}+\sum\frac{dX}{ds}\frac{dx}{d\sigma}.$$

---

168) *E. Bour,* J. éc. polyt. 22 (1862), p. 25; „*Bianchi*" p. 166; *Bertrand* a. a. O. p. 134. 169) „*Knoblauch*" p. 261.

169a) Bull. sci. math. (2) 21 (1897), p. 182.

30. Methode von A. Enneper. Ein dritter Weg endlich besteht darin, dass man die Ableitung nach der Bogenlänge einer Kurvenschar nicht definiert mit Hülfe der endlichen Gleichung oder der Differentialgleichung der Schar, sondern mit Hülfe der Ableitungen nach den Bogenlängen zweier gegebener Scharen — der Koordinatenlinien — und dem Winkel, unter dem die erste Schar eine der beiden letzteren schneidet. Nehmen wir die Krümmungslinien zu Koordinatenlinien und bezeichnen die Bogenlängen der zu R_1 und R_2 gehörenden Krümmungslinien mit s_1 und s_2, so wird, wenn α den Winkel bedeutet, den die betrachteten Kurven mit den zu R_1 gehörenden Krümmungslinien bilden:

$$\frac{dF(u,v)}{ds} = \cos\alpha\frac{dF}{ds_1} + \sin\alpha\frac{dF}{ds_2}, \quad \frac{dF(u,v)}{d\sigma} = -\sin\alpha\frac{dF}{ds_1} + \cos\alpha\frac{dF}{ds_2}.$$

Unter Benutzung dieses Verfahrens, das im wesentlichen von *A. Enneper*[170]) angewandt wurde, kommt man unmittelbar auf den *Liouville*'schen Ausdruck der geodätischen Krümmung, den *Euler*'schen der Normalkrümmung, und den *Bertrand*'schen der geodätischen Torsion.

31. Weitere Begriffe. Man hat noch verschiedene andere Begriffe aufgestellt, um die Theorie der allgemeinen Flächenkurve zu bereichern; doch lassen sie sich ebenso wie die geodätische Torsion auf die einfacheren Begriffe der Normal- und geodätischen Krümmung, sowie der Abscisse (r) (Nr. 5) des kürzesten Abstandes zweier benachbarter Normalen zurückführen.

Wir nennen zuerst die *Flexion* einer Fläche längs einer Kurve. Mit diesem Namen bezeichnet *Ph. Gilbert*[171]) den Quotienten:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\sqrt{\Sigma dX^2}}{\sqrt{\Sigma dx^2}}.$$

Man hat hier:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2},$$

wo α den Winkel der Kurve mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie bedeutet. Ist α' der Winkel der konjugierten Kurve mit derselben Krümmungslinie, so wird:

$$r_1^2 = R_1^2 \sin^2\alpha' + R_2^2 \cos^2\alpha'.$$

Bezeichnet man mit $\frac{1}{r_2}$ die Flexion der konjugierten Kurve, so besteht die Beziehung:

170) Zeitschr. Math. Phys. 2 (1864), p. 100.

171) Bruxelles, Mém. 37 (1868), p. 1. In ähnlicher Richtung wie die *Gilbert*'sche bewegt sich die Arbeit von *V. Reina*, Rom, Linc. R. (4) 6^1 (1890), p. 156 u. 205.

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \left| \frac{1}{R_1 R_2} \right|.$$

Die geodätische Torsion ist gleich der Flexion multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen der Kurve und ihrer konjugierten. Wir erwähnen noch den *Gilbert*'schen Satz[172]): Die Flexionen einer Fläche längs zweier beliebiger Richtungen verhalten sich wie die Sinus der Winkel, die jede der Richtungen mit der konjugierten der anderen bildet.

Ein Begriff, der sich auf zwei einfach unendliche Scharen von Flächenkurven bezieht, ist der von *L. Aoust*[173]) aufgestellte Begriff der *Seitenkrümmung* (*courbure inclinée*). Man fasse die beiden durch einen Flächenpunkt (P) gehenden Einzelkurven der Scharen ins Auge und nenne (P_1) bez. (P_2) den (P) unendlich nahen Punkt auf der Kurve der ersten bez. zweiten Schar. Die Tangenten der durch (P) und (P_2) gehenden Kurven der ersten Schar bilden einen unendlich kleinen Winkel, der durch $\overline{PP_2}$ dividiert *die Seitenkrümmung der Kurven der ersten Schar im Punkte* (P) *längs* $\overline{PP_2}$ liefert. Nach dem in Nr. 25 Gesagten hat demnach die Seitenkrümmung den Wert:

$$\sqrt{n_1^2 + m^2}.$$

Wir erwähnen endlich die von *A. Voss* eingeführten *nach den Richtungen der Koordinatenlinien gemessenen geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien* — wo jedes beliebige System von zwei einfach unendlichen Kurvenscharen auf der Fläche die Rolle der Koordinatenlinien spielen kann. Man erhält die nach der Richtung der zweiten Koordinatenlinie gemessene geodätische Krümmung der ersten auf folgende Weise. Durch (P_1) werde diejenige Normalebene der Fläche gelegt, welche die Tangente der (P_1) durchziehenden Kurve der zweiten Schar enthält. Diese Ebene schneidet die Tangente der durch (P) gehenden Kurve der zweiten Schar in einem Punkt, den *Voss* als den Mittelpunkt der fraglichen Krümmung bezeichnet[174]). Für diese Krümmung selbst findet man den Ausdruck: $-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{K_2} + \frac{1}{K_4}$, und für die entsprechende Krümmung der zweiten Koordinatenlinie den Ausdruck: $-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{K_1} + \frac{1}{K_3}$.[175])

172) Bruxelles, Mém. 37 (1868), p. 13.

173) Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface, Paris 1868; Par. C. R. 57 (1863), p. 217; Ann. di mat. (2) 2 (1869), p. 39. *Gilbert* nennt die Seitenkrümmung *Deviation.* Vgl. *Codazzi*, dieselben Annali (2) 4 (1870), p. 16.

174) Münch. Ber. 1892, p. 258; Math. Ann. 39 (1891), p. 200.

175) *v. Lilienthal,* Math. Ann. 42 (1893), p. 516.

Die in Rede stehenden Krümmungen geniessen im Vergleich zu den mannigfaltigen, namentlich von *Aoust* betrachteten und nur durch das Verhältnis zweier unendlich kleiner Grössen festgelegten Krümmungen den Vorzug, dass sie einen geometrischen Mittelpunkt besitzen, der durch einen einfachen Grenzübergang zu erhalten ist. Will man diese Mittelpunkte auf Grund des in Nr. 25 über die Grössen t_1 und t_2 Gesagten konstruieren, so hat man nur durch den Schnittpunkt der Geraden (L_1) bez. (L_2) mit der Tangente der Kurve (σ_4) bez. (σ_3) eine Parallele zur Tangente der Kurve (σ_3) bez. (σ_4) zu legen und sie zum Schnitt mit der Tangente der Kurve (σ_1) bez. (σ_2) zu bringen, um in diesen Schnittpunkten die fraglichen Krümmungsmittelpunkte zu erhalten.

32. Polkurve einer Flächenkurve und Kurven der normalen Segmente. Einer jeden Flächenkurve kann man in mannigfacher Weise andere Kurven zuordnen, so die Kurve der Mittelpunkte ihrer Normal- und geodätischen Krümmung[175a]). Besondere Erwähnung verdient die von *A. Enneper* untersuchte Gratlinie (Rückkehrkante) der abwickelbaren Fläche (III D 5, Nr. 3), welche die gegebene Fläche längs der betrachteten Kurve (C) berührt. Ihre Tangente ist der Tangente von (C) konjugiert, ihre Binormale ist parallel der Flächennormalen. *A. Schönflies*[176]) leitet mittels kinematischer Betrachtungen für die erste Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$, die zweite $\frac{1}{r_1}$ und die Bogenlänge s_1 der Gratlinie die Beziehungen her:

$$\frac{ds}{\varrho_n} = \frac{ds_1}{r_1} \sin\varphi, \quad \frac{ds}{r_g} = \frac{ds_1}{r_1} \cos\varphi, \quad \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{ds_1}{\varrho_1} + d\varphi,$$

wo φ den Winkel der fraglichen konjugierten Tangenten und $\frac{1}{\varrho_g}$ die geodätische Torsion von (C) bedeutet. Die Entfernung eines Punktes (P) der Kurve (C) von dem zugehörigen Punkt der Gratlinie — von *O. Böcklen*[177]) *Polstrecke* genannt — fällt zusammen mit dem geodätischen Krümmungsradius von (C) gemessen in der Richtung der konjugierten Kurve. Es lässt sich zeigen, dass das Verhältnis der ersten Krümmung der Gratlinie zur zweiten gleich ist der geodätischen Krümmung des sphärischen Bildes der Kurve (C). Fasst man auf einer Fläche ein System von zwei einfach unendlichen Kurvenscharen ins Auge, so bilden die zu den Kurven jeder Schar gehörenden Grat-

175a) *G. Gattorno,* Giorn. di mat. 37 (1899), p. 41.

176) Gött. Nachr. 1898, p. 74. Vgl. *A. Enneper,* ibid. 1869. p 207; Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 283.

177) J. f. Math. 96 (1884), p. 154; vgl. *v. Lilienthal,* Math. Ann. 31 (1888), p. 88.

linien zwei neue Flächen. *Voss* zeigte, dass einem System konjugierter Scharen auf jeder der beiden Flächen ein konjugiertes Kurvensystem entspricht[178]).

Wir erwähnen noch die von *Ch. Brisse Kurven der normalen Segmente* genannten Kurven. Man trage von einer Flächenkurve aus auf den Flächennormalen Längen auf, die sich stetig ändern. Sind P und P' die zu den Bogenlängen s und $s + \Delta s$ gehörenden Punkte der Kurve, L und L' die von ihnen aus auf den zugehörigen Flächennormalen aufgetragenen Längen, T und T' die Winkel, welche die Flächennormalen in P und P' mit der Sehne $\overline{PP'}$ bilden, so zeigte *E. Laguerre*[178a]), dass:

$$\overline{PP'} \cdot (L \cos T + L' \cos T') = \varkappa \Delta s^3 + \frac{1}{2} \frac{d\varkappa}{ds} \Delta s^4 + \cdots,$$

wo:

$$\varkappa = L\left(\frac{\sin\omega}{2\varrho}\frac{d\omega}{ds} + \frac{\cos\omega}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds} - \frac{\sin\omega}{3\varrho\tau}\right) - \frac{dL}{ds}\frac{\cos\omega}{2\varrho},$$

und die Grössen ω, ϱ, τ dieselbe Bedeutung besitzen wie in Nr. 28. Wenn also $\varkappa$ längs der Kurve verschwindet, beginnt die betrachtete Reihenentwicklung mindestens mit Gliedern fünfter Ordnung. In diesem Fall wird die von dem Endpunkt der Länge L beschriebene Linie als eine *Kurve der normalen Segmente* bezeichnet. Für eine Haupttangentenkurve kann L nur gleich Null genommen werden. Für jede andere Flächenkurve erhält man unter Einführung der Normalkrümmung $\frac{1}{P}$ die Differentialgleichung:

$$\frac{dL}{L} = \frac{1}{3}\frac{dP}{P} + \frac{2}{3}\operatorname{tg}\omega\left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{\tau}\right).$$

Für die geodätischen Linien und die Krümmungslinien ergibt sich:

$$L = \text{const} \cdot \sqrt[3]{P}.$$

Ein konstantes L liefert die Differentialgleichung der von ihrem Krümmungskreis hyperoskulierten Normalschnitte (Nr. 13; III D 1, 2, Nr. 38).

VIII. Krümmungsmasse.

33. Das Gauss'sche Krümmungsmass und ihm verwandte Krümmungsmasse. Das *Gauss*'sche Krümmungsmass (Nr. 7) stellt einen Grenzwert dar, der ein wichtiges Kennzeichen der Flächenkrümmung enthält. Aber durch den Wert dieses Krümmungsmasses ist die Flächen-

178) Math. Ann. 39 (1891), p. 201.

178a) Paris, Bull. Soc. Philomat. 7 (1870), p. 49; *Ch. Brisse*, Ann. éc. norm. (2) 3 (1874), p. 144; *E. Cosserat*, Toulouse, Mém. (9) 7 (1895), p. 373.

krümmung nicht völlig bestimmt, und man hat auch die mittlere Krümmung (Nr. 5) als das Krümmungsmass ansehen wollen[178b]). Demgegenüber ist zu bemerken, dass es für eine Fläche überhaupt keinen Ausdruck geben kann, der dem für die Krümmung einer Kurve völlig entsprechend und zugleich erschöpfend wäre. Es lassen sich vielmehr von verschiedenen Gesichtspunkten aus für die Flächenkrümmung mehr oder minder kennzeichnende Ausdrücke aufstellen, die ebenfalls als Grenzwerte anzusehen sind.

Wir erwähnen zunächst den dem *Gauss*'schen Krümmungsmass entsprechenden Ausdruck, falls anstatt der Normalen der Fläche die Tangenten einer einfach unendlichen Kurvenschar auf der Fläche genommen werden. Hier bildet man die Flächenpunkte mittelst der den Tangenten parallelen Radien der Einheitskugel auf letztere ab und das Verhältnis des Kugeloberflächenelements zum entsprechenden Element der Fläche ist der fragliche Ausdruck. Für eine Kurvenschar, deren Einzelkurven die zu R_1 gehörenden Krümmungslinien unter dem Winkel φ schneiden, erhält in den in Nr. 12 erklärten Bezeichnungen der fragliche Ausdruck die Form[179]):

$$\frac{\sin\varphi}{l_1 R_2} + \frac{\cos\varphi}{l_2 R_1},$$

für die Orthogonalschar aber die Form:

$$\frac{-\sin\varphi}{l_2 R_1} + \frac{\cos\varphi}{l_1 R_2}.$$

34. Das Casorati'sche Krümmungsmass und ihm verwandte Krümmungsmasse. Wir erwähnen ferner das *Casorati*'sche Krümmungsmass[180]). Man denke sich um einen regulären Flächenpunkt (P) in der Tangentialebene einen unendlich kleinen Kreis mit dem Halbmesser ds beschrieben. Jedem Radius dieses Kreises entspricht eine Nachbarnormale und wenn man den Winkel τ, den eine solche mit der Normalen in (P) bildet, von (P) aus auf dem entsprechenden Radius aufträgt, entsteht eine neue geschlossene Fläche mit dem Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tau^2 d\alpha,$$

wo α den Winkel des Radius mit einer festen Tangentialrichtung be-

178b) *Sophie Germain,* J. f. Math. 7 (1831), p. 1.

179) *v. Lilienthal,* Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 11 (1902), p. 43.

180) Acta math. 14 (1890), p. 95. (III D 1, 2, Fussn. 254, p. 99.)

deutet. *Casorati* bezeichnet das Verhältnis des letzten Flächeninhalts zum ersten als Krümmungsmass und erhält so den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right).$$

Anstatt des Winkels τ kann man den Winkel zweier zu den Endpunkten von ds gehörender Tangenten einer Schar von Flächenkurven nehmen. Für die zu R_1 (R_2) gehörenden Krümmungslinien erhält man so die Ausdrücke:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_1^2}+\frac{1}{K_2^2}+\frac{1}{R_1^2}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_1^2}+\frac{1}{K_2^2}+\frac{1}{R_2^2}\right),$$

wo unter $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$ die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien verstanden sind. — Man kann aber auch statt τ den Winkel nehmen, den die konjugierten Tangenten der zu den Endpunkten von ds gehörenden Tangenten der Schar miteinander bilden. Für eine Schar, deren konjugierte Tangenten unter einem konstanten Winkel die Krümmungslinien schneiden, erhält man den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_1^2}+\frac{1}{K_2^2}\right).$$

Für eine Schar, deren Einzelkurven selbst unter konstantem Winkel gegen die Krümmungslinien geneigt sind, ergeben sich verschiedene Ausdrücke, je nachdem die Fläche positiv oder negativ gekrümmt ist[181]).

IX. Weitere Sätze über Krümmungslinien, Haupttangentenkurven und konjugierte Linien.

35. Krümmungslinien. 1) Man betrachte in einer Ebene einen Punkt (O) und eine Kurve (C). Die Entfernung eines Punktes (P) der Kurve von (O) sei ϱ. Der Abstand des Punktes (O) von der zu (P) gehörenden Kurventangente sei ω. *Euler* fand, dass der Ausdruck $\varrho\frac{d\varrho}{d\omega}$ den zu (P) gehörenden Krümmungsradius der Kurve (III D 1, 2, Nr. **14**) darstellt. Der entsprechende Satz für eine Fläche wurde von *P. Serret* gefunden[182]). Hier ist eine Krümmungslinie zu betrachten, unter ϱ und ω ist der Abstand eines festen Punktes von einem Punkte der Krümmungslinie und der zugehörigen Tangentialebene der Fläche zu verstehen. Der Ausdruck $\varrho\frac{d\varrho}{d\omega}$ wird dann gleich dem der Krümmungslinie zugehörenden Hauptkrümmungsradius.

---

181) *v. Lilienthal,* Acta math. 16 (1892), p. 148.

182) Par. C. R. 84 (1877), p. 543.

2) Es gibt zwei einfache Punkttransformationen, mit Hülfe derer man aus einer gegebenen Fläche eine zweite so herleiten kann, dass die Krümmungslinien der letzteren denen der ersteren entsprechen. Die erstere ist die sogenannte Dilatation (III B 2), d. h. Übergang zu einer Parallelfläche, die zweite ist die Transformation mittels reziproker radii vectores[183]) (III A 7). Eine verwickeltere hierher gehörende Transformation zeigte *A. Ribaucour*[184]). Ein besonderer Fall derselben ist die *Laguerre*'sche Transformation durch reziproke Richtungen[185]) (III B 2). Wir weisen endlich auf die *Lie*'sche Transformation hin, welche Krümmungslinien in Haupttangentenkurven überführt und umgekehrt[186]) (III D 7). — Eine Abbildung einer Fläche auf eine feste Kugel, mittels welcher das System der Krümmungslinien durch ein rechtwinkliges Kurvensystem abgebildet wird, zeigten *Bonnet* und *Darboux*[187]). Man nehme eine Kugel, die sowohl die gegebene Fläche wie die feste Kugel berührt und betrachte die Berührungspunkte als einander entsprechend.

3) Wenn die gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen sowohl die eine wie die andere längs je einer Krümmungslinie berühren, so ist die Entfernung je zweier Berührungspunkte in derselben Tangentialebene konstant. Berühren die Tangentialebenen einer Fläche längs einer Krümmungslinie zugleich eine Kugel, so ist die Krümmungslinie sphärisch[188]). Eine Krümmungslinie, deren geodätische Krümmung konstant ist, liegt auf einer Kugel, die die Fläche senkrecht schneidet[189]).

4) Aus dem *Euler*'schen Satz: $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$ (Nr. **1**), folgt für eine positiv gekrümmte Fläche, wenn $R_1 > R_2$, dass stets $R_1 \geqq \varrho \geqq R_2$. Bei einer negativ gekrümmten Fläche möge $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ angenommen werden. Jetzt hat man für ein positives ϱ die Ungleichung: $R_1 \leqq \varrho$, für ein negatives ϱ die Ungleichung: $\varrho \leqq R_2$, sodass hier R_1

183) „*Darboux*" 1, p. 208; „*Bianchi*" p. 111; *J. Weingarten,* Inaug.-Diss. Berlin 1864, p. 13.

184) Paris, C. R. 70 (1870), p. 330.

185) Paris, C. R. 92 (1881), p. 71. Im selben Bande p. 286 eine weitere Transformation von *Darboux.*

186) Math. Ann. 5 (1872), p. 177; *Cyp. Stéphanos,* Paris, C. R. 92 (1881), p. 1195. Vgl. die Darstellung bei „*Darboux*" 1, p. 230, 249; 4, p. 171 und *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geometrie 1, p. 217 ff.

187) *Bonnet,* Paris, C. R. 37 (1853), p. 529; *Darboux,* Paris, C. R. 94 (1882), p. 158. Vgl. III D 6 a, Nr. **11**, Fussn. 106.

188) *Beltrami,* Giorn. di mat. 2 (1864), p. 305.

189) *Cesàro,* Lezioni di Geom. intrins., p. 173, deutsche Ausgabe p. 222; *U. Dini,* Soc. it. Sci. Mem. (3) 2 (1869), p. 135; „*Darboux*" 3, p. 121. 122.

ein Minimum, R_2 ein Maximum ist. Die beiden äussersten Werte von ϱ gehören nun ausschliesslich zu den Hauptnormalschnitten, jeder andere zulässige Wert von ϱ gehört zu zwei Normalschnitten, die symmetrisch zu den Hauptnormalschnitten (Nr. 1) liegen. Diese Verhältnisse finden einen bezeichnenden Ausdruck in dem Verhalten der die Fläche in dem betrachteten Punkt (P) berührenden Kugeln. Nehmen wir den fraglichen Punkt zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen z-Axe mit der Flächennormalen zusammenfällt, während die x- und y-Axe von den Tangenten der zu R_1 und R_2 gehörenden Krümmungslinien gebildet werden, so erhält die Flächengleichung für hinreichend kleine Werte von x und y die Gestalt:

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Betrachten wir nun eine Kugel mit dem Halbmesser (r), welche die Fläche in (P) berührt. Dann besitzt die senkrechte Projektion der Schnittkurve von Fläche und Kugel auf die Tangentialebene die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right) x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) y^2 + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Hiernach ist (P) ein isolierter Punkt der Schnittkurve, wenn r keinem der zulässigen Werte von ϱ gleich ist. Er ist eine Spitze der Schnittkurve, wenn r mit R_1 oder R_2 zusammenfällt. Er ist endlich ein Doppelpunkt der Schnittkurve, wenn r einen der sonstigen zulässigen Werte von ϱ besitzt. Die beiden durch den Doppelpunkt gehenden Tangenten der Schnittkurve liegen in den Normalschnitten mit der gleichen Krümmung $\frac{1}{\varrho}$. Die mit R_1 und R_2 als Radien beschriebenen Kugeln sind demnach die einzigen des betrachteten Kugelbüschels, die die Fläche noch in einem benachbarten und zwar auf der einen oder anderen Krümmungslinie gelegenen Punkte berühren, sie bilden ein Analogon zu den Haupttangenten (Nr. 1), die ebenfalls eine Berührung zweiter Ordnung mit der Fläche besitzen[190]).

5) *J. A. Serret*[190a]) bemerkte bei der Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen eine durch eine Gleichung von der Form:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z) = \text{const.}$$

dargestellte Flächenschar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört, dass man die Krümmungslinien der durch die Gleichungen

---

190) *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geometrie 1, p. 222. Vgl. die *Darboux*'sche Untersuchung über oskulierende Flächen zweiter Ordnung, Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 356.

190a) J. de math. (1) 12 (1847), p. 241. Vgl. III D 6 b.

$xyz =$ const. und $xy =$ const. z dargestellten Flächen bestimmen könne. Eine Fortführung dieser Untersuchungen mit Anführung zahlreicher Einzelfälle gab *Darboux* (Par. C. R. 84 (1877), p. 383) und bestimmte ferner die Krümmungslinien der durch die Gleichungsform:

$$x^m y^n z^p = \text{const.}$$

dargestellten Flächen[190b]).

36. Haupttangentenkurven. 1) Sie gehen durch projektive Transformation und durch Transformation mittelst reziproker radii vectores wieder in Haupttangentenkurven über[191]).

2) Die Normalkrümmung der orthogonalen Trajektorien der Haupttangentenkurven ist gleich der mittleren Krümmung (Nr. 5) der Fläche.

3) Eine ebene oder geodätische Haupttangentenkurve ist stets eine gerade Linie[192]).

4) Schliessen wir den Fall einer geraden Haupttangentenkurve aus und betrachten den durch den Punkt (P) einer negativ gekrümmten Fläche gelegten Tangentialschnitt. *J. M. de la Gournerie*[193]) zeigte, dass die beiden Zweige dieses Schnitts von den durch (P) gehenden Haupttangentenkurven im allgemeinen nur in der ersten Ordnung berührt werden. *Beltrami*[194]) fügte den Satz hinzu, dass der Halbmesser der ersten Krümmung der berührenden Haupttangentenkurve zwei Drittel des Krümmungshalbmessers des Schnitts beträgt. Dies veranlasste *Bonnet*[195]) zur Betrachtung einer beliebigen Kurve, die in einem Punkt eine Haupttangentenkurve so berührt, dass ihre Schmiegungsebene mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt. Bezeichnet man die erste und zweite Krümmung der fraglichen Kurve im betrachteten Punkt mit $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$, mit $\frac{1}{\varrho_0}$ die erste Krümmung der berührenden Haupttangentenkurve, so findet *Bonnet*:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)}{1 - \frac{\sqrt{-R_1 R_2}}{\tau}},$$

woraus sich der *Beltrami*'sche Satz für $\frac{1}{\tau} = 0$ ergibt. Weiter teilt

190b) Ann. éc. norm. (2) 7 (1878), p. 227 und Leçons 1, p. 196. Über die Bestimmung von Krümmungslinien siehe ferner *A. Ribaucour,* Par. C. R. 74 (1872), p. 1489, 1570; *Th. Caronnet,* Par. soc. math. Bull. 20 (1892), p. 91.

191) *E. Picard,* Traité d'anal. 1, Paris 1891, p. 408. Vgl. III D 6a, Nr. **10**.

192) *A. Enneper,* Gött. Nachr. 1870, p. 499.

193) J. de math. (2) 3 (1858), p. 73.

194) Nouv. Annal. (2) 4 (1865) p. 258.

195) ibid. p. 267.

Bonnet eine Gleichung mit, welche die Grösse $\frac{1}{\varrho_0}$ durch R_1 und R_2 und deren Ableitungen nach den Bogenlängen der Krümmungslinien ausdrückt. Einen Beweis der *Bonnet*'schen Formeln findet man bei „*Darboux*" 2, p. 396. Vgl. *Ch. Brisse*, J. éc. polyt. cah. 53 (1883), p. 217, 233.

5) Die Gleichungen, welche die geodätischen Krümmungen der Haupttangentenkurven und ihrer orthogonalen Trajektorien mit den Normal- und geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien verbinden, hat *v. Lilienthal* in den Math. Ann. 42 (1893), p. 520 aufgestellt.

6) *G. Koenigs* zeigte[196]), dass, wenn die Haupttangentenkurven von einem beliebigen Punkt aus auf eine Ebene projiziert werden, die Projektionskurven ein sogenanntes System mit gleichen *Laplace*'schen („*Darboux*" 2, p. 23) Invarianten bilden, d. h. die Koordinaten der Punkte der Projektionskurven, betrachtet als Funktionen der Parameter u und v, genügen einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial\vartheta}{\partial u}+b\frac{\partial\vartheta}{\partial v}=0,$$

in welcher $\frac{\partial a}{\partial u}=\frac{\partial b}{\partial v}$.

7) Hinsichtlich der Bestimmung der Haupttangentenkurven gab *Darboux* den Satz (Bull. math. astr. 1 (1870), p. 355; Leçons 1, p. 142, daselbst Litteratur), dass man die Differentialgleichung der fraglichen Kurven auf den durch die Gleichungen:

$$x=A\,(u-a)^m\,(v-a)^n,\qquad y=B\,(u-b)^m\,(v-b)^n,$$
$$z=C\,(u-c)^m\,(v-c)^n$$

dargestellten Flächen durch Quadraturen integrieren kann. Dasselbe gilt für die von *V. Jamet* (Ann. éc. norm. (3) 4 (1887), suppl., p. 50) betrachteten Flächen, die durch eine Gleichung von der Form:

$$f_1(L,M)=f_2(N,P)$$

gegeben werden, wo f_1 und f_2 homogene ganze Funktionen vom selben Grade, und L, M, N, P lineare ganze Funktionen der Koordinaten bedeuten. Der Beweis vereinfacht sich durch die *E. Picard*'sche Bemerkung (Traité d'Anal., Paris 1891, p. 408), dass die fraglichen Flächen zu den durch die Gleichungsform: $xf\left(\frac{y}{x}\right)=F(z)$ dargestellten gehören, deren Haupttangentenkurven leicht mittelst Quadraturen ermittelt werden können. Die Bestimmung der Haupttangentenkurven,

196) Par. C. R. 114 (1892), p. 55; vgl. ibid. p. 728 u. „*Darboux*" 4, p. 33. Vgl. III D 6 a, Nr. 10.

Krümmungslinien und Minimalkurven (III D 1, 2, Nr. **12**) durch Quadraturen ist möglich bei den von *F. Klein* und *S. Lie* betrachteten Flächen, die bei gewissen projektiven infinitesimalen Transformationen invariant bleiben, namentlich bei den Flächen mit der Gleichungsform:

$$z = x^{\frac{\gamma}{\alpha}} f\left(\frac{y^\alpha}{x^\beta}\right),$$

den Schraubenflächen und den Spiralflächen[196a]). (III D 5, Nr. **5**, **7**; III D 6 a, Nr. **10**.)

37. Konjugierte Linien. 1) Leitet man aus einer gegebenen Fläche durch eine projektive Transformation oder durch die Transformation mittels reziproker Radien eine zweite Fläche her, so gehen konjugierte Kurvenscharen in eben solche über[197]).

2) *Ribaucour*'scher Satz. Man denke sich die Flächenpunkte als Mittelpunkte von Kugeln, deren Halbmesser sich stetig ändern. Die zum Punkt (P) gehörende Kugel wird von den ihr unendlich benachbarten in zwei Punkten (P', P'') geschnitten, deren Verbindungslinie (L) auf der zu (P) gehörenden Tangentialebene senkrecht steht und die zu (P) gehörende *Berührungssehne* (*corde de contact*) genannt wird. Diese Sehnen erzeugen ein Strahlensystem. Die durch (L) gehenden Brennebenen des Systems stehen auf jener Tangentialebene senkrecht. Fällt man von (P) aus Lote auf diese Ebene, so erhält man konjugierte Tangenten[198]). Wenn γ den Winkel des Radius PP' mit der Flächennormalen und R den Radius der Kugel bedeutet, besteht die Gleichung: $\sin^2\gamma = \Delta_1 R$.[199]) *Darboux* stellte diesem Satz den folgenden an die Seite: Die in (P') und (P'') berührenden Tangentialebenen der fraglichen Kugel schneiden sich in einer Geraden (L_1), die in der zu (P) gehörenden Tangentialebene der Fläche liegt. Die Geraden (L_1) erzeugen ein Strahlensystem. Verbindet man (P) mit den in (L_1) liegenden Brennpunkten dieses Systems, so erhält man ebenfalls konjugierte Tangenten[200]).

3) Zwei beliebige Raumkurven besitzen eine doppelt unendliche Schar von Sehnen, die je einen Punkt der einen Kurve mit je einem Punkt der anderen verbinden. Denkt man sich jede dieser Sehnen

---

196a) *Lie-Scheffers*, Vorl. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891, p. 254—261. Daselbst Litteratur. Siehe auch die hierher gehörende flächentheoretische Anwendung allgemeiner *Lie*'scher Sätze über die Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung in dem genannten Werk, p. 169—187.

197) „*Darboux*" 1, p. 118.

198) J. de math. (4) 7 (1891), p. 47. Die Arbeit stammt aus dem Jahre 1876.

199) „*Darboux*" 3, p. 350.

200) „*Darboux*" 2, p. 325.

im Schnittverhältnis λ geteilt, so bilden die Teilpunkte auf allen Sehnen, die von ein- und demselben Kurvenpunkte ausgehen, eine Kurve. Zu den Punkten jeder der beiden Kurven gehört so je eine einfach unendliche Kurvenschar. Beide Scharen liegen auf derselben Fläche und sind konjugiert[200a]).

4) *K. Peterson*[201]) zeigt, wie jeder festen Richtung des Raumes auf einer gegebenen Fläche ein System konjugierter Linien entspricht. Man betrachte die jener Richtung parallelen Geraden als Lichtstrahlen, die von einer unendlich fernen Lichtquelle ausgehen (s. auch III D 1, 2, Nr. **37**). Ein auf der Fläche stehender Beobachter wirft auf die Tangentialebene einen Schatten von bestimmter Grösse und Richtung. Bewegt er sich so, dass er immer der Richtung seines Schattens folgt, so beschreibt er eine *Schattenlinie*, hingegen eine *Lichtlinie*, wenn während seiner Bewegung die Grösse des Schattens sich nicht ändert. Längs einer Lichtlinie (in der darstellenden Geometrie (III A 6) *Isophote*)[201a]) fallen die Strahlen unter sich gleichbleibendem Winkel ein, beleuchten also die Fläche gleich stark. Schattenlinien und Lichtlinien sind konjugiert. — Ein Satz von *O. Böklen*[202]) ordnet auch jeder festen Geraden ein konjugiertes System auf einer Fläche zu. Die eine Schar wird von den Ebenen des Büschels, dessen Axe die Gerade ist, aus der Fläche ausgeschnitten, die andere besteht aus den Berührungskurven der Tangentialkegel, die von den Punkten der Geraden aus an die Fläche gelegt sind.

5) Mit einem System konjugierter Kurvenscharen hängt der von *Voss* aufgestellte Begriff der „Parameterkrümmung" zusammen[203]) (I B 2, Nr. **21**). Betrachten wir ein beliebiges System von Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Den Wertsystemen u, v; $u + \Delta u, v$; $u, v + \Delta v$; $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ entsprechen vier Punkte auf der Fläche, P, P_1, P_2, P_3, die wir als die Eckpunkte eines Tetraeders auffassen, dessen Inhalt mit T bezeichnet werde. Ordnet man die Punkte einer der beiden, sich im Punkte (P) kreuzenden, Parameterlinien den Punkten der anderen zu, indem man etwa setzt:

$$\Delta u = h\Delta t + h'\Delta t^2 \ldots, \quad \Delta v = k\Delta t + k'\Delta t^2, \ldots$$

und lässt Δt nach Null hin abnehmen, so wird T, falls die Parameter-

200a) *A. Ribaucour,* Bruxelles, Mém. 44 (1880); Étude des élassoides, p. 16.

201) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 22.

201a) *L. Burmester,* Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen, Leipzig 1875.

202) Analytische Geom. des Raumes, Stuttgart, 2. Aufl. 1884, p. 69; vgl. „*Darboux*" 1, p. 112.

203) Math. Ann. 39 (1891), p. 179.

linien nicht konjugiert sind, von der vierten Ordnung, anderenfalls von der sechsten Ordnung unendlich klein. Dividieren wir daher T durch das Quadrat der Bogenlänge PP_3 und das Quadrat des Flächen inhalts des Vierecks $PP_1P_2P_3$, so erhalten wir für konjugierte Parameterlinien einen endlichen Grenzwert. Das 72-fache dieses Grenzwertes nennt *Voss* die „Parameterkrümmung" der Fläche nach der Richtung $du:dv$, bezogen auf das Grunde gelegte konjugierte System. Ist für dieses:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v},$$

so erhält die Parameterkrümmung den Ausdruck:

$$\frac{D'\left(\frac{\partial B}{\partial u} - BB_1\right)du^2 + D''\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1\right)dv^2}{\sqrt{EG-F^2}\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)}.$$

Hinsichtlich der Parameterkrümmung gelten ähnliche Sätze wie für die Normalkrümmung. In zwei zu einander senkrechten Normalschnitten erreicht sie ihren grössten und kleinsten Wert, ebenso besitzt sie im allgemeinen in zwei Normalschnitten den Wert Null. Die beiden Grössen $\frac{\partial B}{\partial u} - BB_1$ und $\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1$ — die Invarianten obiger Differentialgleichung — sind, wie *Voss* zeigt, den projektiven Transformationen der Fläche gegenüber absolute Invarianten. Auch das dualistische Analogon der Parameterkrümmung bei Anwendung von Ebenenkoordinaten ist von *Voss* definiert. Sind die Invarianten einander gleich, so fällt bis auf einen nur vom Wertsystem u, v abhängenden Faktor die Parameterkrümmung mit der Normalkrümmung zusammen.

Eine andere notwendige und hinreichende Eigenschaft konjugierter Scharen mit gleichen Invarianten leitet *Darboux*[204]) in Erweiterung eines *Königs*'schen Satzes über ebene Kurvenscharen her. Sie lässt sich so aussprechen: Konstruiert man längs zweier sich in einem Punkte (P) schneidender Kurven der Scharen die die Fläche berührenden, abwickelbaren Flächen und fasst man auf den Gratlinien dieser Flächen die beiden dem Punkte (P) entsprechenden Punkte sowie jedesmal zwei diesen benachbarte Punkte ins Auge, so liegen die betrachteten sechs Punkte auf einem Kegelschnitt. Auch das dualistische Analogon dieses Satzes wird von *Darboux* mitgeteilt.

---

204) „*Darboux*" 4, p. 34; *G. Königs,* Par. C. R. 114 (1892), p. 55.

X. Weitere besondere Kurven.

38. Geodätische Kreise. Obgleich man vielfach mit dem Namen *geodätische Kreise* die Kurven belegt (Nr. 15), welche die von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien senkrecht schneiden (*Bianchi*'sche Bezeichnung), wollen wir hier unter einem *geodätischen Kreis* eine Kurve verstehen, deren geodätische Krümmung sich längs ihrer nicht ändert (*Darboux*'sche Bezeichnung). Wickelt man die abwickelbare Fläche, die die gegebene Fläche längs eines geodätischen Kreises berührt, auf eine Ebene ab, so geht der geodätische Kreis in einen wirklichen Kreis über[205]. — *F. Minding*[206] bemerkte, dass ein auf einer Fläche gespannter Faden von gegebener Länge, auf den eine konstante, zu ihm und der Flächennormale senkrechte Kraft wirkt, die Gestalt eines geodätischen Kreises besitzt. — Besteht ein Orthogonalsystem aus geodätischen Kreisen, so ist es isotherm. Nimmt man die Kurven eines solchen Systems zu Parameterlinien, so erhält das Quadrat des Linienelements die Form:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{[f(u) + \varphi(v)]^2}. \text{ [207]}$$

S. Lie bestimmte die Form des Quadrats des Linienelements der Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation (III D 6 a, Nr. 9; III D 7) gestatten. (*S. Lie* u. *G. Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, p. 133 ff.)

Darboux wandte die *Jacobi*'sche Methode der Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien auf die Gleichung der geodätischen Kreise an und führte die Bestimmung dieser Kreise für die Rotationsflächen auf Quadraturen, für die Spiralflächen (III D 5, Nr. 7) auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zurück (Par. C. R. 96 (1883), p. 54; „*Darboux*" 3, p. 152).

39. Kurven, deren Schmiegungskugeln die Fläche berühren. Die Differentialgleichung dieser Kurven — „*D*"-*Linien* — wurde von *Darboux* (Par. C. R. 73 (1871), p. 732) aufgestellt und integriert für die Flächen zweiten Grades und die Cykliden (III C 6)[208]. *A. Ribaucour* zeigte, dass jede Schmiegungsebene einer „*D*"-Linie aus der Fläche eine Kurve

205) *J. Steiner*, Par. C. R. 12 (1841), p. 479; J. f. Math. 24 (1842), p. 150 = Werke 2, Berlin 1882, p. 177.

206) J. f. Math. 86 (1879), p. 279.

207) „*Darboux*" 3, p. 154; „*Bianchi*" p. 176.

208) Vgl. *A. Enneper*, Göttinger Nachr. 1871, p. 577; *A. Pell*, Amer. Math. Soc. Trans. 1 (1900), p. 315.

ausschneidet, die im zugehörigen Flächenpunkt von ihrem Krümmungskreis hyperoskuliert wird (Par. C. R. 80 (1875), p. 642). Die sämtlichen derartigen zu einem Flächenpunkt gehörenden Kreise liegen nach *Darboux* auf einer Fläche zehnter Ordnung (Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 376). Von dem Umstand ausgehend, dass die Differentialgleichung der „D“-Linien vom zweiten Grade ist, entwickelte *E. Cosserat* durch Betrachtung homogener Integrale eine ähnliche Integrationstheorie dieser Gleichung, wie eine solche für die Gleichung der geodätischen Linien gilt (Toulouse Mém. (9) 7 (1895), p. 366; Paris C. R. 121 (1895), p. 43).

40. Äquidistante Kurvenscharen. Mit diesem Namen belegte *Voss*[209]) diejenigen Kurvenscharen, die zu Parameterlinien genommen die Form:

$$du^2 + dv^2 + 2du\,dv\cos\varphi$$

des Quadrats des Linienelements hervorbringen. Die Parameter u, v haben also die Bedeutung der Bogenlängen der Parameterlinien. Die Koordinaten der Fläche sind die Integrale des Systems:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}},$$

woraus unmittelbar folgt, dass auf einer Translationsfläche (III D 5, Nr. 6), d. h. auf einer Fläche, deren Koordinaten durch die Gleichungen

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v)$$

dargestellt sind, die Parameterlinien stets äquidistant ausfallen. *Voss* leitet für die Totalkrümmung eines Vierecks auf der Fläche, das von zwei Kurven der einen und zwei Kurven der anderen Schar eines äquidistanten Systems begrenzt wird, den Ausdruck her: $2\pi - A - B - C - D$, wo A, B, C, D die Winkel des Vierecks sind. Die Aufsuchung der äquidistanten Systeme fällt zusammen mit der *Tschebyscheff*'schen Aufgabe der Bekleidung einer Fläche[210]). Wir sahen früher (Nr. 25), dass für ein äquidistantes System die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\cos\varphi}{K_1} - \frac{\sin\varphi}{K_3} = 0, \quad \frac{\cos\varphi}{K_2} - \frac{\sin\varphi}{K_4} = 0.$$

Dies bedeutet geometrisch, dass die Tangenten der Kurven $v =$ const. ($u =$ const.) senkrecht sind zu den Verbindungslinien der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Kurven $u =$ const. ($v =$ const.) und

209) Math. Ann. 19 (1881), p. 1. Katalog math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente, hrsg. v. *W. v. Dyck,* München 1892, p. 16.

210) „*Darboux*“ 3, p. 133, 206. Vgl. III D 6 a, Nr. 12.

ihrer orthogonalen Trajektorien[211]) — und kinematisch, dass die Tangente einer Kurve $v = \text{const.}$ ($u = \text{const.}$) in ihre längs der Kurve $u = \text{const.}$ ($v = \text{const.}$) benachbarte Lage durch eine Drehung um die Tangente der Kurve $u = \text{const.}$ ($v = \text{const.}$) und Fortschreitung längs dieser Tangente übergeht.

41. Meridian- und Parallelkurven. Bewegt sich ein Punkt (P) einer Fläche so, dass sein sphärisches Bild einen Meridian beschreibt, so heisst seine Bahn eine *Meridiankurve* der Fläche, beschreibt sein sphärisches Bild einen Parallelkreis, so heisst seine Bahn eine *Parallelkurve* der Fläche. Orientiert man die Einheitskugel so, dass sich die Meridiane in der z-Axe schneiden und nennt, wie üblich (III A 6), die zur z-Axe senkrechten Schnitte der Fläche *Niveaulinien* (die orthogonalen Trajektorien derselben heissen *Linien grössten Falls*), so bestehen nach *Bonnet* die Sätze[212]): Ist eine geodätische Linie zugleich Meridiankurve, so schneidet sie die Niveaulinien unter gleichen Winkeln. Schneidet eine geodätische Linie die Niveaulinien unter gleichen Winkeln, so ist sie eine Meridiankurve. Schneidet eine Meridiankurve die Niveaulinien unter gleichen Winkeln, so ist sie eine geodätische Linie.

42. Isotherm-konjugierte Systeme. *Isotherm-konjugiert* wird nach *Bianchi* ein Kurvensystem genannt, wenn:

$$L = N, \quad M = 0.$$

Derartige Systeme sind nur auf positiv gekrümmten Flächen vorhanden, und man kann für sie ähnliche Formeln aufstellen, wie die *Lelieuvre*'schen für Haupttangentenkurven[213]). Auf die fraglichen Systeme machte zuerst *Voss* aufmerksam[214]), der auch zeigte, dass es auf einer negativ gekrümmten Fläche unzählig viele Kurvensysteme giebt, für die: $L = -N$, $M = 0$. Ebenso wies *Voss* die Bedeutung der fraglichen Systeme für eine projektive Umformung der Fläche nach.

---

211) *v. Lilienthal*, Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig 1896, p. 40.

212) J. de math. (2) 5 (1860), p. 168. Vgl. *A. Enneper*, Götting. Abh. 1882, p. 3.

213) „*Bianchi*“ p. 135 ff.

214) Math. Ann. 39 (1891), p. 197. Vgl. III D 6a, Nr. **10**, Fussn. 96; Nr. **33**, Fussn. 339.

(Abgeschlossen im August 1902.)

III D 4. BESONDERE TRANSCENDENTE KURVEN.

Von

G. SCHEFFERS

IN DARMSTADT.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

P. Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860. (Auch als Thèse, Paris 1859, mit derselben Paginierung, aber ohne Vorwort, Inhaltsverzeichnis und Anhang erschienen.)

L. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris 1873.

— Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876.

E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von *G. Kowalewski,* Leipzig 1901 (Übersetzung von: *E. Cesàro,* Lezioni di geometria intrinseca, Neapel 1896).

G. Loria, Spezielle algebraische und transcendente Kurven der Ebene, Theorie und Geschichte, deutsch von *F. Schütte,* Leipzig 1902*).

Ausserdem viel zerstreutes Material in den Lehr- und Übungsbüchern der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung (II A 2) und der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen (III D 1, 2).

Die Zeitschriftenlitteratur findet man in den Anmerkungen, daselbst auch einige Monographien über spezielle transcendente Kurven.

---

1. Einleitung. Eine Kurve in der Ebene, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten x, y *nicht* auf eine algebraische Form gebracht werden kann, heisst *transcendent.* Die Gesamtheit aller der-

---

*) Dem Entgegenkommen des Herrn Verfassers verdankten wir die Einsicht in dies Werk, mit dessen Reichhaltigkeit wir in Bezug auf die *ebenen* Kurven absolut nicht in Wettbewerb treten können, schon während seines Druckes. Bezüglich der *älteren Geschichte der ebenen transcendenten Kurven* verweisen wir grundsätzlich auf dies Buch, neben dem man *M. Cantor,* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1, Leipzig 2. Aufl. 1894; 2, 2. Aufl. 1900; 3, 2. Aufl. 1901, zu Rate ziehen möge.

jenigen Punkttransformationen der Ebene, die jede algebraische Kurve wieder in eine algebraische Kurve verwandeln, ist die Gruppe aller *algebraischen* Transformationen der Ebene [II A 6, Nr. **1**, **19**]. Daher gilt die Definition der transcendenten Kurven nicht nur für rechtwinklige Koordinaten x, y, sondern überhaupt für solche Punktkoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, die durch zwei in $x, y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ algebraische Gleichungen definiert werden, und ebenso für solche homogene Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, deren Verhältnisse zusammen mit x, y zwei algebraischen Gleichungen genügen, wie z. B. für allgemeine projektive Koordinaten [III B 2], während dagegen z. B. bei Benutzung von Polarkoordinaten der analytische Unterschied zwischen algebraischen und transcendenten Kurven verschwindet. Wendet man die Gruppe aller algebraischen Transformationen der Ebene auf die Gesamtheit *aller* ebenen Kurven an, so bilden die algebraischen Kurven für sich eine invariante Mannigfaltigkeit, ebenso die transcendenten.

Leibniz nannte insbesondere diejenigen Kurven *interscendent*, deren Gleichungen durch Nullsetzen von Polynomen in x, y mit irrationalen Exponenten hervorgehen[1]). Für die Raumkurven gilt Entsprechendes.

Während für die algebraischen Kurven natürliche Einteilungen (nach Ordnung, Klasse u. s. w.) vorhanden sind, fehlen sie bei den transcendenten Kurven. Dabei verdanken manche dieser Kurven ihr Bekanntsein dem Zufall. Die Benennung der transcendenten Kurven ist daher misslich, ebenso die Aufgabe, aus der grossen Zahl der transcendenten Kurven eine Auswahl zu treffen. Wollten wir alle einigermassen bekannten transcendenten Kurven erwähnen, so könnten wir bei dem knappen Raume nicht viel mehr als eine Sammlung von Definitionen geben. Da aber *G. Loria* in dem oben erwähnten Buche eine gründliche Zusammenstellung der bisherigen Arbeiten über *ebene* transcendente Kurven bietet, erscheint es uns richtig, nur gewisse Klassen solcher Kurven ausführlicher zu besprechen[2]), nämlich erstens Rollkurven (darunter die Cykloiden, Kreisevolventen und archimedischen Spiralen), zweitens die *W*-Kurven (darunter die logarithmischen Kurven und logarithmischen Spiralen, zu denen im Raume die gemeinen Schraubenlinien treten), drittens die Sinusspiralen und ihre Verallgemeinerungen (darunter die Kettenlinien und Traktricen). Unter diese drei Rubriken nämlich lassen sich wohl ziemlich alle wichtigeren ebenen transcendenten Kurven einreihen. Der vierte Abschnitt ist transcen-

1) Vgl. *L. Euler,* Introductio in analysin infinitorum 2, Lausannae 1748, p. 285, wo das Beispiel $y = x^{\sqrt{2}}$ besprochen wird.

2) Zum Teil ausführlicher als *G. Loria,* zum grösseren Teil aber weniger ausführlich als dieser.

denten Raumkurven gewidmet (*Bertrand*'sche Kurven, allgemeine Schraubenlinien, Loxodromen, Minimalkurven, tetraedrale Kurven), während wir im fünften Abschnitt mehrere nicht behandelte Kurven citieren und über Versuche zur Einteilung der transcendenten ebenen Kurven berichten.

Solche Familien transcendenter *ebener* Kurven, deren Gleichungen noch willkürliche Funktionen enthalten, berücksichtigen wir nicht, ebenso wenig Kurven, die nur zur Darstellung transcendenter Funktionen dienen sollen. Von den transcendenten *Raum*kurven betrachten wir nur solche, die unabhängig von Flächen definiert werden können.

Zeichnungen von ebenen transcendenten Kurven bietet das *Loria*'sche Buch in grösserer Anzahl.

I. Rollkurven.

2. Allgemeines. Die Bahnkurven der Punkte einer ebenen Figur, die sich stetig in ihrer Ebene bewegt, heissen *Rollkurven* (*Rouletten*), weil die Bewegung nach III D 1, 2, Nr. 17 und IV 3, Nr. 8 durch Rollen einer mit der Figur starr verbundenen *Polkurve* auf einer in der Ebene festen *Polbahn* erzeugt werden kann. An den angegebenen Stellen ist schon bemerkt, dass die Tangenten der Rollkurven in jedem Momente der Bewegung senkrecht zu den Geraden sind, die die beschreibenden Punkte mit dem *momentanen Drehpol*, d. h. dem Berührungspunkt von Polbahn und Polkurve, verbinden; ferner, dass die Aufgabe, die Krümmungsmittelpunkte der Rollkurven zu finden, auf die Aufgabe zurückkommt, sie für den Fall zu finden, dass Kreis auf Kreis rollt.

G. Ph. de la Hire[3]) zeigte zuerst, dass *jede* ebene Kurve als Rollkurve erzeugt werden kann. Wir beschränken uns auf solche Probleme der Bewegung, durch die man zu besonders wichtigen transcendenten Kurven geführt wurde.

3. Trochoiden, ihre Scheitel und Wendepunkte. Die Polbahn und die Polkurve seien Kreise. Dann heissen die Rollkurven *Trochoiden*[4]) und zwar *Epi-* oder *Hypotrochoiden*, je nachdem der rollende Kreis ausserhalb oder innerhalb des festen liegt[5])[6]). Algebraisch ist

3) Traité des roulettes, Paris Mém. 1706 [1707]. *E. Catalan*, Nouv. Ann. Math. (1) 15 (1856), p. 102—108, bewies überdies, dass man dabei die Polbahn beliebig in der Ebene der Kurve annehmen darf.

4) Trochoide (Rad- oder Scheibenlinie) nannte *P. de Roberval* die gemeine Cykloide (s. Nr. 6); vgl. *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 461.

5) Geschichtliches bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 479—481, *Hâton de la Goupillière*, L'Intermédiaire des math. 5 (1898), p. 234, 235, *E. Wölffing*, ebenda,

eine Trochoide nur dann, wenn das Verhältnis der Radien beider Kreise rational ist (ausserdem in dem trivialen Fall, dass der beschreibende Punkt die Mitte des rollenden Kreises ist).

Es sei: C Mitte, R Radius des festen Kreises, M Mitte, r Radius des rollenden Kreises. Dabei sei R stets >0, dagegen $r \gtrless 0$, je nachdem M und C auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des momentanen Drehpols O, des Berührungspunktes beider Kreise, liegen. Der beschreibende Punkt P habe von M den Abstand $a \gtrless 0$, je nachdem $r \gtrless 0$ ist. Der Krümmungsmittelpunkt K von P liegt auf OP und ist nach III D 1, 2, Nr. **17**, zu konstruieren. Liegt P insbesondere auf dem Umfang des rollenden Kreises, so liegt K auf der Polaren von P hinsichtlich des festen Kreises[7]). P beschreibt momentan einen *Wendepunkt*, wenn er auf demjenigen Kreis (*Wendekreis*) liegt, der in O den festen Kreis berührt und dessen Radius gleich $Rr : 2(R - r)$ ist[8]), wobei das Vorzeichen anzeigt, ob die Mitte des Wendekreises auf derselben oder auf der andern Seite von O liegt wie C. Ferner beschreibt P momentan einen *Scheitel* (vgl. III D 1, 2, p. 30), wenn P entweder auf der Centralen CM liegt (*Hauptscheitel*) oder auf dem Kreis (*Scheitelkreis*[9])) liegt, der in O den festen Kreis berührt und den Radius $3Rr : (4R - 2r)$ hat, wobei das Vorzeichen dieselbe Bedeutung wie vorhin hat (*Nebenscheitel*). Jede Trochoide hat Hauptscheitel, jede transcendente unendlich viele. Sie liegen auf zwei koncentrischen Kreisen um C, zwischen denen die Trochoide periodisch verläuft. Nur im Fall, wo P auf dem Umfang des Kreises (r) liegt, arten die auf dem einen dieser beiden koncentrischen Kreise liegenden Scheitel in Rückkehrpunkte aus, die auf dem

---

p. 235—238; ebenda 6 (1899), p. 11—12; Bibliotheca math. (3) 2 (1901), p. 235—259. Die Epicykloiden (siehe Nr. 5), die gewiss im Altertum schon bekannt waren (vgl. die Epicykeln des Ptolemäischen Weltsystems), kommen in einem speziellen Fall bei *A. Dürer* 1525 vor, dann bei *Desargues, De la Hire,* wo sie auch so genannt werden, *Euler* u. s. w.

6) Rotiert ein Punkt P gleichförmig um einen Punkt U, der seinerseits gleichförmig um einen festen Punkt C rotiert, so beschreibt er eine Trochoide. Siehe *G. J. Verdam,* Arch. Math. Phys. (1) 11 (1848), p. 18—20. Vgl. Nr. 4.

7) *W. Zehme,* Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cykloiden, Iserlohn und Elberfeld 1854, insbes. p. 16.

8) Siehe IV 3, p. 211, Fussnote 88, ausserdem: *Ch. Bresse,* J. éc. pol. cah. 35 (1853), p. 89—115, insbes. p. 99.

9) Der Scheitelkreis und die Centrale CM bilden zusammen eine durch die imaginären Kreispunkte gehende Kurve dritter Ordnung. Diese Kurve für den Fall beliebiger Polkurven bei *L. Burmester,* Civiling. 23 (1877), p. 227—250, insbes. p. 241. Vgl. auch IV 3, Nr. 8.

Umfang des festen Kreises liegen und deren Tangenten Radien des festen Kreises sind. Die von C nach den Hauptscheiteln gehenden Geraden sind Symmetriegeraden der Trochoide (s. Fig. 1)[10]. Nicht

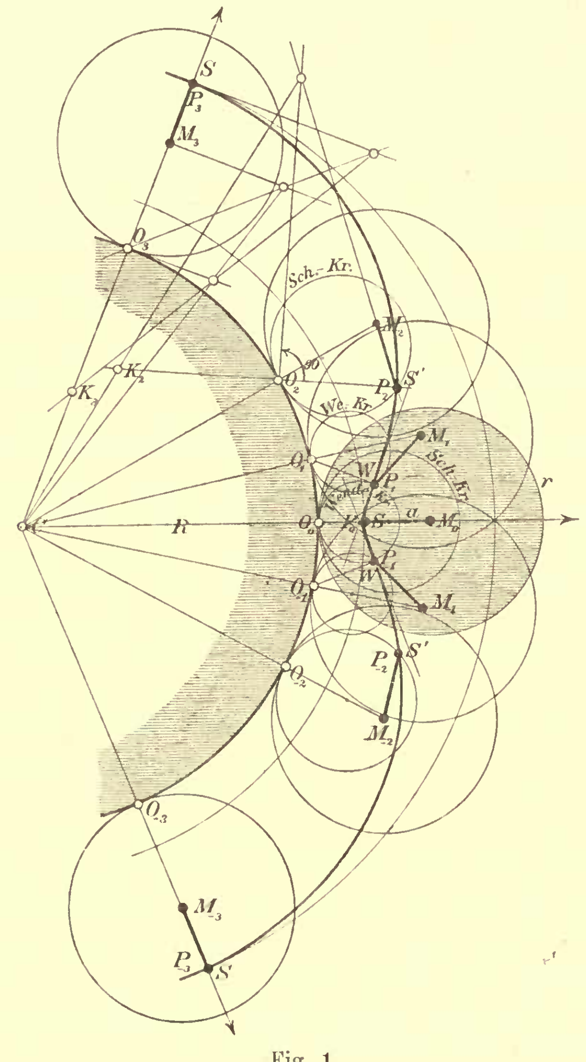


Fig. 1.

alle Trochoiden haben Nebenscheitel. Insbesondere giebt es Trochoiden, bei denen zwei Nebenscheitel in einen Hauptscheitel zusammenfallen, sodass der Krümmungskreis dort sechspunktig berührt.

10) Hierin sind die Wendepunkte mit W, die Hauptscheitel mit S, die Nebenscheitel mit S' bezeichnet. Zugleich ist angegeben, wie man zu einem

Die Bewegung werde von der Anfangslage (M_0, P_0, O_0) aus vorgenommen, bei der P_0 auf der Centralen CM_0 liegt und zwar in derjenigen der beiden möglichen Stellen, die näher bei O_0 ist, sodass $\overline{M_0 P_0}$ und $\overline{M_0 O_0}$ denselben Sinn haben. Beim Abrollen sei φ bezw. ψ der zum abgerollten Bogen des Kreises (R) bezw. (r) gehörige

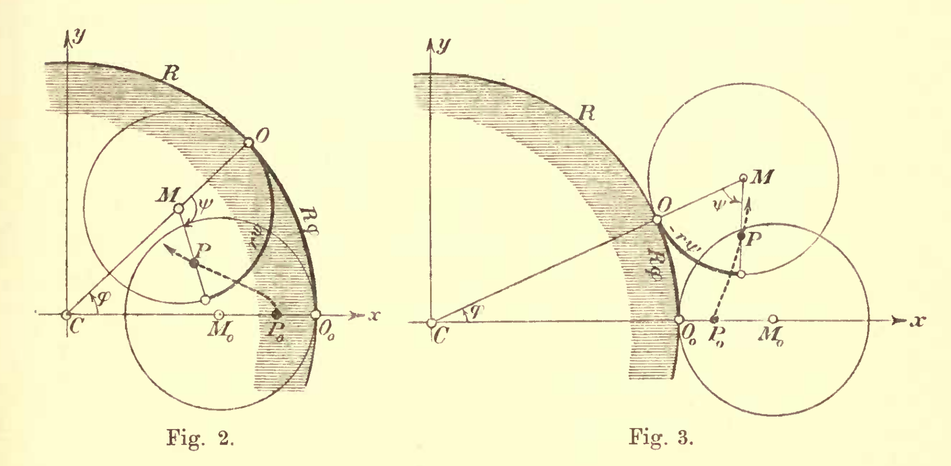


Fig. 2. Fig. 3.

Centriwinkel, gemessen mit Vorzeichen unter Rücksicht auf den positiven Drehsinn der Ebene. Stets ist (vgl. Fig. 2 für $r > 0$, wobei $\psi < 0$, und Fig. 3 für $r < 0$, wobei $\psi > 0$ ist):

$$R\varphi = -r\psi \quad \text{oder} \quad \psi = -\frac{R}{r}\varphi.$$

Ist die Ebene die komplexe Zahlenebene[11]), C der Nullpunkt, CO_0 die positive reelle Axe, so gehört zur Mitte M die Zahl $(R - r)e^{i\varphi}$. Die Richtung von MP geht im Fall $r > 0$ durch die Drehung $\varphi + \psi$, im Falle $r < 0$ durch die Drehung $\varphi + \psi - \pi$ aus der Richtung CO_0 hervor, sodass, da $a \gtrless 0$ mit $r \gtrless 0$ ist, in jedem Falle zu P die Zahl

$$x + iy = (R - r)e^{i\varphi} + ae^{i(\varphi + \psi)}$$

oder

$$(1) \qquad x + iy = (R - r)e^{i\varphi} + ae^{i\frac{r-R}{r}\varphi}$$

---

beliebigen Punkt (P_2) den Krümmungsmittelpunkt (K_2) findet und wie sich diese Konstruktion modifiziert, wenn der Kurvenpunkt (P_3) auf der zugehörigen Centralen (CM_3) gelegen ist (s. III D 1, 2, Nr. **17**). Dabei ist nur noch zu sagen, dass in O_3, M_3, P_3 Lote zur Centralen CP_3 gezogen werden, während die andere Gerade durch O_3 beliebig ist.

11) Die komplexe Zahlenebene (vgl. I A 4, p. 155) benutzt *E. Françoise,* Atti Istituto Venet. (4) 1 (1872), p. 430—436, *F. Morley,* Amer. J. of math. 16 (1894), p. 188—204, und *F. Schilling,* Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 214—227.

gehört. Also sind:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = (R-r)\cos\varphi + a\cos\dfrac{r-R}{r}\varphi, \\ y = (R-r)\sin\varphi + a\sin\dfrac{r-R}{r}\varphi \end{cases}$$

die Gleichungen der Trochoide, ausgedrückt mittels des Parameters φ.

4. Verschiedene Arten der Erzeugung von Trochoiden. Aus (1) folgt die eigentlich schon von *G. J. Verdam* 1848, vgl. Anm. 6, bemerkte, alsdann ausdrücklich von *G. Bellermann*[12]) angegebene Art der Erzeugung:

Bewegt sich ein *Gelenkparallelogramm* so, dass eine Ecke C fest bleibt, während sich die beiden anliegenden Seiten CU und CV mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten α und β um C drehen, so beschreibt die vierte Ecke P eine allgemeine Trochoide [IV 3, Nr. 23, 24]. Ist nämlich $CU = u$, $CV = v$ und liegen u und v zu Anfang über einander auf der positiven reellen Axe, so liegt P zur Zeit t an der Stelle, die die Zahl

$$(3)\qquad x + iy = ue^{i\alpha t} + ve^{i\beta t}$$

darstellt. Setzt man t proportional φ, so lässt sich diese Gleichung mit (1) leicht identifizieren[13]).

Aber dies ist auf *zwei* Arten möglich: Entweder giebt man R, r, a die aus

$$R_1 - r_1 = u, \quad a_1 = v, \quad \frac{r_1}{r_1 - R_1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

folgenden Werte R_1, r_1, a_1 oder die aus

---

12) Epicykloiden und Hypocykloiden, Jenenser Diss., Berlin 1867. *G. Bellermann* betrachtet auch die durch Addition von analogen Gliedern zu den Gliedern in (1) hervorgehenden *Cykloiden höherer Ordnung*, die dann von *C. Eichler*, Hamburg math. Ges. Mitt. 2, 2 (Festschrift 1890), p. 92—105, durch gegliederte Polygone erzeugt worden sind, wobei die komplexe Zahlenebene benutzt wird. Vgl. auch *L. Raabe*, J. f. Math. 1 (1826), p. 289—301, wo die Hypothese des Ptolemäischen Weltsystems (Epicykeln) untersucht wird.

13) *E. Eckardt*, Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 129—134, erzeugt die Epi- und Hypocykloiden (s. Nr. 5), indem er zwei Punkte auf einem Kreis mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten rotieren lässt. Die Verbindende beider Punkte umhüllt, wie analytisch gezeigt wird, die Kurve, der Berührungspunkt teilt die Verbindende im Verhältnis der Geschwindigkeiten. Dieselbe Erzeugung dann synthetisch bei *L. Kiepert*, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 129—146; für Trochoiden verallgemeinert bei *E. Eckardt*, a. a. O., ferner ebenda 18 (1873), p. 319—323. Siehe auch *J. Wolstenholme*, Lond. Math. Soc. Proc. 4 (April 1873), p. 321—327, der daraus die nachher zu besprechende doppelte Erzeugung der Epi- und Hypocykloiden durch Rollen ableitet.

$$R_2 - r_2 = v, \quad a_2 = u, \quad \frac{r_2 - R_2}{r_2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

folgenden Werte R_2, r_2, a_2. *Jede Trochoide kann also auf zwei Arten durch Abrollen eines Kreises auf einem festen Kreise erzeugt werden*[14].

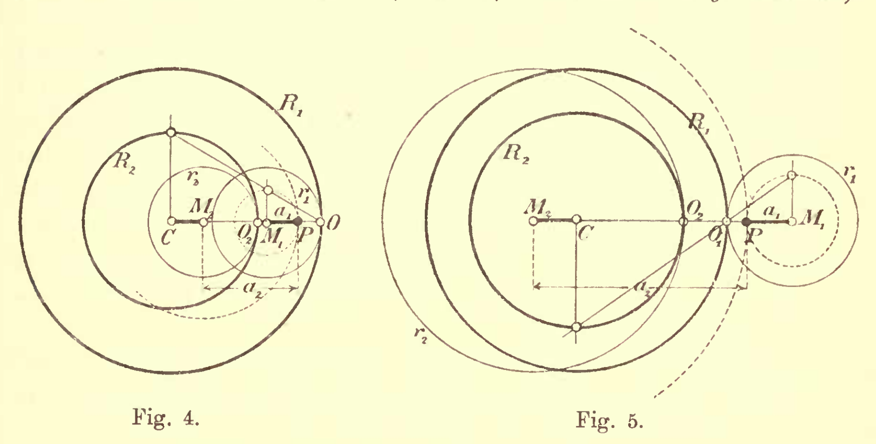


Fig. 4. Fig. 5.

Kennt man die eine Art der Erzeugung, also etwa R_1, r_1, a_1, so liefern diese Formeln die Bestimmungsstücke der andern, nämlich:

$$(4) \qquad R_2 = \frac{a_1}{r_1} R_1, \quad r_2 = \frac{a_1}{r_1}(R_1 - r_1) = R_2 - a_1, \quad a_2 = R_1 - r_1.$$

Diese Formeln geben sofort auch die Konstruktion der zweiten Erzeugung (s. Fig. 4 und 5). Bei beiden Erzeugungen haben die festen Kreise dieselbe Mitte C. Man kann zeigen, dass es sonst keine Erzeugung der Trochoide durch Rollen eines Kreises auf einem festen Kreise giebt[15].

14) Die doppelte Erzeugung der Epi- und Hypocykloiden (also, vgl. Nr. 5, für $a_1 = r_1$, $a_2 = r_2$) bemerkten schon *De la Hire* und *Euler*; vgl. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 483. Der Satz über die doppelte Erzeugung der Trochoiden überhaupt bei *S. H. Gildemeister,* De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus, Diss. Marburg 1866; *G. Bellermann,* a. a. O. 1867; *Fouret,* Nouv. Ann. (2) 8 (1869), p. 162—168; *T. Rittershaus,* Verhandl. des Ver. zur Beförder. d. Gewerbfl. in Preussen 53 (1874), p. 269—300, insbes. Anm. auf p. 272, 273; *Proctor,* A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves, London 1878, p. 154—157; *A. Vietor,* Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 263—271; *Chr. Wiener,* ebenda 26 (1881), p. 257—263; *F. Morley* und *F. Schilling,* vgl. Anm. 11. *Morley* stellt deshalb die Erzeugung der Trochoiden durch Gelenkparallelogramme an die Spitze, weil sie eindeutig ist, während die beiden Erzeugungen der Trochoiden als Rollkurven mit einander gleichberechtigt sind. Vgl. IV 3, Nr. 23.

15) Modelle der Trochoiden, die die doppelte Erzeugung zeigen, hat *L. Burmester*, Katalog math. Modelle, München 1892, p. 335, und *F. Schilling* (Verlag von M. Schilling, Halle a. S., vgl. auch die in Anm. 11 angegebene Arbeit) hergestellt.

5. Einteilung der Trochoiden, Epi- und Hypocykloiden. Liegt P bei der Erzeugung (R_1, r_1, a_1) im Innern des rollenden Kreises (r_1), sodass $a_1 : r_1 < 1$ ist, so liegt P bei der andern Erzeugung (R_2, r_2, a_2) ausserhalb des rollenden Kreises (r_2), da dann $a_2 : r_2 > 1$ ist. Diese verschiedenen Lagen von P darf man daher zur Einteilung der Trochoiden *nicht* benutzen. Durchläuft P bei der einen Erzeugung eine *Epitrochoide*, d. h. ist $r_1 < 0$ und also auch $a_1 < 0$ oder $r_1 > R_1$ und also auch $a_1 > 0$, so ist $r_2 > R_2$ bezw. $r_2 < 0$, d. h. auch bei der zweiten Erzeugungsart ist die Kurve Epitrochoide zu nennen (vgl. Fig. 5). *Die Einteilung in Epi- und Hypotrochoiden bleibt daher bei der zweiten Erzeugung erhalten.* Ist im Fall der Epitrochoide $r_1 < 0$, d. h. liegt der feste Kreis (R_1) *nicht* im Innern des rollenden Kreises (r_1), so ist $r_2 > R_2$, d. h. der feste Kreis (R_2) liegt innerhalb des rollenden Kreises (r_2),[16]) was Fig. 5 bestätigt.

Liegen bei der einen Erzeugung der beschreibende Punkt P und die Mitte C des festen Kreises (R_1) beide innerhalb oder beide ausserhalb des rollenden Kreises, so gilt dasselbe von der zweiten Art der Erzeugung, und die Kurven heissen dann ihrer Gestalt wegen *verschlungene Trochoiden.* Im andern Fall heissen sie *geschweifte Trochoiden*[17]).

Liegt P bei der ersten Erzeugung auf dem Umfang des rollenden Kreises (r_1), d. h. ist $a_1 = r_1$, so ist auch $a_2 = r_2$, d. h. P liegt auch auf dem Umfang des zweiten rollenden Kreises. Dann heisst die Bahn von P eine *Cykloide.* In diesem Falle ist der feste Kreis bei beiden Erzeugungen derselbe und $r_1 + r_2 = R_1 = R_2$, also: Teilt man den Durchmesser AB eines festen Kreises durch einen Punkt P, konstruiert dann über jeden Teil PA und PB als Durchmesser einen Kreis und denkt sich P mit dem einen oder andern Kreis fest verbunden, so beschreibt P beim Abrollen des betreffenden Kreises auf dem festen Kreise beide Male dieselbe *Cykloide.* Die Cykloiden heissen wieder *Epi- oder Hypocykloiden,* je nachdem der rollende Kreis ausser-

16) Es ist deshalb unlogisch, in dem Falle, wo der rollende Kreis den festen Kreis einschliesst, die Bahnkurven der Punkte des Umfanges des rollenden Kreises *Pericykloiden* zu nennen, wie es z. B. *H. Weissenborn* in der Monographie: Die cyklischen Kurven methodisch und mit besonderer Rücksicht auf Konstruktionen u. s. w., Eisenach 1856, p. 2, 3, thut. Doch beachte man seine Rechtfertigung in seiner Fussnote zu p. 3. Andere Autoren geben ebenfalls den Kurven mannigfache Beinamen, die häufig durch die zweite Erzeugung in ihr Gegenteil verwandelt werden.

17) So bei *Chr. Wiener* a. a. O., p. 263. *F. Schilling* a. a. O., p. 222, sagt *gestreckt* statt geschweift.

halb oder innerhalb des festen liegt. Ist also P äusserer oder innerer Teilpunkt von AB, so ist die Rollkurve von P eine Epi- bezw. Hypocykloide (s. Fig. 6 und 7)[18].

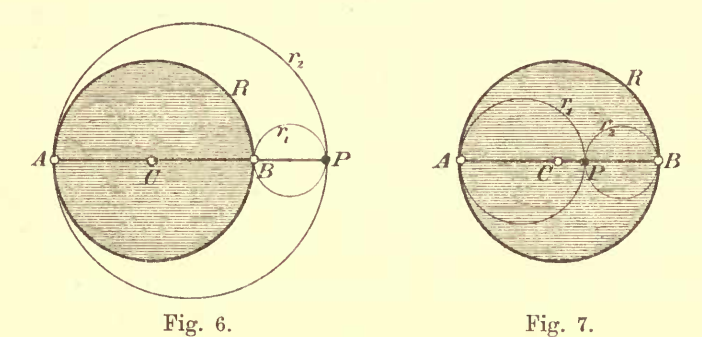


Fig. 6. Fig. 7.

6. Gemeine Cykloiden, Kreisevolventen und archimedische Spiralen. *Rollt ein Kreis* (r) *auf einer Geraden* $(R = \infty)$ *ab*, so haben die Rollkurven *keine* zweite Erzeugung durch Rollen von Kreis oder Gerade auf Kreis oder Gerade. Die Rollkurven der Punkte, die auf dem Umfange des rollenden Kreises liegen, heissen dann *gemeine Cykloiden*[19], die übrigen Rollkurven *verschlungene oder geschweifte Cykloiden*[20], je nachdem der beschreibende Punkt ausserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises liegt. Da jetzt $R = \infty$ zu setzen ist, gelten die Formeln (2) nicht mehr. Ist die x-Axe die feste Polbahn, r der Radius des rollenden Kreises, a der Abstand des beschreibenden Punktes P von der Mitte M von (r), wo jetzt r und a beide *positiv* sein sollen, so werde die Anfangslage (M_0, P_0, O_0) so gewählt, dass der Drehpol O_0 der Anfangspunkt des Axenkreuzes ist, M_0 auf der positiven y-Axe liegt und P_0 die Ordinate $r - a$ hat. Ist der zum Centriwinkel ψ gehörige Bogen des Kreises (r) abgerollt, so sei ψ positiv gerechnet,

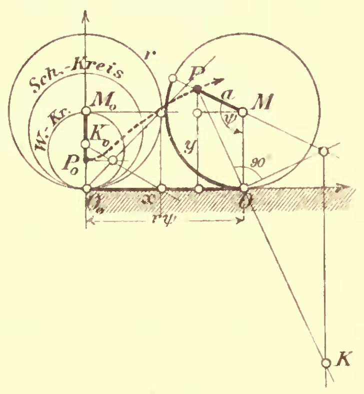


Fig. 8.

---

18) Die Trochoiden heissen bei manchen Autoren auch verallgemeinerte Cykloiden oder cyklische Kurven u. dgl., ja auch schlechtweg Cykloiden.

19) Bezüglich der älteren Geschichte der gemeinen Cykloiden siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 460—462. Ihr Name rührt von *G. Galilei* her.

20) Auch *verlängerte* und *verkürzte* Cykloiden.

wenn das Abrollen auf der positiven x-Axe stattfindet. Dann hat P die Koordinaten (s. Fig. 8)[21]):

$$(5) \qquad x = r\psi - a\sin\psi, \quad y = r - a\cos\psi.$$

Dies sind die mittels des Parameters ψ ausgedrückten Gleichungen der verschlungenen Cykloide für $a > r$, der gemeinen für $a = r$, der geschweiften für $a < r$. Für die gemeine Cykloide giebt $\psi = 2\pi r k$ (k eine ganze Zahl) die *Rückkehrpunkte*, für die sonstigen Kurven giebt $\psi = \pi r k$ die *Hauptscheitel*, die auf zwei Parallelen zur x-Axe liegen. Der Punkt P ist ein Wendepunkt seiner Bahn, wenn er auf den *Wendekreis* zu liegen kommt, d. h. auf den Kreis vom Radius $\frac{1}{2}r$, der innerhalb des rollenden Kreises liegt und ihn im momentanen Drehpol O berührt. Er wird dagegen ein *Nebenscheitel*, wenn er auf den ebenso liegenden Kreis vom Radius $\frac{3}{4}r$ rückt[22]).

Rollt eine Gerade ($r = \infty$) *auf einem festen Kreise* (R) *ab*, so beschreiben ihre Punkte *eigentliche Evolventen* [III D 1, 2, Nr. 16] *des festen Kreises*, die sonstigen mit ihr fest verbundenen Punkte *verschlungene oder geschweifte Kreisevolventen*, je nachdem sie auf derselben Seite der Geraden liegen wie die Mitte C des festen Kreises oder nicht. Auf die analytische Darstellung, die dann auch nicht mehr die Form (2) hat, gehen wir

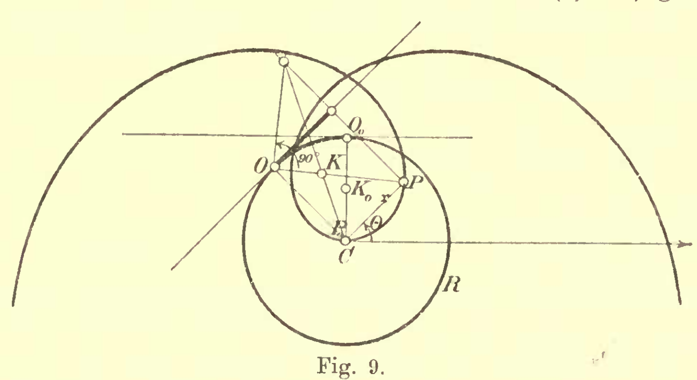


Fig. 9.

nicht ein. Insbesondere beschreiben diejenigen Punkte, die mit der Geraden fest verbunden sind, auf derselben Seite von ihr wie C liegen und den Abstand R von ihr haben, *archimedische Spiralen*[23]). Jeder

21) In dieser Figur ist zugleich die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes K_0 bezw. K für die Punkte P_0 bezw. P angegeben.

22) Scheitel- und Wendekreisradius gehen aus den in Nr. 3 angegebenen Radien für $R = \infty$ hervor. Der Scheitelkreis ist z. B. bei *Chr. Wiener,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie 2, Leipzig 1887, p. 357 erwähnt.

23) *Al. Cl. Clairaut,* Paris Mém. 1740 [1742].

solche Punkt rückt nämlich im Laufe der Bewegung einmal in die Mitte C. Nehmen wir diese Lage zur Anfangslage und benutzen die Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ mit dem Pol O, sodass die Anfangslage der Geraden die Tangente des festen Kreises im Punkte ($\mathfrak{r} = R$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$) ist, so beschreibt der zu Anfang in C liegende Punkt P die Kurve (s. Fig. 9[24]):

$$\mathfrak{r} = R\theta \qquad (R = \text{const.}),$$

und dies ist die Definitionsgleichung der archimedischen Spiralen[25]).

7. Rektifikation der Epi- und Hypocykloiden. Während die Rektifikation [III D 1, 2, Nr. **10**] der Trochoiden im allgemeinen auf elliptische Integrale führt, ist sie im Fall der Cykloiden ($a = r$) elementar. Nach (2), Nr. 3, sind:

---

24) Hierin ist wieder die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes K für P angegeben. P_0 hat seinen Krümmungsmittelpunkt K_0 in der Mitte von $P_0 O_0$. — Hier sei noch angemerkt, dass die *Spirale von Sturm oder Norwich*, deren Krümmungsradius gleich ihrem Radiusvektor ist, eine Evolvente einer Kreisevolvente ist, vgl. *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 532, 533. Diese Spirale hat übrigens eine charakteristische Eigenschaft, die bei *Loria* nicht erwähnt zu sein scheint: Ihre Bogenlänge stimmt mit der Bogenlänge ihrer Fusspunktkurve überein, wenn der Anfangspunkt der Pol der Fusspunkttransformation ist. *J. Sylvester* nennt die höheren eigentlichen Kreisevolventen *Cykloden* (Lond. math. Soc. Proc. 2 (1869), p. 137—160).

25) Geschichtliches über die archimedischen Spiralen bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 426—433. Ihre Entdeckung wird *Archimedes* zugeschrieben. Alle archimedischen Spiralen sind einander ähnlich. (Dasselbe gilt von allen eigentlichen Kreisevolventen.) Jede archimedische Spirale hat *zwei* von C ausgehende symmetrische Zweige, siehe *L. Euler*, Introductio in analysin infinitorum 1, Lausannae 1748, tab. 27, fig. 109, und 2, p. 301—302. *Archimedes* selbst hat die Tangente bestimmt und die Quadratur ausgeführt. Ihre Rektifikation wurde von *Cavalieri, St. Vincentius, Roberval, Pascal* und *Fermat* geleistet, nämlich auf die der Parabel $y^2 = 2Rx$ zurückgeführt. Mit der archimedischen Spirale ist die *Neoide* identisch (vgl. *F. Stegmann*, Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 53, 54), denn die Gleichung der Neoide: $\mathfrak{r} = a\theta + b$ kann durch andere Wahl des Anfangsstrahls auf die Form $\mathfrak{r} = a\theta$ gebracht werden. Wenn man also alle Radienvektoren der archimedischen Spirale um dasselbe Stück verlängert, so ergiebt sich eine kongruente, aber gedrehte archimedische Spirale. Der Krümmungsmittelpunkt wurde mittels der projektiven Geometrie von *W. Rulf*, ebenda (2) 11 (1892), p. 197—199, abgeleitet. Eine Minimaleigenschaft der Kurve bei *E. Janisch*, ebenda (2) 9 (1890), p. 445—448. Wählt man nämlich in der Ebene drei feste Punkte Π_1, Π_2, V und zwei feste Geraden π_1 und π_2 durch Π_1 bezw. Π_2, so geht die Fusspunktkurve C einer Kurve Γ, die Π_1 und Π_2 zu Punkten und π_1 und π_2 daselbst zu Tangenten hat, durch die Fusspunkte P_1 und P_2 der Lote von V auf π_1 und π_2, wenn V der Pol der Fusspunkttransformation ist. Für eine Kurve Γ der bezeichneten Art ist nun die von C, Γ, π_1 und π_2 begrenzte Fläche ein Minimum, wenn C eine archimedische Spirale ist, die V zum Pol hat.

$$(6)\qquad \begin{cases} x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{r-R}{r}\varphi, \\ y = (R - r)\sin\varphi + r\sin\dfrac{r-R}{r}\varphi \end{cases}$$

die Gleichungen der Cykloide. Hieraus folgt für das Bogenelement ds:

$$ds = \pm 2(R - r)\sin\frac{R}{2r}\varphi \cdot d\varphi,$$

also, wenn die Bogenlänge s von $\varphi = 0$ an gerechnet wird:

$$s = \pm \frac{4r(R-r)}{R}\left(1 - \cos\frac{R}{2r}\varphi\right).$$

Wird $R\varphi = \pm r\pi$ gesetzt, so ergiebt sich die Länge eines halben Cykloidenbogens, nämlich vom Rückkehrpunkt ($\varphi = 0$) bis zum nächsten Hauptscheitel. Daher ist die Länge eines Bogens zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten [26])

$$\pm \frac{8r}{R}(R - r).$$

Rollt ein Kreis vom absolut gemessenen Radius r einmal auf der einen, das andere Mal auf der andern Seite des festen Kreises (R) ab, indem von solchen Lagen ausgegangen wird, in denen beide rollende Kreise einander berühren und alsdann dieser Berührungspunkt als beschreibender Punkt gewählt wird, so ergeben sich zwei Cykloiden, die gemeinsame Rückkehrpunkte haben. Dabei ist die Summe der Bogen beider zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten gleich $16r$, also von R unabhängig [27]).

8. Natürliche Gleichung der Cykloiden, cykloidale Kurven. Das Quadrat des Krümmungsradius ϱ der Cykloide (6), ausgedrückt durch die von einem Hauptscheitel an gerechnete Bogenlänge s, hat den Wert:

$$(7)\qquad \varrho^2 = \frac{16r^2(R-r)^2}{(2r-R)^2}\left[1 - \frac{R^2}{16r^2(R-r)^2}s^2\right].$$

Die Cykloiden haben also eine natürliche Gleichung (vgl. III D 1, 2, Nr. **15**) von der Form [28]):

$$(8)\qquad \frac{s^2}{m^2} + \frac{\varrho^2}{n^2} = 1,$$

26) *De la Hire*, Paris Mém. 9 (1694), p. 234 u. 239. Näheres über die Rektifikation und Quadratur der Trochoiden überhaupt bei *C. Eichler*, vgl. Anm. 12, und *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 466, 467, 469—471, 475—477, 489, 490. Ebenso dort näheres über diejenigen *algebraischen* Cykloiden, die besonderes Interesse haben.

27) *R. Hennig*, J. f. Math. 65 (1866), p. 52—61, bemerkt, dass diese Unabhängigkeit von der Polbahn auch dann statthat, wenn die Polbahn eine beliebige Kurve ist.

28) *L. Aoust*, Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris 1873, p. 99.

wo:

$$m^2 = \frac{16 r^2 (R - r)^2}{R^2}, \quad n^2 = \frac{16 r^2 (R - r)^2}{(2r - R)^2} \tag{9}$$

ist. Umgekehrt: Die natürliche Gleichung (8) stellt eine Epi- oder Hypocykloide dar, bei der die Radien der Kreise sind:

$$R = \frac{mn^2}{n^2 - m^2}, \quad r = \frac{mn}{2(n - m)}, \tag{10}$$

wobei m mit demjenigen Vorzeichen zu wählen ist, für das $R > 0$ wird, und wobei wieder die doppelte Erzeugung hervortritt, da n durch $-n$ ersetzt werden kann.

Die Kurven dagegen, deren natürliche Gleichung ist:

$$\frac{s^2}{A} + \frac{\varrho^2}{B} = 1, \tag{11}$$

wo die Konstanten A und B nicht beide positiv sind, lassen sich *nicht* durch Abrollen eines reellen Kreises auf einem reellen Kreis erzeugen. *E. Cesàro*[29]) nennt sie *cykloidale Kurven*, insbesondere *Pseudocykloiden*[30]), wenn $A + B = 0$ ist. Unter ihnen sind *reelle* Kurven vorhanden, die also als Cykloiden aufgefasst werden können, bei denen der eine oder beide Kreise imaginär sind. Von *E. Wölffing* ist die Frage nach allen derartigen Kurven methodisch behandelt worden[31]). Auf zwei spezielle, die *Paracykloide* und *Hypercykloide* von *R. de Saussure*, kommen wir in Nr. **12** zurück.

9. Mit den Cykloiden zusammenhängende Kurven, insbes. Rhodoneen. Beschreibt P eine Cykloide, d. h. liegt P auf dem Umfang des Kreises (r), der auf dem festen Kreise (R) rollt, so liegt

---

29) *E. Cesàro*, Natürliche Geometrie, p. 58, wo er die Gleichung (11), indem er den Anfangspunkt der Bogenlänge beliebig wählt, so schreibt:

$$\varrho^2 = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma.$$

Ist insbesondere $\beta^2 = \alpha\gamma$, so ist die Zurückführung auf die Form (11) nicht mehr möglich. Dann gehen die *logarithmischen Spiralen* (s. Nr. **16**) hervor. Ist $\alpha = 0$, so ist die Kurve eine *eigentliche Kreisevolvente* (Nr. **6**).

30) Ebenda p. 10, 11.

31) Wenn bei einer stetigen ebenen Bewegung *zwei* Punkte reelle Bahnen beschreiben, so beschreiben alle mit ihnen starr verbundenen reellen Punkte reelle Bahnen, auch ist dann der Drehpol stets reell, daher auch Polbahn und Polkurve. Sind diese beiden nicht reell, so kann der Fall eintreten, dass gerade und nur *ein* Punkt eine reelle Bahn beschreibt. Bei *E. Wölffing*, Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 139—166, findet man auch Geschichtliches über das frühere Auftreten solcher Kurven, deren Charakter als Trochoiden man nicht erkannte, bei *Euler* u. A. Siehe auch *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 504—508, wo noch eine der Mechanik entstammende spezielle cykloidale Curve, die *Ephelix* von *F. Roth* (Repertorium d. Phys. 23 (1887)), p. 1, 457, 553, erwähnt wird.

der Krümmungsmittelpunkt K von P auf einem Kreise, der den festen Kreis ebenfalls im momentanen Drehpol O berührt und den Radius

$$r' = \frac{Rr}{2r - R}$$

hat, wobei das Vorzeichen dieselbe Bedeutung wie oben (in Nr. 3) hat. Konstruieren wir den zum festen Kreis (R) konzentrischen Kreis (R'), der den Kreis (r') ebenfalls berührt, dessen Radius also ist:

$$R' = \pm (R - 2r') = \frac{\pm R^2}{2r - R},$$

so ist, abgesehen vom Vorzeichen:

$$r' : R' = r : R.$$

Rollt der Kreis (r) auf dem Kreis (R) ab, so rollt zugleich der Kreis (r') ohne Gleiten auf dem Kreis (R') ab, woraus der Satz von *Jac. Bernoulli* und *De la Hire*[32]) folgt, *dass die Evolute einer Epi- oder Hypocykloide eine ihr ähnliche Kurve ist,* wobei jedoch entsprechende Punkte nicht homolog sind. Für allgemeine Trochoiden gilt aber *kein* analoger Satz[33]). Die Evolute einer gemeinen Cykloide insbesondere ist eine mit der Cykloide kongruente Kurve. In diesem Falle wird der Krümmungsradius ϱ vom momentanen Drehpol O halbiert[34]).

Die *Fusspunktkurven* [III D 1, 2, Nr. 7] *der Cykloiden*[35]) in Bezug auf die Mitte C des festen Kreises haben in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{r} = a \cos b\theta;$$

solche Kurven heissen *Rhodoneen*[36]). Auch unter den Trochoiden

32) *Jac. I Bernoulli,* Acta Erud. 1692, p. 291 f.; *De la Hire,* Paris Mém. 9 (1694), p. 221—294, insb. p. 265.

33) Ihre Evoluten wurden von *S. H. Gildemeister,* a. a. O., *G. Bellermann,* a. a. O. (siehe Fussnote 14), und *Chr. Wiener,* Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 129—139, untersucht.

34) *Jede* ebene Kurve, deren Krümmungsradius von einer festen Geraden halbiert wird, ist eine gemeine Cykloide. Man sehe z. B. *E. Cesàro,* Natürl. Geometrie, p. 26.

35) Siehe *G. Bellavitis,* Ann. fis. mat. 3 (1852), p. 508—516; *E. Eckardt,* Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 129—134, insbes. p. 132, und *L. Kiepert,* ebenda 17 (1872), p. 129—146, insbes. p. 143. Hier wird ihre Rektifikation und Quadratur ausgeführt. Fusspunktkurven mit allgemeiner gewähltem Pol bei *W. M. Hicks,* Mess. of Math. (2) 6 (1876), p. 94—96.

36) Die *Rhodoneen* (*Rosenkurven, Rosaces*) rühren von *G. Grandi* her, es wurden hauptsächlich nur algebraische betrachtet. Vgl. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 297—306. Die Bahn eines Punktes, der längs einer Geraden um einen ihrer Punkte schwingt, während die Gerade um letzteren Punkt gleichmässig rotiert, ist eine Rhodonee. Siehe *E. Auth,* Marburger Diss. 1866. Aus den Rhodoneen gehen vermöge Transformation durch reziproke Radien die *Ährenkurven* oder *Cotes'schen Spiralen* hervor, siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 305.

selbst sind Rhodoneen vorhanden, nämlich diejenigen Trochoiden, bei denen $a = \pm (R - r)$ ist, die also durch die Mitte des festen Kreises gehen. In der That[37]), im Fall $a = R - r$ hat die Kurve (2), Nr. 3, in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = 2(R - r) \cos \frac{R}{2r - R} \theta,$$

im Falle $a = r - R$ die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = 2(R - r) \sin \frac{R}{2r - R} \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$ [38])

10. Rollkurven mit geradliniger Polbahn. Rollt eine Kurve auf einer Geraden ab, so gestalten sich die Formeln nach einer Bemerkung von *R. de Saussure*[39]) besonders bequem, wenn man für die rollende Polkurve die natürlichen Koordinaten, d. h. Bogenlänge s und Krümmungsradius ϱ, für die Rollkurven dagegen rechtwinklige Koordinaten x, y benutzt, wobei die geradlinige Polbahn die x-Axe und zu Anfang der Bewegung (für $s = 0$) der Drehpol der Anfangspunkt sei. Ist nämlich das Bogenstück s der Polkurve:

$$\varrho = \varphi(s)$$

auf der x-Axe abgerollt, und wird das Abrollen um das Element ds weiter fortgesetzt, sodass weiterhin um den Kontingenzwinkel $ds : \varrho$ der Polkurve gedreht wird, so ändern sich die Koordinaten x, y eines mit der Polkurve fest verbundenen Punktes um Elemente dx, dy, für die sich aus einer Figur sofort ergiebt:

$$\text{(12)} \qquad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{s - x} = \frac{ds}{\varrho}.$$

Ist die Polkurve $\varrho = \varphi(s)$ gegeben, so folgt hieraus:

$$\frac{d(x \pm iy)}{ds} = \mp \frac{i}{\varrho}(x \pm iy) \pm i \frac{s}{\varrho},$$

37) Dass jede Rhodonee eine Trochoide ist, bewies *L. Ridolfi,* Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell' ellisse, Florenz 1844, p. 11. Vgl. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 495. Spätere Arbeiten über Rhodoneen: *H. Durège,* Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 209—217; *A. Himstedt,* Progr. Progymnasium Löbau (W.-Pr.) 1888; *A. Aubry,* J. de math. spéc. (4) 2 (1893), p. 172—178.

38) Auf die sonstigen Kurven, die mit den Trochoiden zusammenhängen, wie z. B. ihre Polarkurven hinsichtlich des festen Kreises, gehen wir nicht ein, ebenso wenig auf die Bedeutung der Trochoiden, insbesondere Cykloiden, für die Mechanik und als Brennkurven. Man vgl. hierüber *E. Wölffing,* Bibliotheca math. (3) 2 (1901), p. 235—259.

39) Amer. J. of math. 17 (1895), p. 269—272. Eine andere Behandlung des Problems bei *A. Demoulin,* Bruxelles Mém. cour. 45, 7 mars 1891.

d. h. die Rollkurven ergeben sich durch Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, also durch Quadraturen (vgl. II A 4b, Nr. 22). Ist dagegen eine Rollkurve $y = f(x)$ gegeben, so liefert (12):

$$s = x + y\frac{dy}{dx}, \quad \varrho = y\frac{ds}{dx}; \tag{13}$$

die erste Formel giebt s, darauf die zweite ϱ als Funktion von x. Es geht also die natürliche Gleichung der Polkurve durch Elimination hervor. Wir betrachten in Nr. **11** und **12** einige besondere Fälle.

11. Kurven von Delaunay und Sturm. Rollt eine Ellipse oder Hyperbel auf einer Geraden, so beschreiben ihre Brennpunkte Kurven, die *Delaunay'sche Kurven* heissen[40]). *Ch. Delaunay*[41]) hat nämlich bewiesen [III D 5, Nr. 36]: Um die Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter mittlerer Krümmung $1:2a$ zu finden, lasse man eine Ellipse oder Hyperbel, deren Hauptaxe gleich $2a$ ist, auf der Geraden rollen. Jeder ihrer Brennpunkte beschreibt die gesuchte Kurve. Durch Umdrehen der Kurve um die Gerade geht die gewünschte Rotationsfläche hervor. Wegen des bekannten Satzes über die Hauptkrümmungsradien einer Rotationsfläche [III D 5, Nr. 4] bedeutet dies, dass bei einer *Delaunay'schen Kurve die Summe der reziproken Werte des Krümmungsradius und der bis zur Axe gemessenen Normalen konstant* (gleich $1:a$) ist. *O. Bonnet*[42]) fügte hinzu: Rollt eine Parabel auf der Geraden ab, so beschreibt ihr Brennpunkt die *Kettenlinie* (s. Nr. 27); die zugehörige Fläche ist das Katenoid. In der That ist bei der Kettenlinie der Krümmungsradius entgegengesetzt gleich der Normalen, gemessen bis zur Axe. *Ch. Sturm*[43]) untersuchte die Rollkurve der Mitte eines Kegelschnittes beim Abrollen auf der Geraden und bemerkte, dass sie im Fall der gleichseitigen Hyperbel eine *spezielle elastische Linie* (s. Nr. 37) ist[44]). *S. Spitzer*[45]) zeigte, dass die Bogenlänge der *Delaunay*'schen Kurve bei einmaligem Abrollen einer Ellipse gleich dem Umfang des Kreises ist, der die grosse Axe der Ellipse zum Durchmesser hat. Die Rollkurven beliebiger mit dem abrollenden Kegelschnitt fest verbundener

40) Nach einem Vorschlag von *P. Mansion,* siehe *E. Habich,* Mathesis 6 (1886), p. 103—106. Sie heissen auch *elliptische* bezw. *hyperbolische Kettenlinien.*

41) J. de math. (1) 6 (1841), p. 309—315. Unter mittlerer Krümmung versteht dabei *Delaunay* die *halbe* Summe der beiden Hauptkrümmungen [III D 1, 2, Nr. 35.]

42) Ebenda (1) 9 (1844), p. 97—112, insbes. p. 104.

43) Ebenda (1) 6 (1841), p. 315—320, insbes. p. 318, 319.

44) Siehe auch *H. Brocard,* Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 432, und *Moret-Blanc,* ebenda (2) 12 (1873), p. 451—453.

45) Archiv Math. Phys. (1) 48 (1868), p. 235—238.

Punkte wurden teils speziell, teils allgemein von mehreren untersucht[46][47].

12. Para- und Hypercykloiden. Es rolle eine Polkurve auf der Geraden (x-Axe) ab. Dabei beschreibe ein mit ihr fest verbundener Punkt eine Gerade:

$$y = \alpha x + a.$$

Die natürliche Gleichung der Polkurve geht dann aus (13) in der Form:

$$\varrho - \alpha s - a = 0$$

hervor, die zeigt, dass die Polkurve eine *logarithmische Spirale* (s. Nr. **16**), insbesondere für $\alpha = 0$ ein Kreis, ist[47a].

Soll dagegen ein Punkt beim Abrollen der Polkurve auf der Geraden (x-Axe) einen Kegelschnitt beschreiben[48], der die Gerade zur Axe hat, sodass

---

46) Z. B. von *H. Brocard,* Nouv. Corresp. de math. 3 (1877), p. 6—13, 33—40; *A. V. Lane,* Amer. J. of math. 8 (1886), p. 132—137; *H. Ekama,* Archiv Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 388—441.

47) Man kann auch die Kurve suchen, die eine mit der abrollenden Polbahn fest verbundene Kurve umhüllt, z. B. wenn ein Kreis auf einem Kreis abrollt, so umhüllt auch jeder Durchmesser eine *Cykloide,* nach *M. Chasles,* Aperçu historique etc., Brüssel 1837, 2. Aufl. Paris 1875, p. 69. Ist die Polkurve eine Parabel, so umhüllt ihre Leitlinie eine *Kettenlinie* (Nr. **27**), siehe z. B. *E. Cesàro,* Natürliche Geom., p. 94. — Ferner: Rollt eine *Epi- oder Hypocykloide* auf der Geraden ab, so beschreibt die mit ihr fest verbunden gedachte Mitte des ursprünglich festen Kreises eine Ellipse (das Abrollen ist hier eine Art von Hin- und Herpendeln auf *beiden* Seiten einer Strecke); die Ellipse wird im Fall der *Kreisevolvente* (Nr. **6**) zur Parabel. Vgl. *O. Böklen,* Archiv Math. Phys. (1) 37 (1861), p. 118—123, insbes. p. 121; *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 84, 85. Die Bahnkurve des Pols einer auf einer Geraden rollenden *Sinusspirale* (s. Nr. **21**) wurde von *O. Bonnet,* J. de math. (1) 9 (1844), p. 97—112, insbes. p. 103, untersucht. Sie ist eine *Ribaucour'sche Kurve* (s. Nr. **26**). Vgl. auch *A. Mannheim,* Paris Soc. math. Bull. 4 (1876), p. 158, 159; *A. Ribaucour,* Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 1881, insbes. p. 158; *J. McMahon,* Educ. Times 50 (1889), p. 169, 170; *A. Demoulin,* Bruxelles Mém. cour. in 8°, 44 (7 mars 1891); *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 85, *E. Wölffing,* Biblioth. math. (3) 2 (1901), p. 235—259. Rollt eine Ribaucour'sche Kurve auf einer Geraden ab, so umhüllt ihre Direktrix wieder eine Ribaucour-sche Kurve, vgl. *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 84. — Die Kurve, auf der eine Hyperbel abrollen muss, damit ihre Mitte eine Gerade beschreibe, ist die *Sprungseilkurve* (courbe à sauter), nämlich die Kurve eines schweren homogenen unausdehnbaren, aber biegsamen Fadens, der um eine horizontale Axe mit festgehaltenen Enden rotiert. Siehe *P. Appell et E. Lacour,* Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris 1897, p. 188, u. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 513.

47a) Siehe z. B. *E. Catalan,* Anm. 3.

48) *R. de Saussure,* Anm. 39.

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1$$

die Gleichung der Rollkurve ist, so folgt aus (13) für die Polkurve die natürliche Gleichung:

$$\frac{s^2}{\alpha} + \frac{\varrho^2}{\beta} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right)^2,$$

die zeigt, dass die Polkurve eine *cykloidale Kurve* (s. Nr. 8) ist, indem hier

$$m^2 = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha}, \quad n^2 = \frac{\beta(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2}$$

die Grössen (9) sind, sodass nach (10):

$$R = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}, \quad r = \frac{(\alpha - \beta)\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}$$

die Radien der erzeugenden Kreise sind. Nur wenn $\alpha > 0$, $\beta > 0$, die Rollkurve also eine Ellipse ist, ist die Polkurve eine Cykloide, die durch Rollen eines reellen Kreises auf einem reellen Kreis entsteht.

Ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, d. h. die Rollkurve eine Hyperbel und die Polbahn ihre grosse Axe, so ist r imaginär. Die somit auf imaginärem Wege als Cykloide erzeugbare reelle Polkurve heisst nach *R. de Saussure* eine *Paracykloide*. Im Falle $\alpha < 0$, $\beta > 0$ dagegen nennt er die Polkurve *Hypercykloide*; in diesem Fall ist die Rollkurve eine Hyperbel und die Polbahn ihre Nebenaxe und R und r werden imaginär.

Ist die Rollkurve eine Parabel und die Polbahn ihre Axe, so ist die Polkurve eine *Kreisevolvente*[49]). Vgl. Anm. 29.

II. *W*-Kurven.

13. Definition der *W*-Kurven. *F. Klein* und *S. Lie* haben 1870/71 in gemeinsamen Arbeiten[50]) eine Familie von im allgemeinen

49) Wir nennen noch einige Arbeiten über das Abrollen transcendenter Kurven: Abrollen von Cykloiden auf Cykloiden bei *G. Bellermann,* Berlin Königstädt. Realschule Jubil.-Schrift 1882, p. 215—240; *A. Mannheim,* Paris Soc. math. Bull. 4 (1876), p. 158, 159; Abrollen von Sinusspiralen oder Ribaucourschen Kurven auf Sinusspiralen bei *Hâton de la Goupillière,* Nouv. Ann. (2) 15 (1876), p. 97—108, insbes. p. 103; *A. Mannheim,* a. a. O.; *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 95. Ferner über Abrollen von Kegelschnitten auf Kegelschnitten bei *A. Miquel,* J. de math. (1) 3 (1838), p. 202—208; *E. Hartmann,* Progr. Kassel 1876; *H. Ekama,* Archiv Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 388—441. Endlich sei noch erwähnt: *E. Habich* a. a. O.; *E. Cesàro* a. a. O. p. 86, 91.

50) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Paris, C.R. 70 (1870), p. 1222—1226, 1275—1279; Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen

transcendenten Kurven untersucht, die zwar gelegentlich schon früher vorkamen[51]), bei denen aber der innere Grund für ihre merkwürdigen Eigenschaften erst durch die Genannten aufgedeckt wurde. Zur Definition gehen wir von einer *infinitesimalen projektiven Transformation* der Ebene aus [II A 6, Nr. 4]. Sie erzeugt, unendlich oft ausgeführt, eine in *Lie*'s Sinne *kontinuierliche eingliedrige projektive Gruppe* $\mathfrak{G}_1$ [II A 6, Nr. 2]. Übt man alle Transformationen der Gruppe auf irgend einen Punkt aus, so beschreibt er eine *Bahnkurve der Gruppe* $\mathfrak{G}_1$. *Diese Bahnkurven sind die W-Kurven der Ebene.* Die Definition der *W-Kurven im Raum* ist analog. Auf diese Kurven kommen wir in Nr. **20** kurz zurück. Jeder Punkt einer W-Kurve hat dieselbe Kurve zur Bahnkurve, sodass zur Gruppe $\mathfrak{G}_1$ in der Ebene ∞^1 W-Kurven gehören. Jede dieser W-Kurven bleibt invariant bei allen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ [II A 6, Nr. **12**].

Sind x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten und erteilt die infinitesimale Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ihnen die Inkremente:

$$\delta x_i = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3)\,\delta t \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14}$$

wobei δt etwa das Zeitelement vorstellt, in dem die Transformation vor sich geht, so ist längs jeder W-Kurve der Gruppe $\mathfrak{G}_1$:

$$\frac{dx_1}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} = \frac{dx_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} = \frac{dx_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}. \tag{15}$$

Jede Integralkurve dieses Systems ist eine W-Kurve der Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Führt man nicht-homogene Koordinaten:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \tag{16}$$

ein, so kommt statt (15):

$$\frac{dx}{a_{13} + (a_{11} - a_{33})x + a_{12}y - a_{31}x^2 - a_{32}xy} = \frac{dy}{a_{23} + a_{21}x + (a_{22} - a_{33})y - a_{31}xy - a_{32}y^2}.$$

Dies ist die allgemeine Form einer *Jacobi'schen gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung*[52]). Die W-Kurven sind also die Integralkurven derartiger Differentialgleichungen.

Führt man auf die Ebene eine beliebige projektive Transformation aus, d. h. bildet man sie perspektiv auf eine Ebene ab [III A 5, 6],

in sich übergehen, Math. Ann. 4 (1871), p. 50—84. Eine elementare Behandlung der ebenen W-Kurven bei *S. Lie,* Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen u. s. w., bearb. von *G. Scheffers,* Leipzig 1893, p. 68—82. Sie heissen dort *selbstprojektive Kurven,* doch hat sich diese Bezeichnung nicht eingebürgert. Über den Namen W-Kurven siehe Anm. 58.

51) So bei *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 24 (1842), p. 1—4 = Werke 4, p. 257—262; *A. Clebsch* und *P. Gordan,* Math. Ann. 1 (1869), p. 359—400, insbes. p. 389. Nach *G. Loria* auch bei *G. Battaglini,* Napoli Atti 2 (1865).

52) Siehe *Jacobi* a. a. O. Vgl. auch II A 4b, p. 240.

so gehen die W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ in die W-Kurven derjenigen Gruppe über, die aus $\mathfrak{G}_1$ durch Ausübung jener Transformation hervorgeht. Will man also typische Formen für die W-Kurven finden, so darf man dabei beliebig von projektiven Koordinatenänderungen Gebrauch machen.

14. Zwei Arten von transcendenten ebenen W-Kurven. Jede infinitesimale projektive Transformation der Ebene sowie die von ihr erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}_1$ lässt gewisse Punkte und Geraden in Ruhe. Es giebt fünf Möglichkeiten[53]. Bei zweien bleiben unendlich viele *Geraden* einzeln in Ruhe, die daher dann die W-Kurven sind. Bei einer erzeugt die infinitesimale Transformation eine eingliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_1$, deren Bahnkurven *Kegelschnitte* sind[54]. *Transcendente* W-Kurven können sich daher nur in den beiden übrigen Fällen ergeben. Diese sind:

Erster Fall: Bei $\mathfrak{G}_1$ bleiben die Ecken und Seiten eines (nicht ausgearteten) Dreiecks Δ und sonst keine Punkte und Geraden in Ruhe.

Zweiter Fall: Bei $\mathfrak{G}_1$ bleiben nur zwei Punkte und nur zwei Geraden in Ruhe, die Verbindende der beiden Punkte ist die eine Gerade, der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der eine Punkt.

Dementsprechend giebt es *zwei Arten von transcendenten ebenen W-Kurven*. Die der zweiten Art lassen sich durch einen Grenzübergang aus denen der ersten Art ableiten.

Wird im *ersten* Fall das invariante Dreieck Δ als Koordinatendreieck angenommen, so hat die Transformation (14) die Form:

$$\delta x_1 = a_1 x_1 \delta t, \quad \delta x_2 = a_2 x_2 \delta t, \quad \delta x_3 = a_3 x_3 \delta t \tag{17}$$
$$(a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0),$$

sodass statt (15) kommt:

$$\frac{dx_1}{a_1 x_1} = \frac{dx_2}{a_2 x_2} = \frac{dx_3}{a_3 x_3}.$$

Setzen wir alle drei Brüche gleich dt, so giebt Integration die Gleichungen der W-Kurven der ersten Art, ausgedrückt mittels eines Parameters t:

$$x_1 = \text{const.}\, e^{a_1 t}, \quad x_2 = \text{const.}\, e^{a_2 t}, \quad x_3 = \text{const.}\, e^{a_3 t} \tag{18}$$

oder nicht-homogen nach (16):

$$x^{a_2 - a_3}\, y^{a_3 - a_1} = \text{const.} \tag{19}$$

Alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der ersten Art können daher durch

53) Siehe z. B. *Lie-Scheffers*, a. a. O. p. 61—67. Vgl. *H. B. Newson*, Kansas Quart. 6 (1897), p. 63; 7 (1898), p. 125; 8 (1899), p. 43; 9 (1900), p. 65.

54) Ebenda p. 70.

eine geeignete projektive Transformation der Ebene in die ∞^1 *interscendenten höheren Parabeln*[55]):

(19′) $$y = \text{const.}\, x^m$$

übergeführt werden. Hierin ist die Konstante m für die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ charakteristisch, dagegen der konstante Faktor willkürlich.

Im *zweiten* Fall seien $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$ die invarianten Punkte und $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ die invarianten Geraden. Alsdann lässt sich die infinitesimale projektive Transformation (14) auf die Form bringen:

(20) $$\delta x_1 = (x_1 + x_3)\delta t, \quad \delta x_2 = 2x_2\delta t, \quad \delta x_3 = x_3\delta t,$$

sodass statt (15) kommt:

$$\frac{dx_1}{x_1 + x_3} = \frac{dx_2}{2x_2} = \frac{dx_3}{x_3}.$$

Integration giebt die W-Kurven der zweiten Art, ausgedrückt mittels eines Parameters t:

(21) $$x_1 = (c_1 + c_3 t)e^t, \quad x_2 = c_2 e^{2t}, \quad x_3 = c_3 e^t \quad (c_1, c_2, c_3 = \text{const.}),$$

oder nicht-homogen, nach (16):

(22) $$y = \text{const.}\, e^x.$$

Alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der zweiten Art lassen sich also durch eine geeignete projektive Transformation der Ebene in die ∞^1 *logarithmischen Kurven* (22) oder:

(22′) $$x = \log\, y + \text{const.}$$

überführen[56]).

Hierbei und bei den W-Kurven der ersten Art ist aber anzumerken, dass man dabei eventuell *imaginärer* projektiver Transformationen bedarf.

Die *allgemeinste Darstellung* beider Arten von W-Kurven in nichthomogenen Koordinaten x, y ergiebt sich aus (19) und (22′), wenn man statt x und y linear gebrochene Funktionen von x und y mit gleichen Nennern einführt:

(19″) $$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)^{a_2 - a_3}(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)^{a_3 - a_1}(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^{a_1 - a_2} = \text{const.},$$

---

55) Nach der *Leibniz*'schen Terminologie, siehe Nr. 1.

56) Die allgemeine logarithmische Kurve oder *Logistica*:

$$y = b \log \frac{x}{a},$$

wo der Logarithmus eine beliebige Basis haben kann, geht durch Affinität aus $y = \log \text{nat.}\, x$ hervor und ist daher eine W-Kurve. *Leibniz* u. a. haben sie auch *Exponentialkurve* genannt. Siehe Geschichtliches bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 542. Daselbst auch Eigenschaften der Kurve. Auch die ebenda p. 516—518 als *Debeaune'sche Kurven* bezeichneten Kurven gehören zu den obigen W-Kurven.

wo also die Summe der Exponenten gleich Null ist, und:

$$(22'') \qquad \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} - \log \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} = \text{const.}$$

Übrigens sind unter den Kurven (19″) auch algebraische enthalten, so auch die oben erwähnten Geraden und Kegelschnitte. Die Gleichungen (19″), (22″) stellen daher *überhaupt alle algebraischen und transcendenten W-Kurven der Ebene* dar.

Der Übergang zu homogenen Koordinaten liegt auf der Hand.

15. Sätze über allgemeine *W*-Kurven der ersten Art. Wie man durch Anwendung gruppentheoretischer Begriffe Eigenschaften den *W*-Kurven ableiten kann, sei nach *F. Klein* und *S. Lie* für die *W*-Kurven erster Art kurz erläutert. Dabei vgl. Fig. 10.

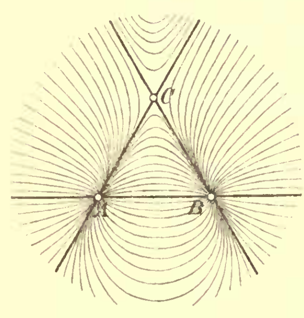


Fig. 10.

Zu den ∞^1 *W*-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der ersten Art gehört ein invariantes Dreieck ABC oder Δ. Es giebt aber ∞^2 projektive Transformationen, die die Ecken und Seiten von Δ invariant lassen. Sie bilden eine zweigliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_2$ von *vertauschbaren* [II A 6, Nr. 6] Transformationen, in der $\mathfrak{G}_1$ als Untergruppe enthalten ist. In $\mathfrak{G}_2$ giebt es eine Transformation, die einen beliebigen Punkt in einen beliebigen anderen Punkt überführt, vorausgesetzt, dass die Punkte nicht auf den Seiten von Δ liegen. Das dazu Dualistische gilt von den Geraden. Hieraus fliessen die folgenden Sätze, die des späteren wegen nummeriert seien:

[1] Eine *W*-Kurve der ersten Art kann nur in den Eckpunkten von Δ singuläre Punkte haben, und nur die Seiten von Δ können singuläre Tangenten sein[56a]. [2] Führt man eine projektive Transformation, die die Ecken und Seiten von Δ in Ruhe lässt, auf die *W*-Kurven einer zu Δ gehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1$ aus, so werden diese Kurven nur unter einander vertauscht. [3] Für alle *W*-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ist das Doppelverhältnis aus einem Kurvenpunkt und den Schnittpunkten seiner Tangente mit den Seiten von Δ dasselbe; dies Doppelverhältnis ist gleich dem der Tangente mit den Strahlen, die den Berührungspunkt mit den Ecken von Δ verbinden[57][58]. [4] Kon-

56 a) Die Klassifikation der singulären Stellen der durch Differentialgleichungen definierten Kurven bei *H. Poincaré*, J. de math. (3) 7 (1881), p. 375—422 [II A 4 a, Nr. 29], ist der Theorie der *W*-Kurven entnommen.

57) Sind x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten und u_1, u_2, u_3 zugehörige homogene Linienkoordinaten, sodass $\sum u_i x_i = 0$ aussagt, dass der Punkt

struiert man in jedem Punkt P einer W-Kurve von $\mathfrak{G}_1$ die Gerade, die mit den Strahlen, die P mit den Ecken von Δ verbinden, ein konstantes Doppelverhältnis bilden, so umhüllen die ∞^1 Geraden eine W-Kurve derselben Gruppe $\mathfrak{G}_1$. [5] Konstruiert man auf jeder Tangente einer W-Kurve von $\mathfrak{G}_1$ den Punkt, der mit den Schnittpunkten der Tangente mit Δ ein konstantes Doppelverhältnis bildet, so ist der Ort dieser Punkte eine W-Kurve derselben Gruppe $\mathfrak{G}_1$. [6] Zieht man von irgend einem Punkt Tangenten an alle W-Kurven von $\mathfrak{G}_1$, so ist der Ort der Berührungspunkte ein Kegelschnitt, der durch den Punkt und die Ecken A, B, C von Δ geht[59]). [7] Schneidet man alle W-Kurven durch eine Gerade und konstruiert in jedem Schnittpunkt die Tangente, so umhüllen die Tangenten einen Kegelschnitt, der die Gerade und die Seiten von Δ berührt. [8] Kennt man das Dreieck Δ und zwei Punkte einer W-Kurve, so kann man unendlich viele Punkte derselben Kurve durch lineare Konstruktion finden, ebenso aus zwei bekannten Tangenten unendlich viele. [9] Ist das Dreieck Δ reell, so gehen die reellen W-Kurven einer zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1$ durch zwei Ecken von Δ, in denen sie die Seiten berühren, die in der dritten Ecke zusammenlaufen. Sie meiden dagegen die dritte Ecke und die gegenüberliegende Seite. (Vgl. Fig. 10.)

F. Klein und *S. Lie* haben noch viele weitergehende Methoden zur Behandlung der W-Kurven angegeben. Um dies anzudeuten, wählen wir Δ als das Dreieck der x-, y-Axe und unendlich fernen Geraden. Alsdann werden die Transformationen

$$x' = ax^n, \quad y' = by^n$$

betrachtet, die wieder die W-Kurven einer zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1$

$(x_1 : x_2 : x_3)$ auf der Geraden $(u_1 : u_2 : u_3)$ liegt, so werden durch die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ auch u_1, u_2, u_3 linear homogen transformiert. Diese zweigliedrige Gruppe hat in x_1, x_2, x_3 und in u_1, u_2, u_3 eine von nullter Ordnung homogene Invariante, das obige Doppelverhältnis.

58) Wegen der Invarianz dieses Doppelverhältnisses oder *Wurfes* (nach *v. Staudt*'s Terminologie) heissen die Kurven W-Kurven (französisch courbes V). *G. Halphen* hat sie in seiner Étude sur les points singuliers des courbes algébriques, Anhang zu Salmon, Traité de géom. anal., traduit p. Chemin, Paris 1884, *anharmonische Kurven, G. Fouret* in den Par. C. R. 78 (1874), p. 1693—97, *spirales équiharmoniques* genannt. Letzterer findet solche Eigenschaften der W-Kurven, die schon *Klein* und *Lie* gefunden haben, von neuem.

59) Hieraus hat *V. Jamet,* Ann. éc. norm. (3) 4, supplém. (1887), p. 3—78, insbes. p. 21, 22, einen Satz abgeleitet: Der Kegelschnitt, der eine W-Kurve erster Art berührt und durch die Ecken des Dreiecks Δ geht, hat im Berührungspunkte doppelt so grosse Krümmung wie die W-Kurve. *G. Fouret* behauptet in den Par. C. R. 110 (1890), p. 778—781, insbes. p. 781, diesen Satz schon 1875 im Paris Soc. math. Bull. bewiesen zu haben.

in W-Kurven derselben Gruppe überführen[60]). Führt man ferner auf eine beliebige Kurve, die *keine* W-Kurve ist, und gleichzeitig auf einen beliebigen Punkt alle ∞^2 Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ aus, so erhält man eine Zuordnung zwischen allen ∞^2 Punkten und gewissen ∞^2 Kurven der Ebene, d. h. eine *Berührungstransformation*. Sie vertauscht alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ untereinander, u. s. w.[61]).

Bei passender Wahl des Dreiecks Δ geben die W-Kurven der ersten Art verschiedene wichtige Familien von transcendenten Kurven, die wir in Nr. **16**, **17** besprechen.

16. Logarithmische Spiralen. Zwei Ecken von Δ seien die imaginären Kreispunkte, die dritte der reelle Punkt O. Dann folgt aus Satz [3]: Alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ durchsetzen die von O ausgehenden Strahlen unter demselben Winkel α. Wird O als Pol von Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ gewählt, so ist also für die Kurven:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{d\mathfrak{r}}{d\theta} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

d. h.

$$\log\mathfrak{r} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\theta + \text{const.} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r} = \text{const.}\, e^{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\theta}.$$

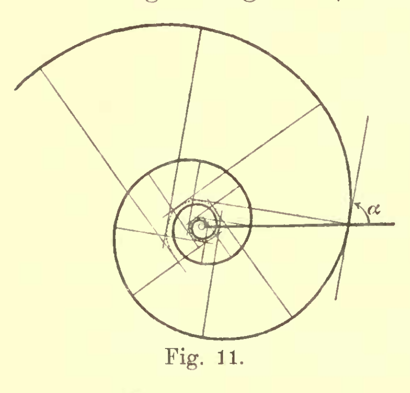


Fig. 11.

Diese Kurven heissen *logarithmische Spiralen*[62]) mit dem Pol O und dem Steigwinkel α. Der Pol O ist ihr einziger reeller singulärer, nämlich asymptotischer Punkt im Endlichen (s. Fig. 11). Die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ sind jetzt alle Ähnlichkeitstransformationen [I A 4, Nr. **6**; III A 5], die O fest lassen. Da $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{G}_2$ enthalten ist, so folgt: Jede logarithmische Spirale ist sich

60) In der Annalenarbeit p. 70 u. f. Sind zwei der invarianten Punkte die imaginären Kreispunkte, so sind diese Abbildungen konform. Insbesondere ist darin die Transformation durch reziproke Radien [III A 7] enthalten.

61) Wählt man als die Kurve eine Gerade, so erhält man dualistische Transformationen, die das Dreieck Δ invariant lassen. Es folgt dann: Die reziproke Polare [III C 1, Nr. **19**] einer W-Kurve hinsichtlich eines Kegelschnittes, die Δ zum Polardreieck hat, ist eine W-Kurve derselben Gruppe (Annalenarbeit p. 77), insbes. (vgl. Nr. **16**): Die *logarithmische Spirale* ist ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich jeder gleichseitigen Hyperbel, deren Mitte ihr Pol ist und die sie irgendwo berührt.

62) Bezüglich der Geschichte der logarithmischen Spiralen siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 448—454. *Descartes*, *Torricelli*, *Varignon* (von dem der Name herrührt) und *Jacob I Bernoulli* sind besonders zu nennen.

selbst ähnlich, indem man zwei beliebige ihrer Punkte als homolog setzen kann. Nach [2] folgt ferner: Alle logarithmischen Spiralen mit demselben Pol O und demselben Steigwinkel α sind einander ähnlich, d. h. nach dem vorigen kongruent. Aus Satz [4] folgt, wenn man das Doppelverhältnis harmonisch wählt: Die *Evolute einer logarithmischen Spirale* ist eine logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel[63]). Allgemeiner: Die Geraden n, die von den Punkten einer logarithmischen Spirale ausgehen und mit den jeweiligen Tangenten einen konstanten Winkel bilden, umhüllen eine logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel. Aus Satz [5] folgt: Die *Fusspunktkurve einer logarithmischen Spirale* ist, wenn der Pol der Kurve auch der Pol der Fusspunkttransformation ist, eine logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel. Dasselbe gilt, wenn man statt der Lote Geraden unter konstanter Neigung von O nach den Tangenten zieht. Aus Satz [6] folgt: Zieht man von einem Punkte P die Tangenten an alle Windungen eine logarithmischen Spirale (und an alle logarithmische Spiralen mit demselben Pol und demselben Steigwinkel), so ist der Ort der Berührungspunkte ein Kreis, der durch P und den Pol geht. Aus Satz [7] folgt: Konstruiert man in allen Schnittpunkten einer Geraden g mit einer logarithmischen Spirale (und mit allen logarithmischen Spiralen mit demselben Pol und demselben Steigwinkel) die Tangenten, so umhüllen die Tangenten eine Parabel, die g berührt und den Pol zum Brennpunkt hat. Aus Satz [8] folgt eine Konstruktion von beliebig vielen Punkten einer logarithmischen Spirale, sobald man deren zwei und den Pol kennt. Die Konstruktion geht auch sofort daraus hervor, dass jede logarithmische Spirale sich selbst auf unendlich viele Arten ähnlich ist. Analoges gilt, wenn man ausser dem Pol zwei Tangenten kennt, von der Konstruktion weiterer Tangenten.

Aus dem oben aus [6] abgeleiteten Satz folgt, wenn man von einem Punkte P der logarithmischen Spirale die Tangente an die Evolute (als logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel) zieht, dass der Krümmungsmittelpunkt K von P im Schnittpunkt der Normalen mit der Geraden liegt, die in O auf OP senkrecht steht. Hieraus folgt sofort die Rektifikation der Evolute,

---

63) Dass die Evolute wieder eine logarithmische Spirale ist, ebenso die Antevolute, die man erhält, wenn man jeden Krümmungsmittelpunkt an dem zugehörigen Kurvenpunkt spiegelt, dass ferner die Brennkurve einer logarithmischen Spirale bei Beleuchtung vom Pol aus und zwar bei Reflexion oder Refraktion wieder eine logarithmische Spirale ist, fand *Jacob I Bernoulli,* Acta Erud. 1792. Er nannte die Kurve daher eine *spira mirabilis.*

d. h. einer beliebigen logarithmischen Spirale: Der Bogen der logarithmischen Spirale vom Pol O bis zu einem Punkte P ist gleich der Strecke, die das in O auf OP errichtete Lot auf der Tangente abschneidet, sodass $\varrho = s \operatorname{ctg} \alpha$ oder, bei beliebiger Wahl der Anfangsstelle ($s = 0$):

$$A\varrho + Bs + C = 0$$

die *natürliche Gleichung der logarithmischen Spiralen* ist.

Aus den in Nr. **15** zum Schluss gegebenen Andeutungen folgt auch der Satz, dass die Transformation durch reziproke Radien mit O als Pol jede logarithmische Spirale, die O zum Pol hat, in eine von derselben Steigung und mit demselben Pol, aber von entgegengesetzter Windung, verwandelt. Doch ist dies auch direkt sofort zu sehen[64]).

17. Orthogonale Trajektorien konzentrischer ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen oder Hyperbeln. Das Dreieck Δ sei das der Koordinatenaxen und der unendlich fernen Geraden. Nach Satz [3], Nr. **15**, steht dann die Tangente des Winkels, den die Tangente der W-Kurve in einem Punkte P mit der x-Axe bildet, zu der Tangente des Winkels, den der Radiusvektor OP mit der x-Axe bildet, in einem konstanten Verhältnis. Die orthogonalen Trajektorien [III D 1, 2, Nr. 23] der W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ haben daher dann die Eigenschaft:

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = c,$$

64) Bezüglich des Anteils, den *F. Klein* und *S. Lie* einzeln an ihren gemeinsamen Arbeiten über W-Kurven haben, sei bemerkt, dass, als *Lie* sich mit den ∞^3 projektiven Transformationen beschäftigte, die ein Tetraeder invariant lassen, *Klein* ihn darauf aufmerksam machte, dass es Kurven giebt, die bei jenen Transformationen nur ∞^2 Lagen annehmen, indem er ihm dies auch analytisch durch Integrieren der betreffenden Differentialgleichungen zeigte. Dies war *Lie* damals ganz neu, hatte er diese Kurven doch auch in seiner Arbeit über die Reziprozitätsverhältnisse des *Reye*'schen Komplexes, Göttinger Nachr. 1870, p. 53—66, übersehen. Er erkannte aber sofort, welche ausgezeichneten Eigenschaften diese Kurven haben müssten. Von ihm rührt die allgemeine Aufstellung der in den Abhandlungen entwickelten Methoden und geometrischen Verwandtschaften her. *Klein* dagegen gebührt die genaue Diskussion der einzelnen Fälle, ferner die Aufdeckung der Beziehung zur Invariantentheorie der binären Formen [I B 2] („jede im Sinne der neueren Geometrie kovariante Kurve einer Kurve W ist eine Kurve W desselben Systems", Annalenarbeit p. 63), sowie der Zusammenhang mit der Metrik, namentlich die Entdeckung, dass die vielen merkwürdigen Eigenschaften der logarithmischen Spiralen nur ein Ausfluss aus der allgemeinen Theorie sind. Das Operieren mit projektiven Transformationen und Gruppen war *Klein* und *Lie* gleichmässig vertraut. Vgl. auch *M. Noether,* Math. Ann. 53 (1900), p. 1—41, insbes. p. 8.

wo die Konstante c für die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ charakteristisch ist. Sie sind also die Kurven:

$$y^2 = cx^2 + \text{const.}$$

Die W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ sind somit jetzt die orthogonalen Trajektorien einer Schar von ∞^1 konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen oder Hyperbeln[65]). Die Gleichungen der Kurven haben die in (19′), Nr. **14**, angegebene Form. Die interscendenten höheren Parabeln:

$$y = \text{const.}\, x^m$$

sind mithin die orthogonalen Trajektorien von ∞^1 konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen oder Hyperbeln.

18. Dreieckspotentialkurven und adiabatische Kurven. Sind l_1, l_2, l_3 die Seitenlängen eines Dreiecks Δ und x_1, x_2, x_3 die barycentrischen Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf das Dreieck, so nennt *G. de Longchamps*[66]) die Kurven, für die x_1, x_2, x_3 derselben Potenz der Seiten l_1, l_2, l_3 proportional sind, *Dreieckspotentialkurven.* Ihre Gleichungen sind, ausgedrückt mittels eines Parameters t:

$$x_1 = \varrho\, l_1^{\,t}, \quad x_2 = \varrho\, l_2^{\,t}, \quad x_3 = \varrho\, l_3^{\,t}.$$

Wird

$$\log \frac{l_2}{l_3} = \alpha_1, \quad \log \frac{l_3}{l_1} = \alpha_2, \quad \log \frac{l_1}{l_2} = \alpha_3$$

gesetzt, so giebt die Elimination von ϱ und t:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = 1,$$

wobei

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

ist. Diese Kurven sind also nach (19″), Nr. **14**, unter den W-Kurven der ersten Art enthalten. Sie gehen durch mehrere merkwürdige Punkte des Dreiecks Δ.

Auch die *adiabatischen Kurven* der Thermodynamik $pv^n = \text{const.}$ ordnen sich der Form (19′) unter[67]).

19. Sätze über W-Kurven der zweiten Art. Analog den in Nr. **15** angegebenen Betrachtungen lassen sich solche für W-Kurven der zweiten Art anstellen (s. Fig. 12). Es giebt zwar ∞^3 projektive Transformationen, die dieselben beiden Punkte und beiden Ge-

65) *G. Scheffers* in *Lie-Scheffers,* a. a. O. p. 78.

66) Mathesis 6 (1886), p. 246—248. Siehe auch *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 556.

67) Ihr Name soll herrühren von *M. Rankine,* A manual of the steam engine and other prime movers, London u. Glasgow, 1859. Vgl. *G. Zeuner,* Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Aufl., Leipzig 1877, p. 80 u. 130. Sie heissen auch *polytropische Kurven.*

raden (vgl. Nr. **14**) wie die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ einer Schar von W-Kurven der zweiten Art invariant lassen, aber unter ihnen giebt es wieder ∞^2, die unter einander vertauschbar sind und eine zweigliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_2$ bilden, die $\mathfrak{G}_1$ als Untergruppe enthält. Die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ vertauschen alle ∞^1 W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ unter einander. Doch gehen wir hierauf nicht näher ein und bemerken nur folgendes: Analog dem Satze [3], Nr. **15**, gilt hier ein Satz, nur tritt an die Stelle des Doppelverhältnisses ein anderer nicht so einfacher Ausdruck[68]). In dem besonderen Fall, dass die x-Axe die eine, die unendlich ferne Gerade die andere invariante Gerade und die unendlich fernen Punkte beider Axen die invarianten Punkte sind, d. h. für die *logarithmischen Kurven* (22) in Nr. **14**:

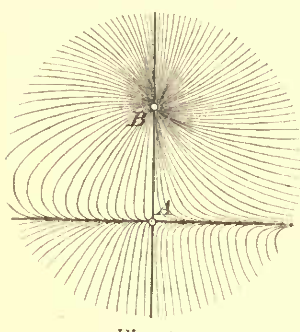


Fig. 12.

$$y = \text{const.}\, e^x$$

ist jener Ausdruck die *Subtangente.* Die Konstanz der Subtangente[69]) dieser logarithmischen Kurven ist also nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes. Analog dem in Nr. **17** angegebenen Satze gilt noch der Satz: Die *orthogonalen Trajektorien von ∞^1 kongruenten Parabeln mit derselben Axe* sind W-Kurven der zweiten Art[70]).

20. W-Kurven im Raume, gemeine Schraubenlinien. Auch im Raume sind die W-Kurven die Bahnkurven einer eingliedrigen projektiven Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Hier ist die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten dreizehn (s. Anm. 53). Beschränken wir uns auf den Fall, dass die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ die Ecken und Ebenen eines nicht ausgearteten Tetraeders in Ruhe lässt, so lauten die Gleichungen der ∞^2 W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$, wenn das Tetraeder als Koordinatentetraeder gewählt wird, analog (18), Nr. **14**, so[71]):

$$x_1 = \text{const.}\, e^{a_1 t}, \quad x_2 = \text{const.}\, e^{a_2 t}, \quad x_3 = \text{const.}\, e^{a_3 t}, \quad x_4 = \text{const.}\, e^{a_4 t}.$$

68) Wie früher, vgl. die Anm. 57, hat die Gruppe $\mathfrak{G}_2$, ausgedehnt auch auf die Linienkoordinaten, eine in x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 von nullter Ordnung homogene Invariante, die eben den fraglichen Ausdruck darstellt.

69) Nach *G. Loria* hat *Torricelli* diesen Satz zuerst ausgesprochen und *G. Grandi* ihn bewiesen. Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 543.

70) Nach *G. Scheffers* in *Lie-Scheffers,* a. a. O. p. 80.

71) Siehe z. B. *S. Lie,* Geometrie d. Berührungstransformationen 1, bearb. v. *Scheffers,* Leipzig 1896, p. 334. Gestattet eine Kurve der Ebene oder des Raumes mehr wie eine infinitesimale projektive Transformation, d. h. *ist sie in doppelter*

Das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Tangente einer W-Kurve die Ebenen des Tetraeders trifft, ist offenbar konstant. Daher werden uns diese Kurven in Nr. **35** abermals begegnen.

Erwähnt sei hier nur noch der wichtigste spezielle Fall: Ist die infinitesimale Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ eine unendlich kleine Schraubung [IV 2, Nr. **11**; IV 3, Nrr. **18, 19**], etwa um die z-Axe:

$$\delta x = - y\,\delta t, \quad \delta y = x\,\delta t, \quad \delta z = q\,\delta t \quad (q = \text{const.}),$$

so sind die zugehörigen ∞^2 W-Kurven die *gemeinen Schraubenlinien*:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \quad z = qt,$$

die sämtlich die z-Axe zur Axe und die gleiche Höhe $2\pi q$ eines Schraubenumganges haben. Für die gemeinen Schraubenlinien kann man daher Sätze analog denen von Nr. **15** aufstellen, Sätze, die der projektiven Geometrie angehören, obgleich die Kurven transcendent sind[72]).

Nach *V. Puiseux*[73]) lassen sich die gemeinen Schraubenlinien als diejenigen Kurven definieren, bei denen Krümmung und Torsion konstant ist [III D 1, 2, Nrr. **29, 30, 32**]. Aber *J. Lyon*[74]) hat gezeigt, dass es ausserdem gewisse imaginäre Kurven dritter Ordnung giebt, die dieselbe Eigenschaft haben. Die gemeinen Schraubenlinien können auch als die geodätischen Kurven der Rotationscylinder [III D 3, Nr. **14**] oder als die Loxodromen der Rotationscylinder (Nr. **34**) definiert werden. Letztere Definition versagt jedoch auf Cylindern von Minimalgeraden[75]).

Noch einige andere Kurven, die wir später besprechen, sind räumliche W-Kurven, nämlich die *sphärischen Loxodromen* und die *cylindrokonischen Schraubenlinien* (Nr. **34**).

Weise als W-Kurve aufzufassen, so ist sie algebraisch, nämlich eine Gerade, ein Kegelschnitt oder eine Raumkurve 3. Ordnung. Siehe z. B. *S. Lie,* Theorie der Transformationsgruppen, 3. Abschnitt, bearb. v. *Engel,* Leipzig 1893, p. 187.

72) Die Tangenten einer gemeinen Schraubenlinie gehören einem linearen Komplexe [III C 9] an, dessen Axe die des zugehörigen Cylinders ist. Die Schmiegungsebene eines Punktes der Kurve ist die dem Punkte vermöge des Komplexes zugeordnete Ebene. Nach *J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes, hgg. von *F. Klein,* 1. Abt., Leipzig 1868, p. 59—61, folgen hieraus viele Eigenschaften der gemeinen Schraubenlinie ohne weiteres, so die von *Th. Reye,* Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 64—66, angegebene. Vgl. auch die zweite Note von *F. Klein* und *S. Lie* in den C. R. 70 (1870), p. 1275—1279, bezüglich der Eigenschaften der räumlichen W-Kurven.

73) J. de math. (1) 7 (1842), p. 65—69. Synthetischer Beweis desselben Satzes bei *J. Bertrand,* ebenda 13 (1848), p. 423—424.

74) Grénoble Ann. de l'Enseignement sup. 2 (1890). Auch als Thèse, Paris. (Vom Verf. nicht eingesehen.)

75) Vgl. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 283 u. f.

III. Sinusspiralen und ihre Verallgemeinerungen.

21. Sinusspiralen. Die Kurven, die in Polarkoordinaten r, θ Gleichungen von der Form

$$r^n = a^n \sin n\theta \tag{23}$$

haben, heissen *Sinusspiralen*[76]). Sie sind ausserordentlich oft[77]) der

---

76) Diese Bezeichung, franz. *spirales sinusoïdes,* hat *Hâton de la Goupillière* eingeführt. Vgl. J. éc. polyt. 38 (1861), p. 15—112, insbes. p. 90. Wahrscheinlich schon in seiner Thèse, Paris 1857.

77) Einen Begriff hiervon giebt die folgende noch keineswegs vollständige Aufzählung von Arbeiten, in denen die Sinusspiralen vorkommen: *C. Maclaurin,* Treatise on fluxions 1, Edinburg 1740, Kap. 11, prop. 34, in der Ausgabe London 1801 p. 328—332, auch schon (nach *H. de la Goupillière*) in den Phil. Trans. 1718, Nr. 356; *G. C. di Fagnano,* Produzioni matematiche 2, Pesaro 1750, p. 375—412; ferner bei *Euler, L'Hospital* und *Riccati.* In neuerer Zeit: *G. Lamé,* J. de math. (1) 1 (1836), p. 77—87; *A. Serret,* J. de math. (1) 7 (1842), p. 114—119, ebenda 8 (1843), p. 495—501; *O. Bonnet,* ebenda 9 (1844), p. 97—112; *W. Roberts,* ebenda 10 (1845), p. 177—193; ebenda 12 (1847), p. 445—448; ebenda 13 (1848), p. 209—220; *J. Liouville,* ebenda p. 220; *W. Roberts,* ebenda 15 (1850), p. 209—214; *A. Winckler,* J. f. Math. 50 (1855), p. 34 (vgl. hierzu *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 401); *Hâton de la Goupillière,* Thèse, Paris 1857; J. éc. polyt. 38 (1861), p. 15—112; *E. Beltrami,* Ann. di mat. (1) 4 (1861), p. 102—108; *B. Tortolini,* Zeitschr. Math. Phys. 6 (1861), p. 209—213; *Allégret,* Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 30—32; *F. Unferdinger,* Archiv Math. Phys. (1) 51 (1870), p. 72—93; *J. F. Moulton,* Educ. Times 15 (1871), p. 81; *Allégret,* Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 162—167; Ann. éc. norm. (2) 2 (1873), p. 149—200; *L. Aoust,* Anal. infin. des courbes planes, Paris 1873, p. 141; *G. Darboux,* Sur une classe remarquable de courbes etc., Paris 1873 (Auszug in den Par. C. R. 68 (1869), p. 1311); *Hâton de la Goupillière,* Nouv. Ann. (2) 15 (1876), p. 97—108; *A. Mannheim,* Paris Soc. math. Bull. 4 (1876), p. 158, 159 (citiert hierbei *Archer Hirst*); *G. Holzmüller,* J. f. Math. 83 (1877), p. 38—42; *B. Niewenglowski,* Par. C. R. 84 (1877), p. 765—768; *H. Résal,* J. de math. (3) 6 (1880), p. 115—128; *A. Ribaucour,* Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, Bruxelles Mém. cour. 44, 1881; *G. Holzmüller,* Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 231—256, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1882, 9. Kap.; *E. M. Laquière,* Nouv. Ann. (3) 2 (1883), p. 118—129; *A. Bassani,* Giorn. di mat. 24 (1886), p. 23—43; *Du Chatenet,* Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 233—237; *H. Brocard,* ebenda p. 397—398; *V. Jamet,* Ann. de l'éc. norm. (3) 4 (1887), suppl. p. 3—78; *E. Cesàro,* Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 171—190; *V. Jamet,* Paris Soc. math. Bull. 16 (1888), p. 132—135; *A. de Saint-Germain,* Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle, 2. éd. Paris 1889, p. 155—156; Lord *M'Laren,* Edinb. Proc. Roy. Soc. 17 (1889), p. 281—297; *J. McMahon,* Educ. Times 50 (1889), p. 169—170; *A. Demoulin,* Sur une transformation géométrique, Bruxelles Mém. 44, 7 mars 1891; *G. Fouret,* Paris Soc. math. Bull. 20 (1892), p. 60—64; *R. Godefroy,* J. éc. polyt. 62 (1892), p. 37—46; Paris Soc. math. Bull. 21 (1893), p. 20—25; *J. M. Iversen,* Nyt Tidsskrift for

Gegenstand von Einzeluntersuchungen gewesen, namentlich die algebraischen, d. h. diejenigen, bei denen der *Index* n rational ist. Viele dieser Untersuchungen gelten jedoch ohne weiteres auch für irrationales n. Der Pol O der Polarkoordinaten ist im Endlichen der einzige singuläre Punkt der Kurve mit unbestimmter Tangente [III D 1, 2, Nr. **19**]. Durch Drehung der Kurve um ihren Pol O nimmt ihre Gleichung die Form an:

$$\mathfrak{r}^n = a^n \sin n\,(\theta - \alpha).$$

Durch ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung von O aus ändert sich nur a. Es giebt also ∞^2 *Sinusspiralen mit demselben Pol und demselben Index.* Sie sind *alle einander ähnlich,* und der Pol ist bei allen ein homologer Punkt [III A 6]. Allerdings machen wir hierbei zwischen reellen und imaginären Ähnlichkeitstransformationen keinen Unterschied[78]).

22. Abbildung der Geraden der Ebene als Sinusspiralen. Der innere Grund für viele merkwürdige Eigenschaften der Sinusspiralen liegt in einem Satze von *C. Maclaurin,* der bei *W. Roberts*[79]) wiederkehrt. Sind $\mathfrak{r}_0, \theta_0$ und $\mathfrak{r}, \theta$ Polarkoordinaten in zwei zusammenliegenden Ebenen, so stellen die Gleichungen:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0^{\,m}, \quad \theta = m\theta_0 \tag{24}$$

bei gegebenem rationalen oder irrationalen m eine Punkttransformation dar, die *konform* ist [II B 1, Nrr. **5**, **18**]. Denn in rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0 bezw. x, y kann (24) so geschrieben werden[80]):

$$x + iy = (x_0 + iy_0)^m. \tag{25}$$

Bei irrationalem m dürfte (24) wohl die *einfachste transcendente konforme Abbildung der Ebene* vorstellen. Sie führt nun nach *Maclaurin*

Math. 4 (1893), p. 59—67; *H. Ekama,* Archiv Math. Phys. (2) 12 (1894), p. 23—36; *E. Barisien,* Nouv. Ann. (3) 14 (1895), p. 233—244; *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1898, p. 261—294; *R. C. Archibald,* Diss. Strassburg 1900; *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie 1901, p. 54 u. f.; *G. Loria,* Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 392—440, insb. p. 396; Spezielle Kurven, 1902, p. 367, 391—403, 614, 675, 732.

Viele von diesen Arbeiten behandeln allerdings nur *algebraische* Sinusspiralen. Ausserdem giebt es noch viele Untersuchungen über einzelne Sinusspiralen, die wir nicht citiert haben.

78) Unter den algebraischen Sinusspiralen sind viele besonders bemerkenswerte Kurven enthalten, so der Kreis ($n = 1$), die Lemniskate ($n = 2$), die Kardioide ($n = \frac{1}{2}$), die Parabel ($n = -\frac{1}{2}$), die Gerade ($n = -1$), die gleichseitige Hyperbel ($n = -2$) u. s. w. Siehe *Haton de la Goupillière,* a. a. O. 1876, p. 97, 98.

79) Fussn. 77, 1740 bez. 1848.

80) *J. Liouville*, Fussn. 77, 1848; vgl. auch *G. Holzmüller*, Isog. Verwandtschaften, Leipzig 1882, p. 166—171.

die Geraden der Ebene $(\mathfrak{r}_0, \theta_0)$ in Sinusspiralen der Ebene $(\mathfrak{r}, \theta)$ über. In Polarkoordinaten $\mathfrak{r}_0, \theta_0$ ist nämlich

$$\mathfrak{r}_0 \cos(\theta_0 - \alpha) = p$$

die Gleichung einer allgemein gewählten Geraden, bei der p den Abstand vom Anfangspunkt und α seinen Winkel mit dem Anfangsstrahl bedeutet. Führen wir auf die Gerade die Transformation (24) aus, so geht sie in die Kurve:

$$\mathfrak{r}^{\frac{1}{m}} \cos\left(\frac{\theta}{m} - \alpha\right) = p,$$

d. h., wenn $-1 : m = n$ gesetzt wird, in die Sinusspirale:

$$\mathfrak{r}^n = \frac{1}{p} \sin\left(n\theta + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

über. Hieraus folgt: Alle ∞^2 Geraden der Ebene gehen vermöge der konformen Abbildung (24) in alle ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol O und demselben Index $n = -1 : m$ über. Nach den *S. Lie*schen Theorien kann man hieraus methodisch die Eigenschaften der Sinusspiralen ableiten: Da die Schar aller ∞^2 Geraden der Ebene ∞^8 Punkttransformationen, nämlich die allgemeine projektive Gruppe [II A 6, Nr. 20], gestattet, so *gehen alle* ∞^2 *Sinusspiralen mit demselben Pol und demselben Index vermöge einer achtgliedrigen Gruppe von Punkttransformationen in einander über.* Jede einzelne bleibt bei einer sechsgliedrigen Gruppe invariant. Doch ist der hierdurch angedeutete Weg bisher nicht eingeschlagen worden.

Giebt man in (24) dem Exponenten m beliebige konstante Werte, so liegt in (24) eine eingliedrige Gruppe von konformen Punkttransformationen vor, die unter anderen die Transformation durch reziproke Radien enthält. Die Aufeinanderfolge der zu den Exponenten m und μ gehörigen Transformationen (24) ist der Transformation (24) mit dem Exponenten $m\mu$ äquivalent. Daraus folgt, wenn $n = -1 : m$, also $-1 : m\mu = n : \mu$ gesetzt wird: Die Sinusspiralen mit gemeinsamem Pol O und vom Index n gehen vermöge der konformen Abbildung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0^{\mu}, \quad \theta = \mu\theta_0$$

in die Sinusspiralen mit gemeinsamem Pol O und vom Index $n : \mu$ über[81]). Insbesondere geht jede Sinusspirale vom Index n vermöge einer Transformation durch reziproke Radien, deren Pol der Pol der Kurve ist, in eine Sinusspirale vom Index $-n$ über.

Führt man die Gesamtheit *aller* ∞^1 konformen Transformationen

81) *E. Cesàro,* Fussn. 77, 1888, p. 188; 1901, p. 65.

(24), angefangen von der identischen $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$, $\theta = \theta_0$, auf eine Gerade aus, so geht diese Gerade stetig in die Gestalten *aller* Sinusspiralen von beliebigen Indices über.

Betrachtet man eine Schar von parallelen Geraden und dreht sie um O, so bilden die neuen Geraden mit den alten einen konstanten Winkel. Daraus folgt, wenn die konforme Abbildung (24) ausgeübt wird: Dreht man alle ∞^1 Sinusspiralen

$$\mathfrak{r}^n = \text{const.} \sin n\theta$$

um den gleichen Winkel um den Pol, so schneiden die neuen Sinusspiralen die alten unter einem konstanten Winkel. Überhaupt *alle* ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol O und demselben Index n können definiert werden als diejenigen Kurven, die die soeben angegebenen ∞^1 Sinusspiralen unter konstanten Winkeln durchsetzen. In jedem Punkte P der Ebene bilden die Krümmungskreise der hindurchgehenden ∞^1 Sinusspiralen ein Büschel, nach einem allgemeineren Satze von *E. Cesàro* [82]). Daraus kann man schliessen [83]): Die ∞^2 Sinusspiralen mit dem Pol O und dem Index n und die ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol O und dem Index $-n$ liegen so, dass alle Krümmungskreise der durch einen Punkt P gehenden Sinusspiralen der ersten Schar einen zweiten Punkt Q gemein haben und hier zugleich die Krümmungskreise aller durch Q gehenden Sinusspiralen der zweiten Schar sind. Dabei liegen P und Q auf einem Strahl durch O und zwar ist:

$$OP : OQ = (n - 1) : (n + 1).$$

23. Einige Eigenschaften der Sinusspiralen. Aus der konformen Abbildung folgt, was auch durch Rechnung sofort zu bestätigen ist, dass bei der Sinusspirale (23) vom Index n der Winkel τ des Radiusvektors und der Tangente den Wert $\tau = n\theta$ hat, sodass

$$\frac{d(\tau + \theta)}{d\theta} = n + 1$$

ist, d. h. beim Fortschreiten auf der Sinusspirale ist das Verhältnis aus der Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Tangente und der Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Radiusvektors konstant, nämlich gleich $(n + 1) : 1$. Umgekehrt: Eine Kurve, bei der dies Verhältnis den konstanten Wert $(n + 1) : 1$ hat, ist eine Sinusspirale vom Index n, die den Anfangspunkt der Radienvektoren zum Pol hat [84]). Aus der bekannten Konstruktion der Tangente der Fuss-

82) Natürliche Geometrie, p. 148, vgl. auch III D 1, 2, Nr. 23.

83) *G. Scheffers,* Fussn. 77, 1898, p. 292.

84) Deshalb nennt *Laquière,* Fussn. 77, 1883, p. 121 die Sinusspiralen *courbes*

punktkurve [III D 1, 2, Nr. 7] folgt hieraus: *Die Fusspunktkurve einer Sinusspirale* ist, wenn ihr Pol als Pol der Fusspunktransformation genommen wird, eine Sinusspirale mit demselben Pol und dem Index $n:(n+1)$. Allgemein: Die k^{te} *Fusspunktkurve* ist eine Sinusspirale vom Index $n:(kn+1)$. Dies gilt auch für negatives k, ja auch für gebrochenes oder irrationales k, wenn man die *stetige* Gruppe von Fusspunkttransformationen mit dem Pole O benutzt, die *S. Lie* eingeführt hat[85]).

Ist ds das zum Zuwachs $d\theta$ der Amplitude gehörige Bogenelement der Sinusspirale (23), so ist:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\mathfrak{r}}{\sin n\theta} = \frac{a^n}{\mathfrak{r}^{n-1}}.$$

Der zugehörige Kontingenzwinkel ist gleich $(n+1)d\theta$, also der Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{ds}{(n+1)d\theta} = \frac{\mathfrak{r}}{(n+1)\sin n\theta} = \frac{a^n}{(n+1)\mathfrak{r}^{n-1}}.$$

Die Projektion von ϱ auf den Radiusvektor hat daher die Länge:

$$\varrho \sin n\theta = \frac{\mathfrak{r}}{n+1}.$$

Die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor verhält sich also zum Radiusvektor wie $1:(n+1)$.[86]) Der Ort der Projektionen der Krümmungsmittelpunkte auf die zugehörigen Radienvektoren ist daher eine der ursprünglichen Sinusspirale ähnliche Sinusspirale.

Umgekehrt: Steht bei einer ebenen Kurve die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor zu diesem in einem konstanten Verhältnis $1:(n+1)$, so ist die Kurve eine Sinusspirale vom Index n, die den Anfangspunkt der Radienvektoren zum Pol hat. Oder: Dann und nur dann, wenn die Kurve eine Sinusspirale vom Index n ist, schneidet der Krümmungskreis eines Kurvenpunktes auf dem zugehörigen Radiusvektor eine Strecke ab, die zum Radiusvektor in dem konstanten Verhältnis $2:(n+1)$ steht.

Anscheinend liegt für $n=0$ eine Ausnahme vor, denn die Kurve, bei der die Projektion des Krümmungsmittelpunktes auf dem Radiusvektor im Pole O liegt, ist nach Nr. 16 eine *logarithmische Spirale.*

---

spirales à inflexion proportionelle. A. Ribaucour, Fussn. 77, 1881, nennt sie dagegen *Lamé'sche Kurven* (vgl. *G. Lamé,* a. a. O. 1836). *Allégret,* a. a. O. 1873, p. 167, nennt sie *orthogénides. G. Holzmüller,* J. f. M. 83 (1887), p. 40, nennt sie *Hyperbeln höherer Ordnung. E. Cesàro,* Natürl. Geom. p. 63, findet den Namen Sinusspiralen doppelt unzutreffend.

85) Siehe *Lie-Scheffers,* Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896, p. 65.

86) *A. Serret,* Fussn. 77, 1842, p. 118.

Aber die logarithmischen Spiralen sind thatsächlich als Sinusspiralen vom Index 0 *aufzufassen.* Da nämlich die Sinusspirale (23) nach Drehung und ähnlicher Vergrösserung wieder eine wird, so liegt in:

$$\left(\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)^n = \frac{\sin(n\theta + \alpha)}{\sin\alpha}$$

eine Sinusspirale vor; doch giebt diese Gleichung für $n = 0$ eine Identität. Aber es ist:

$$\lim_{n=0} \frac{\left(\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)^n - \frac{\sin(n\theta+\alpha)}{\sin\alpha}}{n} = \log\frac{\mathfrak{r}}{a} - \operatorname{ctg}\alpha\cdot\theta,$$

d. h. für $n = 0$ geht die logarithmische Spirale hervor[87]):

$$\log\frac{\mathfrak{r}}{a} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\theta.$$

Der obige Satz über die Sinusspiralen kann auch so ausgesprochen werden: Es ist für die Sinusspiralen charakteristisch, dass der Krümmungsradius ϱ zu demjenigen Abschnitt ν der Normalen, der vom Kurvenpunkt P und dem Lote p zu OP in O begrenzt wird, ein konstantes Verhältnis $1:(n+1)$ hat[88]).

24. Rektifikation der Sinusspiralen. Aus (26) und (23) ergiebt sich für die Bogenlänge s der Sinusspirale:

$$s = a\int(\sin n\theta)^{\frac{1-n}{n}}\,d\theta.$$

A. Serret hat den Bogen innerhalb gewisser Grenzen durch *Euler*'sche Integrale zweiter Gattung [II A 3, Nr. **12**a] ausgedrückt[89]). Er benutzt die Gleichung der Sinusspirale in der Form:

$$\mathfrak{r}^n = a^n\cos n\theta, \tag{26}$$

die aus (23) durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ hervorgeht. Hier kommt:

$$s = a\int(\cos n\theta)^{\frac{1-n}{n}}\,d\theta.$$

Wird $\vartheta = n\theta$ als Veränderliche eingeführt, so kommt:

$$s = \frac{a}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\vartheta)^{\frac{1-n}{n}}\,d\vartheta$$

87) *Allégret,* Fussn. 77, 1872, p. 163.

88) Bei reellen Kurven giebt das positive oder negative Vorzeichen des Verhältnisses $1:(n+1)$ an, ob ϱ und ν auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten des Kurvenpunktes P liegen.

89) *Serret,* Fussn. 77, 1842, p. 118. Es ist dies einer der Hauptgründe, weshalb sich so viele Mathematiker mit den Sinusspiralen beschäftigt haben.

als *Länge des Bogens von* $\theta = 0$ *bis* $\theta = \frac{\pi}{2n}$. Dies aber lässt sich so schreiben:

$$s = \frac{a}{n} \cdot 2^{\frac{1-2n}{n}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Haton de la Goupillière[90]) hat die zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2n}$ gelegene *Fläche* durch Γ-Funktionen ausgedrückt.

25. Triangulär- und tetraedral-symmetrische Kurven. Die Sinusspiralen sind ein Grenzfall einer allgemeineren von *J. de la Gournerie* 1865/66 untersuchten Klasse von Kurven[91]). Betrachtet man z. B. die Sinusspirale in der Form:

$$\mathfrak{r}^n \cos n\theta = k,$$

so lässt sich dafür schreiben:

$$(\mathfrak{r}e^{i\theta})^n + (\mathfrak{r}e^{-i\theta})^n = 2k$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten[92]):

$$(x + iy)^n + (x - iy)^n = 2k.$$

Diese Gleichung ordnet sich aber der allgemeinen Gleichung unter:

$$(27) \qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^n = 0,$$

in der x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten sind. Man braucht nämlich nur zwei Ecken des Koordinatendreiecks in die imaginären Kreispunkte zu verlegen. Die Kurven (27) heissen nach *J. de la Gournerie* *triangulär-symmetrische Kurven.* Sie sind ein Grenzfall von Raumkurven, die er *tetraedral-symmetrische Kurven* nennt und — im Falle homogener Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 im Raume — als Schnittkurven zweier *tetraedral-symmetrischen Flächen*:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^n + \left(\frac{x_4}{a_4}\right)^n = 0,$$

$$\left(\frac{x_1}{b_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{b_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{b_3}\right)^n + \left(\frac{x_4}{b_4}\right)^n = 0$$

90) Fussn. 77, 1876, p. 105; später auch *G. Loria*, siehe Spezielle Kurven, p. 395.

91) Recherches sur les surfaces reglées tetraédrales, Paris 1867. Hierin sind die drei Abhandlungen vereinigt, die 1865 und 1866 in dem Recueil des Savants étrangers veröffentlicht worden waren.

92) In dieser Form traten die Sinusspiralen bei *E. Beltrami*, Fussn. 77, 1861, auf, als er die Scharen von ∞^1 ebenen Kurven suchte, die, um einen festen Punkt der Ebene gedreht, stets die ursprünglichen Kurven unter einem für alle Kurven konstanten Winkel schneiden sollten. Vgl. Nr. 22. Siehe auch *V. Jamet*, a. a. O. 1888, p. 133; *G. Fouret*, a. a. O. 1892, p. 62.

definiert. (Für $b_1 = b_2 = b_3 = \infty$ geht hieraus $x_4 = 0$ und also (27) als Grenzfall hervor.) Doch sind diese Kurven im wesentlichen nur für den Fall, dass n eine rationale Zahl ist, also wenn sie algebraisch sind, betrachtet worden. Wir erwähnen deshalb nur einen Satz von *V. Jamet*[93]), der auch für die transcendenten Kurven gilt, und zwar beschränken wir uns dabei auf die triangulär-symmetrischen Kurven: Konstruiert man den Kegelschnitt, der die Kurve (27) in einem ihrer Punkte berührt und durch die Ecken des Koordinatendreiecks geht, so steht der Krümmungsradius des Kegelschnitts zu dem der Kurve an der gemeinsamen Stelle im Verhältnis $(1 - n):2$. Im Raume giebt es einen analogen Satz, in dem eine Kurve dritter Ordnung an die Stelle des Kegelschnittes tritt[94]).

Die triangulär-symmetrischen Kurven (27) gehen aus den Geraden der Ebene:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

mittels der Transformationen von der Form:

$$x_1' = c_1 x_1^n, \quad x_2' = c_2 x_2^n, \quad x_3' = c_3 x_3^n$$

hervor.

26. Cesàro'sche, insbesondere Ribaucour'sche Kurven. Die Sinusspiralen gehören fernerhin einer anderen grösseren Kurvenfamilie an, die besonders von *E. Cesàro*[95]) untersucht und deshalb nach ihm benannt worden ist[96]). Es sind dies diejenigen ebenen Kurven, die in Bezug auf einen festen Kreis k (die *Direktrix*) die Eigenschaft haben, dass ihr Krümmungsradius ϱ demjenigen Abschnitt $\nu = PN$ der Normalen proportional ist, der vom Kurvenpunkte P einerseits und von der Polaren p, die P hinsichtlich des Kreises k hat, andererseits begrenzt wird. (Fig. 13.) Das konstante Verhältnis sei mit $1:(n+1)$ bezeichnet, und zwar soll bei reellen Kurven das Vorzeichen des Verhältnisses angeben, ob ϱ und ν auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von P liegen. Die Mitte O des Kreises k heisst der *Pol* der

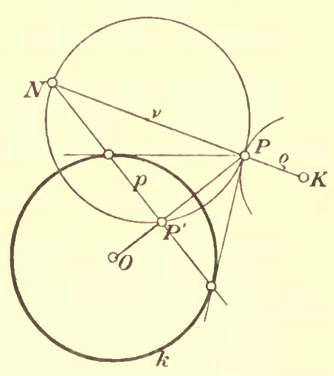


Fig. 13.

93) Fussn. 77, 1887, p. 19.

94) Fussn. 77, 1887, p. 32.

95) Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 171—190; ebenda 9 (1890), p. 143—157; ebenda 13 (1894), p. 102—106; Natürliche Geometrie, p. 54—66.

96) Nach Vorschlag von *E. Wölffing,* Biblioth. math. (3) 1 (1900), p. 142—159, insbes. p. 146 Anm.

Kurve, die Zahl n ihr *Index.* Ist der Kreis insbesondere der Punkt O selbst, so ist die Polare p das in O auf OP zu errichtende Lot, die Kurve also in der That nach Nr. **23**, Schluss, eine Sinusspirale vom Index n.

E. Cesàro zeigte, dass der von O ausgehende Radiusvektor OP der Cesàro'schen Kurve den Krümmungsradius der Evolute in dem konstanten Verhältnis $-(n+1):2n$ teilt und dass diese Eigenschaft als Definition der Kurve benutzt werden kann[97]). Die Kreise ferner, deren Durchmesser die Strecken v sind, d. h. also die Kreise, die die Cesàro'sche Kurve berühren und den Direktrixkreis k senkrecht schneiden, umhüllen ausser der Cesàro'schen Kurve eine zweite Kurve, deren Punkte P' die Stellen sind, in denen die Polaren p der Punkte P die Radienvektoren OP treffen. Da dann $OP \cdot OP' = R^2$ ist, wenn R der Radius der Direktrix ist, so ist die Kurve (P') zur Cesàro'schen Kurve (P) hinsichtlich des Kreises k invers.

Die natürliche Gleichung der Cesàro'schen Kurven vom Index n hat nach *E. Cesàro*[98]) die Form:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{R^2}{c^2}\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}, \tag{28}$$

wo s die Bogenlänge, c eine willkürliche Konstante bedeutet.

Unter den Cesàro'schen Kurven sind viele bekannte Kurven enthalten. So gehören zum Index 1 die Kreise, zum Index -2 alle Kegelschnitte, zum Index 0 diejenigen Kurven, bei denen der Krümmungsmittelpunkt eines Kurvenpunktes P der Schnittpunkt seiner Normalen mit der Polaren p von P hinsichtlich des Kreises k ist. In diesem Fall $n = 0$ nimmt die natürliche Gleichung die Form an[99]):

$$\varrho^2 = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma,$$

die die *cykloidalen Kurven,* insbesondere die Cykloiden, die Kreisevolventen und die logarithmischen Spiralen definiert (siehe Nr. 8 und Anm. 29, vgl. auch Nr. 3 und Anm. 7).

Im Falle $R = 0$ geht aus (28) die *natürliche Gleichung der Sinusspiralen vom Index n hervor*[100]):

97) Fussn. 77, 1894, p. 104; Natürl. Geometrie, p. 54.

98) Natürliche Geometrie, p. 56.

99) Ebenda p. 58. Siehe auch a. a. O. 1888, p. 175—178, wobei *Mennesson,* Mathesis, question 461 (1885), für eine Eigenschaft dieser Kurven citiert wird. Auch *E. Cesàro,* Mathesis 7 (1887), p. 25—38.

100) *E. Cesàro,* Natürl. Geometrie, p. 61.

$$s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{d\varrho}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}}-1}}. \tag{29}$$

Ein anderer Grenzfall ist der, dass die Konstante c in (28) nach Null oder Unendlich konvergiert, indem zugleich der Radius R des Direktrixkreises nach Unendlich strebt. Denn es bleibt die natürliche Gleichung (28) nach *E. Cesàro* endlich, wenn man $c^{\frac{2n}{n-1}}$ und R unbegrenzt wachsen lässt und dabei festsetzt:

$$R = c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}},$$

wo a eine endliche Konstante sei. Alsdann geht aus (28) die natürliche Gleichung hervor:

$$s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}}-1}}, \tag{30}$$

die also für diejenigen Cesàro'schen Kurven gilt, bei denen der Direktrixkreis in eine Gerade g ausgeartet ist. Alsdann ist die Polare p von P diejenige Parallele zu g, die auf der andern Seite von g wie P, aber in demselben Abstand liegt. Mithin sind diese Kurven durch die Eigenschaft charakterisiert, dass das Verhältnis aus dem Krümmungsradius ϱ zu demjenigen Abschnitt $\frac{v}{2}$ der Normalen, der einerseits vom Kurvenpunkte P und andererseits von der festen Geraden g begrenzt wird, den konstanten Wert $2:(n+1)$ hat. Diese Kurven hat man *Ribaucour'sche Kurven* genannt, obgleich sie schon vor *A. Ribaucour* betrachtet worden sind[101])[102]).

101) Mit Recht heben *E. Wölffing*, Biblioth. math. (3) 1 (1900), p. 142—159, insbes. p. 146, Anm., und *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 522, hervor, dass der Name: Ribaucour'sche Kurven nicht der richtige ist. Einige Litteratur über diese Kurven, zum Teil den genannten Schriften entnommen, sei hier zusammengestellt: *P. Varignon*, Paris Mém. 1710, p. 161; *Joh. I Bernoulli*, Brief an Leibniz 1716 (Leibniz ed. Gerhardt 3, p. 958), auch Opera 2, p. 290—291, *L. Euler*, Petropol. Comment. 10 (1747), p. 164—180; *A. Farcy*, Nouv. Ann. (1) 3 (1844), p. 528—533 (doch nur für einen speziellen Fall); *Parvé*, De curvis funicularibus, Diss. Groningen 1847, p. 88—89; *A. Müller*, Bestimmung der Kurven u. s. w., Diss. Jena 1867; *Weerth*, Über eine Klasse von Kurven u. s. w., Progr. Celle 1874; *E. Dubois*, Nouv. Corresp. math. 6 (1880); *H. Résal*, J. de math. (3) 6 (1880), p. 115—128; *J. Hammond* und *G. Heppel*, Educat. Times 34 (1881), p. 72, 73; *A. Ribaucour*, Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne

Wählt man insbesondere der Index n der Ribaucour'schen Kurven gleich Null, so gehen die Kurven hervor, bei denen der Krümmungsradius von der bis zu einer festen Geraden g gehenden Normalen halbiert wird. Es sind dies die *gemeinen Cykloiden* (vgl. Nr. 9). Ist $n = 1$, so ergeben sich die *Kreise*, deren Mitten auf der festen Geraden liegen, ist $n = -2$, so gehen die *Parabeln* hervor, die die feste Gerade zur Leitlinie haben. Für $n = -3$ ergeben sich diejenigen Kurven, bei denen der Krümmungsradius entgegengesetzt gleich dem Normalenabschnitt, gerechnet bis zu einer festen Geraden g, ist. Von diesen Kurven, den *Kettenlinien*, werden wir sogleich sprechen. Vorher sei noch bemerkt, dass *A. Ribaucour* die Ribaucour'schen Kurven, bei denen das Verhältnis $\varrho : \frac{v}{2} = 2 : (n+1)$ eine ganze Zahl ist, in vier Familien eingeteilt hat, deren Typen die vier soeben genannten Kurven sind, und die er daher Kurven von cykloidischer, cirkularer, parabolischer und katenoidischer Art nennt[103]) [104]).

27. Kettenlinien und Traktricen. Die Ribaucour'schen Kurven vom Index $n = -3$, d. h. diejenigen Kurven, bei denen der Krümmungsradius entgegengesetzt gleich demjenigen Abschnitt der Normalen ist, der von dem Kurvenpunkte und einer festen Geraden begrenzt wird, sind die Gleichgewichtskurven, deren Gestalt ein unendlich dünner, durchaus biegsamer homogener Faden unter dem Einfluss

---

nulle, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1881), insbes. Kap. XIV; *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 171—190, insbes. p. 178—181; Natürliche Geometrie, p. 54 u. f.; *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 521—530.

102) *E. Cesàro* hat die Kurven mit der natürlichen Gleichung:

$$s = k \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n - 1}},$$

die die Gleichungen (29) und (30) als spezielle Fälle umfasst, in mehreren Arbeiten studiert: Nouv. Ann. (3) 9 (1890), p. 143—157; El progreso matemático 2 (1892), p. 212—214 (vgl. Fortschr. d. Math. 24, p. 708); Nouv. Ann. (3) 13 (1894), p. 102—106; ebenda 19 (1900), p. 489—494; Natürliche Geometrie, p. 76, 77.

103) *A. Ribaucour*, a. a. O. p. 161—164. Näheres über die Ribaucour'schen Kurven findet man bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 521—530.

104) Nach *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 13 (1894), p. 102—106, insbes. p. 104, haben nur die *Evoluten der Ribaucour'schen Kurven* die Eigenschaft, *dass ihre Bogenlänge als Potenz der Abscisse, multipliziert mit einer Konstanten,* ($s = ax^n$) ausdrückbar ist. Die Kurven, die durch diese letztere Eigenschaft charakterisiert sind, wurden früher von *C. Nies*, Progr. Realgym. Darmstadt 1886, und *Rich. Müller*, Progr. Kgl. Realsch. Berlin 1889, untersucht, aber ohne dass die Identität mit den Evoluten der Ribaucour'schen Kurven bemerkt wurde.

der Schwere allein annimmt, und heissen daher *Kettenlinien*[105]). Ist die feste Gerade (Leitlinie oder Direktrix) die x-Axe, so hat der Krümmungsmittelpunkt eine y-Koordinate, die doppelt so gross als die y-Koordinate des Kurvenpunktes sein muss, so dass sich, wenn der Strich die Differentiation nach der Bogenlänge s ausdrückt, ergiebt:

$$y + \frac{x'^2}{y''} = 2y$$

oder $x'^2 = yy''$. Da $x'^2 + y'^2 = 1$ ist, folgt hieraus:

$$\frac{d\,yy'}{ds} = 1,$$

also

$$y^2 = s^2 + 2bs + a^2.$$

Bei passender Wahl der Anfangsstelle der Bogenlänge darf einfacher $y = \sqrt{s^2 + a^2}$ gesetzt werden. Dann ist $x' = \sqrt{1 - y'^2}$ leicht zu berechnen, sodass $x = a \log(s + \sqrt{s^2 + a^2}) +$ const. kommt. Wird die y-Axe durch denjenigen Punkt der Kurve gelegt, in dem die Tangente der Leitlinie parallel ist, so kommt:

$$(31) \qquad x = a \log \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}, \quad y = \sqrt{s^2 + a^2},$$

daraus durch Elimination von s:

$$(32) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Alle Kettenlinien sind einander ähnlich und von parabelartiger Gestalt (s. Fig. 14). Ist die y-Axe die Vertikale und zwar positiv nach oben, so stellt (32) die Gleichgewichtsfigur des hängenden Fadens dar. Dabei ist die Bogenlänge s vom tiefsten Punkte der Kurve aus gerechnet. Da die Kettenlinie eine Ribaucour'sche Kurve vom Index $n = -3$ ist, so ist aus (30) in Nr. 26 ihre natürliche Gleichung sofort abzuleiten. Noch bequemer geht sie hervor, wenn man bedenkt, dass der Krüm-

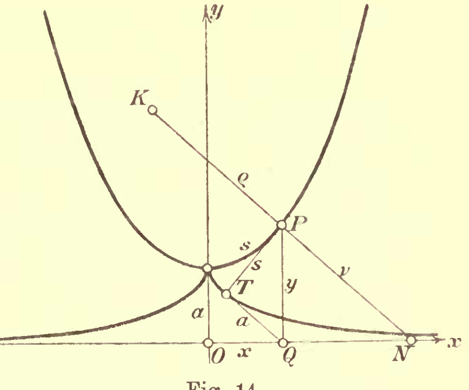


Fig. 14.

105) *Jacob I Bernoulli,* Acta Eruditorum, Mai 1690, auch Opera 1, p. 246, stellte die Frage nach der Gleichgewichtsform des Fadens, die *Galilei* für eine Parabel gehalten hatte. *Huygens, Leibniz* und *Joh. Bernoulli* gaben die Antwort. Geschichtliches siehe bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 574, 575, und IV C, Abschn. III.

mungsradius der bis zur x-Axe gemessenen Normalen ν entgegengesetzt gleich ist. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

also folgt als natürliche Gleichung:

$$\varrho = \frac{s^2 + a^2}{a}.$$

Die Fläche, die zwischen der Kettenlinie, der Leitlinie, der Ordinate des tiefsten Punktes und der zum Bogen s gehörigen Ordinate liegt, ist gleich as.[106]) Trägt man auf der Tangente eines Kurvenpunktes (s) und zwar in der Richtung nach dem tiefsten Punkte hin die Bogenlänge s auf, so ist diese Strecke eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse y ist und dessen andere Kathete nach (31) die konstante Länge a hat. Demnach ist diejenige *Evolvente* [III D 1, 2, Nr. **16**] *der Kettenlinie,* die im tiefsten Punkte der Kurve beginnt, *eine Kurve, deren Tangente, gemessen bis zur x-Axe, eine konstante Länge a hat,* eine sogenannte *Traktrix*[107]).

---

106) Sonstige Eigenschaften der Kettenlinie (*Seilkurve, Segelkurve, Velaria*) siehe bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 576—578. Unter *Kettenlinie gleichen Widerstandes* (auch *Longitudinale* genannt) versteht man die Gleichgewichtslage eines Fadens unter Einwirkung der Schwere, wenn die Spannung überall der Dicke des Fadens proportional ist. Sie wurde von *G. Coriolis,* J. de math. (1) 1 (1836), p. 75, 76, bestimmt. Ihre Gleichung ist:

$$e^{\frac{y}{a}} \cos \frac{x}{a} = 1.$$

Ihre natürliche Gleichung ist:

$$\varrho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

siehe *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, p. 5; auch *T. Cifarelli,* Giorn. di mat. 36 (1898), p. 183, 184. Indem man die Ordinaten der Kettenlinie nach konstantem Verhältnis vergrössert oder verkleinert, kommt man zu den *Gewölbelinien,* vgl. *O. Schlömilch,* Übungsbuch z. Stud. der höh. Analysis, 1., 3. Aufl., Leipzig 1878, p. 101; da sie symmetrisch zur y-Axe unter Umständen zwei reelle Stellen mit Maximalkrümmung (Scheitel) haben, so werden sie dann auch *Kettenlinien mit zwei Nasen* genannt. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 579, citiert hierfür *T. Alexander* und *A. W. Thomson,* Dublin Trans. 29, part. 3, 1888. Die noch allgemeineren Kurven:

$$y = a e^{\frac{x}{c}} + b e^{-\frac{x}{c}}$$

heissen nach *F. Heinzerling,* Zeitschr. f. Bauwesen, 19, 1869, p. 90—110, insb. p. 97, *Klinoiden.* Eine Verallgemeinerung der natürlichen Gleichung der Kettenlinien führte zu den *Pseudokatenarien,* siehe *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, p. 17. Sie sind Evolventen von *Pseudotraktricen* genannten Kurven, ebenda p. 18, 36.

107) Geschichtliches über die Traktrix (*Zuglinie*) siehe bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 562—573. Sie wurde zuerst von *Leibniz* als die Kurve bestimmt,

Die *Traktrix* hat also zur Evolute die Kettenlinie. Der zum Punkte (x, y) der Kettenlinie (31) gehörige Punkt der Traktrix hat die rechtwinkligen Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = x - a \sin \tau, \quad \mathfrak{y} = a \cos \tau,$$

wenn τ der Winkel der Tangente der Kettenlinie mit der Leitlinie, also $\operatorname{tg} \tau = s : a$ ist. Aus (31) folgt demnach als Gleichung der Traktrix:

$$\mathfrak{x} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - \mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} - \sqrt{a^2 - \mathfrak{y}^2}.$$

Die Traktrix hat die Leitlinie der Kettenlinie (die $\mathfrak{x}$-Axe), die auch die Leitlinie der Traktrix heisst, zur Asymptote [III D 1, 2, Nr. 8]. Die Ableitung der Traktrix aus der Kettenlinie zeigt, dass in dem zum Punkte (s) der Kettenlinie gehörigen Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Traktrix der Krümmungsradius der Traktrix gleich s ist, während das Stück der Normalen der Traktrix, das vom Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und der Leitlinie begrenzt wird, auf der andern Seite liegt und absolut gemessen die Länge $a^2 : s$ hat. Demnach ist bei der Traktrix das Produkt aus dem Krümmungsradius ϱ und der Normalen ν, wenn diese bis zur Leitlinie gemessen wird, gleich $-a^2$, wenn wie früher das negative Vorzeichen andeutet, dass ϱ und ν auf verschiedenen Seiten des Kurvenpunktes liegen.

Diese Eigenschaft:

$$\varrho \nu = \text{const.}$$

kommt einer ausgedehnteren Familie von Kurven zu, deren Umdrehung um die Leitlinie die Rotationsflächen konstanter positiver oder negativer Krümmung liefert, je nachdem die Konstante positiv oder negativ ist[108]). Diese Kurven entsprechen einander paarweis: Ist bei einer

---

die ein materieller Punkt in der Ebene beschreibt, wenn er durch einen unausdehnbaren Faden von einem Punkte fortgezogen wird, der eine Gerade (die Leitlinie) beschreibt [IV, **11** b]. Ersetzt man die Gerade durch eine andere Kurve, so erhält man eine sogenannte *Traktorie.* Der Ort der Punkte, durch die man die Tangenten a der Traktrix nach konstantem Verhältnis teilen kann, heisst *Syntraktrix* nach einem Vorschlag von *J. Sylvester*, vgl. *Salmon-Fiedler,* Anal. Geom. d. höh. ebenen Kurven, 2. Aufl., Leipzig 1882, p. 378; *M. d'Ocagne,* Nouv. Annales (3) 10 (1891), p. 82—90, insbes. p. 84, 85. Sonstige Verallgemeinerungen der Traktrix, namentlich die *Traktrix complicata,* sind bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 566—574, besprochen. — Rollt eine *hyperbolische Spirale* (Nr. **37**) auf einer Geraden ab, so beschreibt ihr asymptotischer Punkt eine *Traktrix,* siehe *A. Demoulin,* Bruxelles Mém. in 8⁰, 44, 7 mars 1891.

108) Sie wurden von *F. Minding,* J. f. Math. 19 (1839), p. 370—387, insbes. p. 379, 380, für negative Werte der Konstante, allgemein von *J. Liouville* in der Note 4 zur 5. Auflage von *Monge*'s Application de l'Analyse à la Géométrie, Paris 1850, p. 583—600, bestimmt. Über ihre flächentheoretische Anwendung

Kurve $\varrho\nu = a^2$, so giebt es eine Kurve, bei der $\varrho\nu = -a^2$ ist und die jene beständig unter rechtem Winkel schneidet, wie man sie auch längs der Leitlinie verschieben mag[109]). Insbesondere ist die Traktrix mit der konstanten Tangentenlänge a die orthogonale Trajektorie derjenigen Kreise vom Radius a, die ihre Mitten auf der Leitlinie haben[110]).

IV. Transcendente Raumkurven[111]).

28. Charakteristische Eigenschaft der Bertrand'schen Kurven. *B. de Saint-Venant*[112]) warf 1844 die Frage auf, ob es auf der Fläche, die von den Hauptnormalen einer Kurve gebildet wird, eine zweite Linie geben kann, deren Hauptnormalen dieselben Geraden sind, sowie damit zusammenhängende Fragen [III D 1, 2, Nr. 32; III D 5, Nr. 2]. Die erste Antwort gab *J. Bertrand* 1850[113]); nach ihm kann man die geradlinigen Flächen in vier Klassen teilen, je nachdem auf einer solchen Fläche keine, eine, zwei oder unendlich viele Kurven liegen, deren Hauptnormalen die Erzeugenden der Fläche sind. Die letzte Klasse besteht aus den gemeinen Schraubenflächen; und hier sind die betreffenden Kurven als orthogonale Trajektorien der Erzeugenden sämtlich gemeine Schraubenlinien (Nr. **20**, vgl. auch Nr. **31**). Von Interesse ist somit nur noch die dritte Flächenklasse, zu der die *Kurvenpare mit gemeinsamen Hauptnormalen* gehören. Diese Paare heissen *Bertrand'sche Kurven.*

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Punktkoordinaten eines Punktes einer Kurve, s die zugehörige Bogenlänge, $1 : \varrho$ die Krümmung, $1 : T$ die Torsion. Ferner seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezw. $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die

---

siehe *E. Bour,* J. éc. pol. 39 (1862), p. 1—148, dazu Zeichnungen auf Tafel III. Diskussion der Kurven mit Zeichnungen z. B. bei *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 96—105. Siehe auch *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, p. 30—32, sowie III D 5, Nr. **33**; III D 6a, Nr. **28**. Die in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie auftretende Kurve, als die sich ein Kreis eines schiefen Kreiscylinders beim Abwickeln auf die Ebene darstellt, gehört auch zu denjenigen Kurven, bei denen $\varrho\nu =$ const. ist, obwohl dies unseres Wissens nirgends erwähnt wird.

109) *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1900, p. 1—8, insbes. p. 3—5.

110) *J. Liouville,* Fussn. 108, p. 599.

111) Einige Raumkurven wurden schon im Anschluss an ebene Kurven in Nr. **20** (räumliche *W*-Kurven, insbesondere gemeine Schraubenlinien) und Nr. **25** (tetraedral-symmetrische Kurven) besprochen.

112) Mémoire sur les lignes courbes non planes, prés. à l'Ac. 1844, J. éc. polyt. 30, (1845) p. 1—76, insbesondere p. 48 Anm.

113) J. de math. (1) 15, p. 332—250. Ein kleiner Irrtum auf p. 340 wurde von *J. Th. Graves* berichtigt, vgl. *A. H. Curtis,* ebenda (2) 1 (1856), p. 229.

Richtungskosinus der Tangente bezw. Haupt- bezw. Binormale[114]). Eine zweite Kurve, die auf der Fläche der Hauptnormalen der Kurve (x, y, z) verläuft, ergiebt sich allgemein, wenn eine von der Bogenlänge s abhängige Länge m auf der Hauptnormalen der ersten Kurve abgetragen wird, als Ort der Endpunkte mit den Koordinaten:

$$(33)\qquad \bar{x} = x + \alpha_2 m, \quad \bar{y} = y + \beta_2 m, \quad \bar{z} = z + \gamma_2 m.$$

Die auf die zweite Kurve bezüglichen Grössen seien wie die auf die erste Kurve bezüglichen Grössen, jedoch überstrichen, bezeichnet. Sollen beide Kurven dieselben Hauptnormalen haben und ist θ der Winkel der Tangenten zusammengehöriger Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ beider Kurven, so kann man

$$(34)\quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_3 \sin\theta, \quad \bar{\alpha}_2 = -\varepsilon\alpha_2, \quad \bar{\alpha}_3 = \varepsilon(\alpha_1 \sin\theta - \alpha_3 \cos\theta)$$

ansetzen, wo ε einen der nachher noch auszuwählenden Werte ± 1 hat. Analog drücken sich die $\bar{\beta}$ durch die β und die $\bar{\gamma}$ durch die γ aus. Aus:

$$\cos\theta = \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \beta_1\bar{\beta}_1 + \gamma_1\bar{\gamma}_1$$

folgt durch Differentiation nach s, da die Bogenlänge $\bar{s}$ ebenso wie m eine Funktion von s sein wird, vermöge der Frenet'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. **31**):

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\varrho}(\alpha_2\bar{\alpha}_1 + \beta_2\bar{\beta}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_1) + \frac{1}{\bar{\varrho}}(\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \beta_1\bar{\beta}_2 + \gamma_1\bar{\gamma}_2)\frac{d\bar{s}}{ds}$$

oder nach (34) einfach:

$$\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

d. h. *der Winkel θ der Tangenten entsprechender Punkte zweier Bertrand-scher Kurven ist konstant*[115]). Es ist also auch der Winkel entsprechender Binormalen oder Schmiegungsebenen konstant[116]). Aus (33) folgt durch Differentiation nach s, wenn man wieder die Frenet-schen Formeln benutzt:

$$\bar{\alpha}_1\frac{d\bar{s}}{ds} = \alpha_1 - m\left(\frac{\alpha_1}{\varrho} - \frac{\alpha_3}{T}\right) + \alpha_2\frac{dm}{ds},$$

114) Hier und später benutzen wir im wesentlichen die in III D 1, 2; Nrr. **30**, **31** angewandten Festsetzungen und Bezeichnungen.

115) Satz von *A. H. Curtis*, Fussn. 113, p. 224.

116) Die Relationen (34) und die Folgerung: $\theta = \text{const.}$ gelten auch, wenn zwei Kurven so punktweise auf einander bezogen sind, dass sie in entsprechenden Punkten *parallele* Hauptnormalen haben. Ferner ergiebt sich dann, dass das Verhältnis aus Krümmung und Torsion bei der einen Kurve eine linear gebrochene Funktion des entsprechenden Verhältnisses bei der andern Kurve mit konstanten Koeffizienten ist; siehe *L. Aoust*, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, p. 368—375.

dazu zwei analoge Formeln. Multipliziert man sie der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezw. $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addiert sie jedesmal, so kommt im Hinblick auf (34):

$$(35)\qquad \cos\theta \frac{d\bar{s}}{ds} = 1 - \frac{m}{\varrho}, \quad 0 = \frac{dm}{ds}, \quad \sin\theta \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{m}{T}.$$

Die zweite Gleichung lehrt: *Zwei zusammengehörige Bertrand'sche Kurven schneiden auf ihren gemeinsamen Hauptnormalen eine Strecke von konstanter Länge m ab*[117]). Hiernach und wegen der Konstanz von θ sind längs beider Kurven die aus Tangente, Haupt- und Binormale bestehenden begleitenden Dreikante je zweier entsprechender Punkte *starr* miteinander verbunden. Die erste und dritte Gleichung (35) geben durch einander dividiert:

$$(36)\qquad \frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{T} = \frac{\sin\theta}{m}.$$

Dies giebt den Satz von *J. Bertrand: Zwei Kurven haben dann und nur dann gemeinsame Hauptnormalen, wenn zwischen der Krümmung und Torsion der einen Kurve eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht.* Die Umkehrung ist nämlich leicht zu beweisen. *Bertrand* hat den Satz a. a. O. synthetisch bewiesen, *J. A. Serret*[118]) gab den ersten analytischen Beweis. Mit den Bertrand'schen Kurven hat sich seitdem eine Reihe von Mathematikern beschäftigt, die verschiedenartige Beweise des Satzes gebracht haben[119]).

---

117) Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve eine konstante Strecke ab und hat die Kurve der Endpunkte die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene mit der entsprechenden Schmiegungsebene der Urkurve einen konstanten Winkel bildet, so sind beide Kurven Bertrand'sche Kurven. Siehe *B. Niewenglowski,* Paris C. R. 85 (1877), p. 394—396.

118) J. de math. (1) 16 (1851), p. 499, 500.

119) Wir können noch folgende Stellen ausser den schon erwähnten nennen: *W. Schell,* Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, Leipzig 1859, p. 74—80 (2. Aufl. 1898, p. 108—115); *P. Serret,* Théorie nouv. géom. et méc. des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 109—117; *E. Laguerre,* Bull. sciences math. astr. 2 (1871), p. 279—282; *A. Mannheim,* J. de math. (2) 17 (1872), p. 406—417; *L. Aoust,* Fussn. 116, 1876, p. 378—381; *A. Mannheim,* Paris C. R. 85 (1877), p. 212—216; *J. A. Serret,* ebenda, p. 307, 308; *A. Fais,* Bologna Rend. 1877/78, p. 25, 26; Bologna Mem. 8 (1878), p. 609—624; *A. Mannheim,* Paris C. R. 86 (1878), p. 1254—1256; Proc. Lond. math. Soc. 16 (1884/85), p. 273—276; *G. Darboux,* Leçons sur la théorie génér. des surfaces, 1. partie, Paris 1887, p. 13—15, 44, 45; 3. partie, Paris 1894, p. 313, 314; *A. Pellet,* Paris C. R. 106 (1888), p. 654; *Ch. Bioche,* ebenda, p. 829, 830; *É. Picard,* Traité d'anal. 1, Paris 1891, p. 368—371; *V. Rouquet,* Toulouse Mém. (9) 4 (1892), p. 241—264; *E. Cesàro,* Rivista di mat. 2 (1892), p. 153—159; Mathesis (2) 4 (1894), p. 265—268; *H. Molins,* Toulouse Mém. (9) 6 (1894), p. 394—420; *A. Mannheim,* Prin-

Da die Beziehung zwischen zwei zusammengehörigen Bertrandschen Kurven durchaus umkehrbar ist, gibt jede richtige Formel eine neue, wenn man die nicht überstrichenen Buchstaben mit den überstrichenen vertauscht, aber, wie (33) und (34) zeigen, m durch εm und θ durch $\varepsilon\theta$ ersetzt. So gibt die dritte Formel (35):

$$\sin\theta\,\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{m}{\bar{T}}, \tag{37}$$

sodass aus beiden folgt:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\bar{T}} = \frac{\sin^2\theta}{m^2}, \qquad \frac{1}{T}:\frac{1}{\bar{T}} = \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2. \tag{38}$$

Das Produkt der Torsionen entsprechender Punkte ist also konstant, wie *W. Schell*[120]) zuerst fand, während das Verhältnis der Torsionen umgekehrt proportional dem Verhältnis der Quadrate der Bogenelemente ist. Beide Kurven haben an entsprechenden Stellen zugleich positive oder zugleich negative Torsionen. Aus der ersten Formel (35) ziehen wir ebenso:

$$\cos\theta\,\frac{ds}{d\bar{s}} = 1 - \frac{\varepsilon m}{\bar{\varrho}},$$

sodass folgt:

$$\left(1 - \frac{m}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon m}{\bar{\varrho}}\right) = \cos^2\theta.$$

Sind $P, \bar{P}$ einander entsprechende Punkte beider Kurven, K und $\bar{K}$ ihre Krümmungsmittelpunkte, so folgt hieraus, dass das Doppelverhältnis $(P\bar{P}K\bar{K}) = 1 : \cos^2\theta$, also konstant ist, wie *A. Mannheim*[121]) fand.

Aus (36) folgt durch Vertauschen beider Kurven noch:

$$\varepsilon\frac{\sin\theta}{\bar{\varrho}} + \frac{\cos\theta}{\bar{T}} = \frac{\sin\theta}{m}.$$

---

cipes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 364—379, 532—544; *L. Bianchi,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, Leipzig 1899, p. 31—34, 231; *W. de Tannenberg,* Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel, Paris 1899, p. 89, 90; *E. Cesàro,* Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von Kowalewski, Leipzig 1901, p. 186—189. Die von mehreren Autoren zitierte Arbeit von *Voizot,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 481—486, handelt nur von Kurven konstanter Krümmung.

120) Fussn. 119, 1859, p. 78 (1898, p. 110). Dagegen hat *W. Schell* in der 1. Aufl. statt der 2. Formel (38) eine falsche Formel. Vgl. noch *Schell,* Archiv Math. Phys. 5 (1903), p. 4.

121) Siehe Fussn. 119, 1872, p. 413. Bei *W. Schell,* a. a. O., 2. Aufl., p. 111, ein Rechenfehler. Auch bei *L. Aoust,* a. a. O. p. 381, ein Irrtum. Jenes Doppelverhältnis kann nie harmonisch sein, vielmehr liegen im Fall reeller Kurven entweder K und $\bar{K}$ zwischen P und $\bar{P}$ oder beide ausserhalb $P\bar{P}$, wie *Schell* richtig bemerkt.

Aus den aufgestellten Relationen leitet man z. B. ab:

$$\frac{1}{\varrho} = \varepsilon\left(\frac{\sin^2\theta}{m} - \frac{\cos^2\theta}{\varrho - m}\right), \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\varrho - m}\right),$$

woraus leicht eine von *L. Aoust*[122]) angegebene Konstruktion folgt. Entfernt man θ mit Hülfe von (36), so kommt:

$$(39) \qquad \frac{1}{\varrho} = \varepsilon\,\frac{\varrho^2 m - T^2(\varrho - m)}{\varrho^2 m^2 + T^2(\varrho - m)^2}.$$

Da die Krümmung positiv sein muss (vgl. III D 1, 2, Nr. 29), so ist

$$\varepsilon = \pm 1, \text{ je nachdem } m \gtrless \frac{\varrho T^2}{\varrho^2 + T^2}$$

ist. Weiterhin hat *A. Mannheim*[123]) gezeigt, wie man die Schmiegungskugel der zweiten Bertrand'schen Kurve konstruieren kann, sobald man die der ersten kennt, auch hat er einen von *A. Demoulin*[124]) nur für Kurven konstanter Torsion ausgesprochenen Satz auf die Bertrand-schen Kurven verallgemeinert[125]).

29. Endliche Gleichungen der Bertrand'schen Kurven. Zu ihrer Bestimmung geht man von der sphärischen Indikatrix der Binormalen der zugeordneten zweiten Bertrand'schen Kurve aus, d. h. (nach III D 1, 2, Nr. 30) von derjenigen Kurve, die sich auf der Einheitskugel um den Anfangspunkt ergiebt, wenn man durch den Anfangspunkt die Parallelen zu diesen Binormalen legt und sie mit der Kugel zum Schnitte bringt. Wählt man diese Indikatrix und ebenso die lineare Relation (36), d. h. die Konstanten m und θ, ganz beliebig, so gibt es stets zugehörige Bertrand'sche Kurven.

Es seien nämlich u, v, w die Punktkoordinaten und σ die Bogenlänge der Indikatrix, sodass also u, v, w solche sonst beliebige Funktionen von σ bedeuten sollen, die den beiden Bedingungen

$$(40) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad u'^2 + v'^2 + w'^2 = 1$$

genügen, wobei der Strich die Differentiation nach σ andeutet. Da

122) Fussn. 119, p. 380.

123) Fussn. 119, in den Proceed. 1884/85.

124) Paris soc. math. Bull. 20 (1892), p. 43—46.

125) In den zitierten Principes et dév., 1894, p. 374, nämlich: Bewegt sich ein aus drei rechtwinkligen Geraden bestehendes Dreikant so längs einer Bertrand'schen Kurve, dass die Geraden beständig in die Tangente, Haupt- und Binormale fallen, so ist der Ort der Axen derjenigen unendlich kleinen Schraubungen, die das Dreikant aus einer Lage in die unendlich benachbarte Lage überführen (vgl. III D 1, 2, Nr. **31**, Anm. 199), relativ zu diesem Dreikant ein Plücker'sches Konoid [III C 9]. — Eine andere Eigenschaft der Bertrand'schen Kurven bei *E. Cesàro,* a. a. O. 1894, p. 265—268, und 1901, p. 188, 189.

u, v, w zugleich die Richtungscosinus $\bar{\alpha}_3, \bar{\beta}_3, \bar{\gamma}_3$ der Binormale der zweiten Bertrand'schen Kurve sein sollen, so gibt (34):

$$(41)\quad \begin{cases} \alpha_1 \sin\theta - \alpha_3 \cos\theta = \varepsilon u, \quad \beta_1 \sin\theta - \beta_3 \cos\theta = \varepsilon v, \\ \gamma_1 \sin\theta - \gamma_3 \cos\theta = \varepsilon w. \end{cases}$$

Das Bogenelement $d\sigma$ ist gleich dem Winkel $d\bar{s} : \bar{T}$ unendlich benachbarter Binormalen, sodass (37) gibt:

$$(42)\qquad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sin\theta}{m}.$$

Werden die Formeln (41) mit Rücksicht hierauf nach s unter Benutzung der Frenet'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. **31**) differenziert, so kommt wegen (36) einfach:

$$\alpha_2 = \varepsilon u', \quad \beta_2 = \varepsilon v', \quad \gamma_2 = \varepsilon w'.$$

Aus $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ folgt daher:

$$u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1 = 0,$$

während (41) nach Multiplikation mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und Addition gibt:

$$u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = \varepsilon \sin\theta.$$

Da ausserdem:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

ist, so zieht man aus den drei letzten Formeln:

$$\alpha_1 = \varepsilon \sin\theta \cdot u \pm \cos\theta \cdot (vw' - wv')$$

und analoge Werte für β_1 und γ_1. Aus (41) lassen sich alsdann auch $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ berechnen, während schon $\alpha_2 = \varepsilon u'$ u. s. w. gefunden war. Da die Determinante

$$|\alpha_1 \ \beta_2 \ \gamma_3| = +1$$

sein muss, folgt mit Rücksicht auf (40), dass in dem Wert von α_1 das *obere* Vorzeichen gilt. Wegen (42) ist ferner für den Punkt (x, y, z) der gesuchten ersten Bertrand'schen Kurve:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{dx}{ds} : \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\alpha_1 m}{\sin\theta} = \varepsilon m u + m \operatorname{ctg}\theta \cdot (vw' - wv').$$

Analog gehen die Ableitungen von y und z nach σ hervor, sodass folgt:

$$(43)\quad \begin{cases} x = \varepsilon m \int u\,d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (vw' - wv')\,d\sigma, \\ y = \varepsilon m \int v\,d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (wu' - uw')\,d\sigma, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \\ z = \varepsilon m \int w\,d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (uv' - vu')\,d\sigma. \end{cases}$$

Man kann umgekehrt zeigen: Sobald u, v, w drei solche Funktionen von σ sind, die den beiden Gleichungen (40) genügen, und m und θ

irgend zwei Konstante bedeuten, sind dies die endlichen Gleichungen einer Bertrand'schen Kurve, ausgedrückt mittels des Parameters σ, und zwar besteht bei dieser Bertrand'schen Kurve die lineare Relation (36).

Die Formeln (43) hat *G. Darboux*[126]) gegeben. Dagegen schliesst *L. Bianchi*[127]) so: Kann man zwei Kurven punktweis so auf einander beziehen, dass ihre entsprechenden Bogenelemente einander gleich und ihre entsprechenden Hauptnormalen einander parallel sind[128]), so ist die Krümmung der einen Kurve eine ganze lineare Funktion von Krümmung und Torsion der andern. Hat also die eine Kurve konstante Krümmung, so ist die andere eine Bertrand'sche Kurve. Hiernach lässt sich die Bestimmung der endlichen Gleichungen einer Bertrand-schen Kurve auf die der endlichen Gleichungen einer *Kurve konstanter Krümmung* [III D 1, 2, Nr. 32] zurückführen. Die direkte Bestimmung der letzteren ist einfach (vgl. Anm. 140 zu Nr. 31).

30. Die Bertrand'schen Kurven in der Flächentheorie. *E. Laguerre*[129]) stellte 1871 den Satz auf: Verbiegt man ein einschaliges Rotationshyperboloid so, dass die eine Schar von Geraden geradlinig bleibt [III D 6 a, Nrr. 22, 23], so geht der Kehlkreis in eine Bertrand'sche Kurve über. Dass der Satz auch umgekehrt gilt, deutete *Laguerre* kurz an. *Astor*[130]) bemerkte alsdann, dass man die geodätischen Linien gewisser geradliniger Flächen durch Quadraturen bestimmen kann. *A. Pellet*[131]) hob hervor, dass die Striktionslinie einer solchen Fläche eine Bertrand'sche Kurve ist. *Ch. Bioche*[132]) endlich zeigte, dass die fraglichen Flächen gerade diejenigen sind, die in dem Laguerre'schen Satze auftreten, und gab der Umkehrung des Satzes von Laguerre diese präzise Form: Liegen zwei zusammengehörige Bertrand'sche Kurven vor und legt man durch jeden Punkt der einen diejenige Gerade, die zur Binormalen der andern in dem zugeordneten Punkte parallel ist, so bilden die konstruierten Geraden eine Fläche, die sich so zu einem einschaligen Hyperboloid verbiegen lässt, dass ihre Geraden geradlinig bleiben. Nach (43) sind daher:

---

126) Leçons, 1. partie (1887), p. 45.

127) Differentialgeometrie, p. 32—34.

128) Dies ist eine Weiterführung von Betrachtungen, die von *L. Aoust* herrühren, vgl. Anm. 116.

129) Fussn. 119, p. 281.

130) Assoc. pour l'avanc. des sc. (Toulouse) 1887, p. 1.

131) Fussn. 119, 1888.

132) Fussn. 119, 1888. Siehe auch *G. Darboux,* Leçons, 3. partie, p. 313, 314; *L. Bianchi,* Differentialgeometrie, p. 231.

$$x = \varepsilon m \int u d\sigma + m \operatorname{ctg} \theta \int (v w' - w v')\, d\sigma + u\tau,$$

$$y = \varepsilon m \int v d\sigma + m \operatorname{ctg} \theta \int (w u' - u w')\, d\sigma + v\tau,$$

$$z = \varepsilon m \int w d\sigma + m \operatorname{ctg} \theta \int (u v' - v u')\, d\sigma + w\tau$$

die Gleichungen einer allgemeinen derartigen Fläche, ausgedrückt mittels zweier Parameter σ und τ, sobald die Funktionen u, v, w von σ allein den beiden Bedingungen (40) genügen, während m und θ Konstanten sind und $\varepsilon \pm 1$ ist.

V. Rouquet[133]) stellte sich das Problem, diejenige Minimalfläche zu finden, die eine gegebene Bertrand'sche Kurve zur Haupttangentenkurve hat. Er erkannte, dass sie der Ort der Mitten derjenigen Minimalkurve ist, die man erhält, wenn man durch die Punkte einer Bertrand'schen Kurve die Parallelen zu den Binormalen der zugehörigen Kurve in entsprechenden Punkten zieht — also wie bei *Bioche* — und auf ihnen die konstante Länge $\pm mi : \sin \theta$ abträgt, vorausgesetzt natürlich, dass die gegebene Bertrand'sche Kurve der linearen Relation (36) genügt.

31. Kurven konstanter Krümmung, Kurven konstanter Torsion und allgemeine Schraubenlinien. Zu den linearen Relationen zwischen Krümmung $1:\varrho$ und Torsion $1:T$ gehören insbesondere die Gleichungen $1:\varrho = \text{const.}$ und $1:T = \text{const.}$ Demnach gehören die Kurven konstanter Krümmung und die Kurven konstanter Torsion zu den Bertrandschen Kurven.

Hat eine Kurve[134]) die *konstante Krümmung* $1:\varrho$, so ist in der linearen Relation (36)

$$\cos \theta = 0, \quad \varrho = m$$

zu setzen. Letzteres sagt aus, dass die zugehörige zweite Bertrandsche Kurve der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist, ersteres, dass die Tangente und Binormale der zugehörigen Kurve bezw. der Binormale und Tangente der Kurve konstanter Krümmung in entsprechenden Punkten parallel ist[135]). Aus (39) folgt $\bar{\varrho} = \varepsilon \varrho = \varepsilon m$. Natürlich muss $\varepsilon = +1$ sein, da $\bar{\varrho} > 0$ ist. Also ergiebt sich der schon *G. Monge*[136])

133) Fussn. 119, 1892.

134) *E. Cesàro,* Natürl. Geom. 1901, p. 182, nennt die Kurven konstanter Krümmung *windschiefe Kreise.*

135) Über Kurven mit solchen „reziproken" begleitenden Dreikanten siehe *L. Aoust,* Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, p. 376—378.

136) Paris Mém. pour 1784, p. 536 u. f., während man sonst öfters *Bouquet* (mit welcher Arbeit?) dafür citiert findet. Die Art, wie *Monge* die endlichen Gleichungen der Kurven konstanter Krümmung dort bestimmt, ist jedoch falsch. Vgl. *G. Darboux,* Leçons, 1. partie, p. 17 Anm.

bekannte Satz: Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve konstanter Krümmung ist eine Kurve von derselben konstanten Krümmung, d. h. für sie ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte wieder die ursprüngliche Kurve, denn dies erhellt sowohl aus der Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen zwei Bertrand'schen Kurven als auch aus der zweiten Formel (34), da $\varepsilon = +1$ ist. Aus der in III D 1, 2, Nr. **31**, angegebenen Formel für den Radius R der Schmiegungskugel folgt sofort: Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve fällt dann und nur dann mit dem Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte, d. h. mit der Gratlinie der Polarfläche zusammen, wenn die Kurve selbst konstante Krümmung hat[137]). — Breitet man die Tangentenfläche einer Kurve konstanter Krümmung ohne Dehnung auf die Ebene aus, so geht die Kurve in einen Kreis über, weil sich die Krümmung dabei nicht ändert. Um also eine Kurve konstanter Krümmung mechanisch zu erzeugen, legt man zwei völlig biegsame unausdehnbare ebene Blätter aufeinander, befestigt sie längs eines Kreises aneinander und entfernt das Innere des Kreises, auch zieht man einen Schnitt vom Aussenrand nach dem Innern. Biegt man nun die Blätter auseinander, so geht der Kreis in eine Kurve konstanter Krümmung über[138]) [139]). — Die endlichen Gleichungen[140]) einer Kurve konstanter Krümmung $1:\varrho$ sind, sobald die Krümmung nicht gleich Null ist, nach (43), da $\cos\theta = 0$, $m = \varrho$ und $\varepsilon = +1$ ist:

$$x = \varrho\int u\,d\sigma, \quad y = \varrho\int v\,d\sigma, \quad z = \varrho\int w\,d\sigma,$$

wo u, v, w solche Funktionen von σ bedeuten, die den beiden Be-

137) In Anknüpfung hieran sei das *Aoust'sche Problem* erwähnt: Eine Kurve zu finden, bei der die Gratlinie der Polarfläche der Gratlinie der Polarfläche wieder der Urkurve kongruent ist. Vgl. *L. Aoust,* Paris soc. math. Bull. 7 (1878/79), p. 143—154; Referat *R. Hoppe*'s darüber in den Fortschr. d. Math. 11 (1881), p. 550—552, und Archiv Math. Phys. (1) 66 (1881), p. 386—396; (2) 2 (1885), p. 129—137.

138) Vgl. *W. Schell,* Fussn. 119, 1859, p. 18; 1898, p. 104, 105.

139) Die Sätze über Bertrand'sche Kurven gelten mit entsprechender Spezialisierung ($\cos\theta = 0$, $m = \varrho$) auch für die Kurven konstanter Krümmung. So liefert die erste Formel (38) in Nr. 28 den speziellen Satz: $T\overline{T} = \varrho^2$ für Kurven konstanter Krümmung. Dieser Spezialsatz kommt schon bei *J. Bertrand,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 350 vor. *Voizot,* ebenda, p. 481—486, reklamiert ihn für sich.

140) Sie wurden direkt von *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 32 (1848), p. 1—146, insbesondere p. 123, aufgestellt. Siehe auch *J. A. Serret* in *Liouville*'s Note I zu *Monge,* Application de l'analyse à la géométrie, 5. Aufl., Paris 1850, p. 566, 567, und im J. de math. (1) 16 (1851), p. 193—207.

dingungen (40) genügen. Ist jedoch die Krümmung gleich Null, so ist die Kurve eine gerade Linie[141]).

Die *Kurven konstanter Torsion* $1:T$ wurden zuerst von *J. A. Serret*[142]) betrachtet, der auch ihre endlichen Gleichungen aufstellte. Sie gehören als *Grenzfall* zu den Bertrand'schen Kurven, indem in der linearen Relation (36), Nr. 28, sowohl $\sin\theta = 0$ als auch $m = 0$ zu setzen ist, doch so, dass beim Grenzübergang die Relation einen Sinn behält, d. h. $\operatorname{tg}\theta : m$ von Null verschieden bleibt und die konstante Torsion $1:T$ darstellt. Die Formeln (43) liefern alsdann, sobald die Torsion nicht gleich Null ist, die endlichen Gleichungen:

$$x = T\int (vw' - wv')\,d\sigma, \qquad y = T\int (wu' - uw')\,d\sigma,$$
$$z = T\int (uv' - vu')\,d\sigma,$$

wo u, v, w solche Funktionen von σ bedeuten, die den Gleichungen (40) genügen. Durch eine leichte Abänderung gehen hieraus die Formeln *J. A. Serret*'s hervor[143]). Da $m = 0$ ist, so fällt die zu einer Kurve konstanter Torsion zugehörige Bertrand'sche Kurve mit ihr selbst zusammen. Man kann die Tangentenfläche einer beliebigen Raumkurve so verbiegen, dass sie dabei in die Tangentenfläche einer Kurve konstanter Torsion übergeht[144]). Die Kurven von der Torsion Null sind die ebenen Kurven. — Auf einer Fläche konstanter Krümmung haben die Haupttangentenkurven, wie aus einem noch allgemeineren Satze von *E. Beltrami*[145]) folgt, konstante Torsion, und zwar haben die beiden Scharen entgegengesetzt gleiche Torsion [III D 5, Nr. **35**]. Ferner findet man nach *G. Darboux*[146]) diejenigen Flächen, die auf ein Rotationsparaboloid abwickelbar sind [III D 6 a, Nr. **31**],

141) Noch seien zu den Kurven konstanter Krümmung erwähnt: *P. Adam*, Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 142—152, und *O. Venske*, Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung, welche sich auf Raumkurven konstanter erster Krümmung beziehen, Gött. Dissert. 1891.

142) In der in Anm. 140 erwähnten Note p. 565, 566.

143) Siehe *G. Darboux*, Leçons, 1. partie, p. 42, 43.

144) Vgl. *W. Schell*, a. a. O., 1898, p. 38.

145) *E. Beltrami* spricht den in Frage stehenden Satz im Giorn. di mat. 4 (1866), p. 123—127, insbes. p. 127, in allem wesentlichen aus, sodass ihm die Priorität vor *A. Enneper*, Göttinger Nachr. 1870, p. 493—510, gebührt, den man sonst stets bei diesem Satze nennt. Vgl. hierzu *G. Loria*, Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 392—440, insbes. p. 401, 402.

146) Leçons, 3. partie, 1894, p. 373. In der 1. partie, 1887, p. 42—46, werden die Kurven konstanter Torsion besprochen, insbesondere auch die, deren sphärische Indikatrix der Tangenten ein sphärischer Kegelschnitt ist. In der 4. partie, 1896, ist die Note IV, p 423—432, wesentlich den Kurven konstanter Torsion gewidmet. Siehe auch 3. partie, p. 314.

durch Verwendung solcher Flächen, die durch Schiebung einer Kurve konstanter Torsion längs einer Kurve von der entgegengesetzt gleichen Torsion entstehen[147]).

Die Annahme $m = \infty$ in der linearen Relation (36), Nr. 28, giebt einen anderen Grenzfall von Bertrand'schen Kurven, nämlich diejenigen *Kurven, bei denen das Verhältnis aus Krümmung und Torsion konstant ist.* Bei einer solchen Kurve ist die zugeordnete Bertrand'sche Kurve unendlich fern. Ist das konstante Verhältnis

$$\frac{1}{\varrho} : \frac{1}{T} = c,$$

so geben die 1. und 3. Frenet'sche Formel [III D 1, 2, Nr. **31**], durch einander dividiert:

$$\alpha_1 + c\alpha_3 = \text{const.}, \quad \beta_1 + c\beta_3 = \text{const.}, \quad \gamma_1 + c\gamma_3 = \text{const.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit α_1, β_1, γ_1 und addiert sie, so kommt:

$$\text{const. } \alpha_1 + \text{const. } \beta_1 + \text{const. } \gamma_1 = 1.$$

Legt man durch jeden Kurvenpunkt eine Gerade parallel derjenigen Richtung, deren Kosinus den hierin auftretenden Konstanten proportional sind, so folgt, dass die Kurve diese Geraden unter einem konstanten Winkel schneidet. Die Geraden aber bilden einen Cylinder. *Demnach sind die Kurven, bei denen das Verhältnis aus Krümmung und Torsion konstant ist, Schraubenlinien, nämlich Kurven, die alle Erzeugenden eines Cylinders unter konstantem Winkel durchsetzen.* Die Umkehrung dieses Satzes, dass nämlich bei den Schraubenlinien das Verhältnis aus Krümmung und Torsion konstant ist, war schon von *Lancret*[148]) 1802 ausgesprochen worden, und man schreibt jenen Satz *J. Bertrand*[149]) zu, der ihn allerdings 1848, und zwar auf synthetischem

147) Zur Litteratur über Kurven konstanter Torsion, von denen auch die Arbeiten über Bertrand'sche Kurven gelegentlich handeln, nennen wir ausserdem: *P. Serret,* Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 38, 39; *R. Hoppe,* J. f. Math. 60 (1862), p. 182—187, insbesondere p. 185; *A. Fais,* Bol. Mem. (4) 1 (1880), p. 67—97; *G. Königs,* Toul. Ann. 1 (1887), E p. 1—8; *J. Lyon,* Thèse, Paris 1890 (auch Grenoble Ann. 2 (1890), p. 353); *M. Fouché,* Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 335—344; *A. Demoulin,* Par. soc. math. Bull. 20 (1892), p. 43—46 (vgl. Anm. 125); *E. Fabry,* Ann. éc. norm. (3) 9 (1892), p. 177—196; *H. Molins,* Toulouse Mém. (9) 5 (1893), p. 588—603; *E. Cosserat,* Paris C. R. 120 (1895), p. 1252—1254; *E. Cesàro,* Natürl. Geometrie, Leipzig 1901, p. 185. Ein grosser Teil dieser Arbeiten beschäftigt sich ausschliesslich mit *algebraischen* Kurven konstanter Torsion.

148) Mém. sur les courbes à double courbure, Par. Mém. [étr.] 1, 1802 (1805).

149) J. de math. (1) 13 (1848), p. 423, 424.

Wege, bewies. Doch ist er schon von *B. de Saint-Venant*[150]) 1844 ausgesprochen und analytisch bewiesen worden.

Zahlreiche teils synthetische, teils analytische Beweise dieser Sätze finden sich bei späteren Autoren[151]). Natürlich können die Schraubenlinien auch als die *Kurven konstanter Neigung gegen eine Ebene* definiert werden. Wickelt man den Cylinder einer Schraubenlinie auf eine Ebene ab, so geht die Kurve in eine Gerade über. Daher können die Schraubenlinien auch als die *geodätischen Linien der Cylinder* [III D 3, Nr. **14**] definiert werden, ja diese Definition ist die umfassendere, da die andere auf Cylindern von Minimalgeraden versagt, obgleich bei den geodätischen Linien solcher Cylinder das Verhältnis aus Krümmung und Torsion den konstanten Wert $\pm i$ hat[152]) [III D 1, 2, Nr. **32**].

Eine besondere Klasse von Schraubenlinien bilden die *Minimalkurven* (vgl. III D 1, 2, Nr. **12**, sowie unten Nr. **35**), denn bei ihnen ist

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \pm i.$$

Jede Minimalkurve ist also eine Schraubenlinie auf demjenigen Cylinder, durch den sie auf die xy-Ebene projiziert wird. Da die Minimalkurve bei Drehungen stets eine Minimalkurve bleibt, so folgt: *Jede Minimalkurve ist Schraubenlinie auf allen Cylindern, auf denen die*

---

150) Auch Verf. hat dies in seiner Einf. in d. Th. d. Kurven, Leipzig 1901, p. 224 übersehen. Es sei daher bemerkt, dass *De Saint-Venant* in seinem Mém. sur les lignes courbes non planes, prés. à l'Ac. 1844, J. éc. polyt. 30 (1845), p. 1—76, den Winkel dH konsekutiver rektifizierender Geraden einer Kurve auf p. 26 als Funktion des Verhältnisses von Krümmung und Torsion, multipliziert mit dem Differential dieses Verhältnisses, bestimmt. Auf p. 25 hat er den Winkel H der rektifizierenden Geraden und Tangente ebenfalls durch jenes Verhältnis ausgedrückt. Aus beiden Formeln ergiebt sich der Satz so selbstverständlich, dass sich *De Saint-Venant* auf p. 26 damit begnügt, ihn mit wenigen Worten auszusprechen. — Übrigens gilt der Satz nur mit einer gewissen Einschränkung: Wenn nämlich der senkrechte Querschnitt des Cylinders einen Wendepunkt hat, so geht die Schraubenlinie beim Überschreiten der zugehörigen Mantellinie aus einer rechtsgewundenen in eine linksgewundene oder umgekehrt über, d. h. die Torsion wechselt ihr Vorzeichen, während doch ihre Krümmung wie immer positiv bleibt. Das konstante Verhältnis von Krümmung und Torsion wechselt also dann das Vorzeichen. An der Übergangsstelle selbst ist Krümmung und Torsion gleich Null.

151) So in fast allen über Raumkurven handelnden Lehrbüchern. Ausserdem sei noch erwähnt: *J. A. Serret* in Liouville's Note I zu Monge's Application, 1850, p. 562—564, und im J. de math. (1) 16 (1851), insbes. p. 197, 198; *V. Puiseux,* ebenda, p. 208—211; *L. Natani,* Math. Wörterbuch, 6, Berlin 1867, p. 417; *H. G. Zeuthen,* Tidsskrift f. Math. (3) 5 (1875), p. 182, 183.

152) *G. Scheffers,* Einführ. in d. Theorie d. Kurven, Leipzig 1901, p. 224, 284—289.

Kurve liegt[153]). Ausserdem haben nur die Geraden diese Eigenschaft.

Eine andere besondere Klasse von Schraubenlinien bilden die *gemeinen Schraubenlinien* (siehe Nr. 20). Sie spielen auch als Bertrandsche Kurven eine besondere Rolle: Da bei ihnen Krümmung und Torsion konstant ist, so giebt es unendlich viele lineare Relationen zwischen Krümmung und Torsion. Auf der Fläche der Hauptnormalen einer gemeinen Schraubenlinie, d. h. auf einer *gemeinen Schraubenfläche* [III D 5, Nr. 5], liegen also unendlich viele Kurven mit denselben Hauptnormalen, nämlich diejenigen Schraubenlinien, in denen die Fläche durch Rotationscylinder um die Schraubenaxe geschnitten wird. Vgl. die in Nr. 28 eingangs erwähnte vierte Klasse von geradlinigen Flächen.

32. Eigenschaften der allgemeinen Schraubenlinien[154]). Um die Gleichungen einer Schraubenlinie aufzustellen, deren Cylinder *nicht* aus Minimalgeraden besteht[155]), wählen wir die z-Axe parallel zur Cylinderrichtung. Der in der xy-Ebene liegende senkrechte Querschnitt des Cylinders, die *Grundkurve,* sei mittels ihrer Bogenlänge σ gegeben:

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma),$$

sodass

$$x'^2 + y'^2 = 1 \tag{44}$$

ist, wenn hier wie nachher der Strich die Differentiation nach σ andeutet. Ist θ der konstante Winkel, den die Tangente der Schraubenlinie mit der positiven z-Axe bildet, und ist s die Bogenlänge der Schraubenlinie, so ist für den Punkt (x, y, z) der Kurve $dz : ds = \cos\theta$. Da $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ ist, so folgt nach (44), dass $d\sigma : ds = \sin\theta$ ist, wenn s und σ in demselben Sinn positiv genommen werden. Also ist

$$s = \frac{\sigma}{\sin\theta},$$

wenn beide Bogenlängen z. B. von derjenigen Stelle aus gemessen werden,

153) Vgl. *S. Lie* in *Lie-Scheffers,* Geom. d. Berührungstransformationen, 1, Leipzig 1896, p. 430, wo es allerdings nur implicite gesagt wird; ferner *G. Scheffers,* a. a. O. p. 345. Auf diejenigen Minimalkurven, die auf *Rotationscylindern* Schraubenlinien sind, kommen wir in Nr. **35** zurück.

154) Sie werden in den meisten Lehrbüchern über Raumkurven und über darstellende Geometrie behandelt; wir nennen nur noch, weil darin einige besondere Fragen erörtert werden, die Stellen: *P. Serret,* Théorie nouv. géom. et méc. des lignes, Paris 1860, p. 39, 40, 53, 100—108, 140—142; *L. Aoust,* Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 220—278; *E. Cesàro,* Natürl. Geom., Leipzig 1901, p. 183. Ausserdem kommen die zu Nr. **31** citierten Arbeiten in Betracht.

155) Dieser Ausnahmefall bei *G. Scheffers,* a. a. O. p. 286—289.

an der die Schraubenlinie die Grundkurve trifft. Ferner ist $dz = \operatorname{ctg}\theta\, d\sigma$, sodass

(45) $$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = \operatorname{ctg}\theta \cdot \sigma$$

die endlichen Gleichungen der Schraubenlinie sind, wobei x und y nur an die Relation (44) gebunden sind. Wird angenommen, dass die Grundkurve in solchem Sinne positiv durchlaufen wird, dass ihre positive Tangente und ihre nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtete (Haupt-)Normale wie die positive x- und y-Axe zueinander orientiert sind, sodass der Krümmungsradius

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}$$

der Grundkurve positiv gerechnet wird, so sind die Richtungskosinus der Tangente, Haupt- und Binormale der Schraubenlinie (45) diese:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = x' \sin\theta, & \beta_1 = y' \sin\theta, & \gamma_1 = \cos\theta; \\ \alpha_2 = \bar{\varrho} x'', & \beta_2 = \bar{\varrho} y'', & \gamma_2 = 0; \\ \alpha_3 = -\bar{\varrho} y'' \cos\theta, & \beta_3 = \bar{\varrho} x'' \cos\theta, & \gamma_3 = \sin\theta, \end{array}$$

während

$$\varrho = \frac{\bar{\varrho}}{\sin^2\theta}, \quad T = \frac{\bar{\varrho}}{\sin\theta\cos\theta}$$

ihr Krümmungs- bezw. Torsionsradius ist und also das konstante Verhältnis von Krümmung und Torsion gleich $\operatorname{tg}\theta$ ist.

Die *Tangentenfläche der Schraubenlinie* ist, ausgedrückt mittels σ und eines zweiten Parameters τ:

$$\mathfrak{x} = x + x' \sin\theta \cdot \tau, \quad \mathfrak{y} = y + y' \sin\theta \cdot \tau, \quad \mathfrak{z} = z + \cos\theta \cdot \tau;$$

sie schneidet die xy-Ebene in der *Evolvente* (vgl. III D 1, 2, Nr. **16**):

(46) $$\mathfrak{x} = x - x'\sigma, \quad \mathfrak{y} = y - y'\sigma, \quad \mathfrak{z} = 0$$

der Grundkurve. Die Tangentenfläche ist diejenige abwickelbare Fläche, die von dieser Evolvente unter dem konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$ aufsteigt, d. h. eine *Böschungsfläche.* Umgekehrt: *Die Gratlinie jeder Böschungsfläche ist eine Schraubenlinie,* und zwar auf demjenigen Cylinder, dessen Grundlinie die Evolute der ebenen Grundlinie der Böschungsfläche ist[156]). Die Evolvente (46) hat, als *Raum*kurve auf-

156) Da eine *Minimalkurve* nach Nr. **31** auf *jeder* Cylinderfläche, die man durch sie legen kann, eine Schraubenlinie ist, so folgt: Die Projektion einer Minimalkurve auf eine *beliebige* Ebene ist die Evolute derjenigen Kurve, in der die Tangenten der Minimalkurve die Ebene treffen. Die Schnittkurven der Tangentenfläche einer Minimalkurve mit einer *beliebigen* Schar von parallelen Ebenen projizieren sich auf eine dieser Ebenen als *Parallelkurven.* Vgl. *S. Lie* in *Lie-Scheffers,* a. a. O. p. 430, 431.

gefasst, unendlich viele Evoluten, für die sie Filarevolvente ist (nach III D 1, 2, Nr. 33). Zu ihnen gehört die betrachtete Schraubenlinie. Da aber (46) frei von θ ist, so folgt: *Alle Filarevoluten einer ebenen Kurve sind Schraubenlinien* auf demjenigen Cylinder, der über der eigentlichen ebenen Evolute der Kurve senkrecht errichtet werden kann. Umgekehrt: *Ist eine Filarevolvente einer Kurve eben, so ist die Kurve eine Schraubenlinie* [157]).

Die Hauptnormalen einer Schraubenlinie sind Normalen ihres Cylinders. Umgekehrt: Sind die Hauptnormalen einer Kurve einer festen Ebene parallel, so ist die Kurve eine Schraubenlinie[158]). Die Striktionslinie der Fläche der Hauptnormalen hat zur Projektion auf die Ebene der Grundkurve die Evolute der Grundkurve.

Die Krümmung der Schraubenlinie steht in einem konstanten Verhältnis zur Krümmung der Grundkurve. Analoges gilt von den Bogenlängen.

Die Binormalen der Schraubenlinie sind von konstanter Neigung gegen die xy-Ebene, woraus nach III D 1, 2, Nr. 29, 33 folgt: Die Gratlinie der Polarfläche einer Schraubenlinie ist wieder eine Schraubenlinie.

Die rektifizierende Fläche der Schraubenlinie ist ihr Cylinder (vgl. III D 1, 2, Nr. 29, Anm. 179). Der Rotationskegel, der seine Spitze in einem Punkte der Schraubenlinie hat und der die Tangentenfläche der Kurve längs der Tangente dieses Punktes oskuliert (siehe III D 1, 2, Nr. 30, Anm. 188), hat konstante Öffnung; dasselbe gilt von dem Rotationskegel, der seine Spitze in einem Punkte der Schraubenlinie hat und dort die Kurve in dritter Ordnung berührt. Umgekehrt: Hat einer dieser Kegel konstante Öffnung, so ist die Kurve eine Schraubenlinie.

Ausser den *sphärischen Schraubenlinien*, die von *P. Serret* und *E. Cesàro*[159]) untersucht wurden, sind die auf Rotationscylindern ge-

---

157) Die Kurven, die auf der Tangentenfläche einer Schraubenlinie verlaufen und die Tangenten unter konstantem Winkel schneiden, sind Schraubenlinien, deren Schmiegungsebenen zur Tangentenfläche der Urkurve konstante Neigung haben. Siehe *P. Serret,* Théorie nouv. des lignes à double courb., Paris 1860, p. 140—143; *L. Aoust,* Analyse inf. d. courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 258, 259.

158) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 343. *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 23 (1885), p. 222—229, und *E. Cesàro,* ebenda 24 (1886), p. 46—48, bestimmen diejenigen Schraubenlinien, deren Hauptnormalen eine feste Gerade treffen.

159) *P. Serret,* Théorie géom. et méc. des lignes etc., Paris 1860: Jede Schraubenlinie, die auf einer Kugel liegt, ist eine sphärische Evolvente eines Kreises der Kugel (p. 39). Rollt ein grösster Kreis der Kugel, ohne die Kugel zu

legenen *gemeinen Schraubenlinien*, die in Nr. 20 besprochen wurden, und die *cylindro-konischen Schraubenlinien*, auf die wir in Nr. 34 zurückkommen, besonders zu beachten.

33. Verallgemeinerungen der Bertrand'schen Kurven. Die Bertrand'schen Kurven sind nach Nr. 28 durch eine lineare Relation zwischen Krümmung und Torsion charakterisiert; hieraus ergiebt sich eine naheliegende Verallgemeinerung, indem man irgend eine Relation zwischen Krümmung und Torsion festsetzt. Aber da bei jeder Kurve eine Relation zwischen beiden besteht, so würde dies keine besonderen, sondern allgemeine Kurven liefern. Wohl aber ergiebt sich das Problem, die Kurven mit vorgeschriebener Relation[160]) zu bestimmen.

Giebt man jener Relation spezielle Formen, so ergeben sich spezielle Arten von Kurven. Zu solchen, die als Verallgemeinerungen der Bertrand'schen Kurven aufgefasst werden können, gelangt *A. Demoulin*[161]) so: Er sucht, ausgehend von einer Eigenschaft[162]), die den Bertrand'schen Kurven zukommt, diejenigen Kurven, bei denen sich

verlassen, auf einem kleinen Kreis der Kugel ab, sodass seine Punkte *sphärische Cykloiden* beschreiben, so umhüllt er noch einen zweiten dem kleinen Kreis diametral gegenüberliegenden kongruenten Kreis der Kugel. Da der grosse Kreis beständig normal zu den Bewegungsrichtungen seiner Punkte ist, so folgt, dass der zweite kleine Kreis die sphärische Evolute jener Cykloiden ist. *Daher sind jene Cykloiden sphärische Schraubenlinien* (p. 53). Nach *P. Serret* kommen diese Cykloiden als rektifizierbar, aber ohne als Schraubenlinien erkannt worden zu sein, schon bei *Jacob I Bernoulli* und *Clairaut* (Paris Mém. 1732) vor. *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 127—142, insbes. p. 130, 131, zeigt, dass die sphärischen Schraubenlinien bei Abwickelung ihrer Tangentenflächen auf die Ebene in Epi- oder Hypocykloiden übergehen.

160) Ein analoges Problem ergiebt sich, wenn die Relation etwa noch die Bogenlänge oder den Radius der Schmiegungskugel oder drgl. enthält. Wegen dieser Probleme vergleiche: *R. Hoppe*, J. f. Math. 60 (1862), p. 182—187, und 63 (1864), p. 122—140; *H. Molins*, J. de math. (2) 19 (1874), p. 425—451; *L. Aoust*, Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, an vielen Stellen; *R. Hoppe*, Lehrbuch d. anal. Geom., 1, Leipzig (1880), an vielen Stellen; Archiv Math. Phys. (1) 65 (1880), p. 287—305; *S. Lie*, Christiania Videnskabs-Selskabet Forhandlinger 1882, Nr. 10; *H. Molins*, Toulouse Mém. 5 (1883), p. 175—199; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (2) 2 (1885), p. 269—273; *E. Goursat*, Toulouse Ann. 1 (1887) C, p. 1—26; *G. Darboux*, Leçons, 1. partie, Paris 1887, livre 1; *R. Hoppe*, Fortschr. d. Math. 19 (1890), p. 751—753; *R. Hoppe*, Archiv Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 335, 336, und 9 (1890), p. 43—52; *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1900, p. 5—8; und Einführung in d. Th. d. Kurven, Leipzig 1901, 2. Abschn. § 13, 14; *G. Pirondini*, J. f. M. 109 (1892), p. 238—260.

161) Paris soc. math. Bull. 21 (1893), p. 8—13.

162) Vgl. Anm. 125.

die Axe der unendlich kleinen Schraubung, die das begleitende Dreikant von Tangente, Haupt- und Binormale in das unendlich benachbarte überführt (vgl. III D 1, 2, Nr. **31**, Anm. 199), in Bezug auf das Dreikant selbst während des Fortschreitens längs der Kurve so ändert, dass sie ein *Plücker'sches Konoid* beschreibt. Jene Axe ist zugleich die Axe derjenigen gemeinen Schraubenlinie, die die Kurve an der betrachteten Stelle in zweiter Ordnung berührt und dieselbe Torsion wie die Kurve dort hat (siehe III D 1, 2, Nr. **30**). Ihre Gleichungen sind, bezogen auf das von jenem Dreikant gebildete Koordinatensystem:

$$\frac{z}{x} = \frac{T}{\varrho}, \quad y = \frac{\varrho T^2}{\varrho^2 + T^2}, \tag{47}$$

wenn ϱ und T Krümmungs- und Torsionsradius bedeuten. Diese Schraubenaxe schneidet die Hauptnormale (jetzt y-Axe) rechtwinklig. Nun ist aber die allgemeine Gleichung eines Plücker'schen Konoids, dessen Geraden die y-Axe treffen, diese:

$$Axz + Bx^2 + Cz^2 + Dy\,(x^2 + z^2) = 0,$$

sodass das Einsetzen der Werte (47) giebt:

$$\frac{A}{\varrho T} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho^2} + \frac{D}{\varrho} = 0. \tag{48}$$

Bei den gesuchten Kurven besteht daher eine solche quadratische Relation zwischen Krümmung und Torsion. Die Annahme $B = 0$ giebt wieder die Bertrand'schen Kurven. Diejenigen Kurven, bei denen $A = 0$ ist, hat *Demoulin* besonders untersucht. Sie werden uns sogleich noch einmal begegnen[163]).

Man kann die Bertrand'schen Kurven noch in anderer Weise verallgemeinern: Da bei zwei Bertrand'schen Kurven die Verbindende zusammengehöriger Punkte als gemeinsame Hauptnormale hinsichtlich der beiden aus Tangente, Haupt- und Binormale bestehenden Dreikante der Punkte dieselbe Lage hat, so kann man mit *A. Demoulin*[164]) allgemeiner fragen, bei welchen Kurvenpaaren mit einander zugeordneten Punkten die Verbindende entsprechender Punkte überhaupt hinsichtlich jedes der beiden Dreikante eine feste Lage hat. Besonders ist der Fall untersucht worden, dass die Verbindende dabei in einer der drei

---

163) Spezialfälle von (48) kommen auch sonst vor, namentlich der Fall

$$\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2} = \text{const.}$$

bei *A. Mannheim,* Paris C. R. 86 (1878), p. 1254—1256; Principes et dév. de géom., Paris 1894, p. 535, 537; *G. Scheffers,* Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 252, 253, wo ihre endlichen Gleichungen gegeben werden.

164) Paris C. R. 116 (1893), p. 246—249.

Ebenen des ersten Dreikants liegt. Ist die Verbindende eine Normale der ersten und die Binormale der zweiten Kurve, so kommt man wieder zu denjenigen Kurven, die der Relation (48) im Falle $A = 0$ genügen.

E. Cesàro[165]) behandelte die Frage nach denjenigen Kurven, bei denen eine mit dem begleitenden Dreikant fest verbundene Gerade eine abwickelbare Fläche erzeugt [III D 5, Nr. **3**]. Dies trifft zunächst stets ein, wenn die Gerade in der rektificierenden Ebene liegt und der Tangente parallel ist, ausserdem nur dann noch für andere Geraden, wenn die Kurve einer Gleichung von der Form

$$\frac{A}{\varrho T} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho^2} + \frac{D}{\varrho} + \frac{E}{T} = 0$$

genügt, die (48) als speziellen Fall umfasst.

Auf mehrere andere Kurvenarten, die durch besondere Relationen charakterisiert sind, gehen wir nicht näher ein[166]).

34. Loxodromen. Die allgemeinen Schraubenlinien kann man nach Nr. **31** als diejenigen Kurven definieren, die eine Schar von parallelen Ebenen, nämlich die Ebenen senkrecht zur Cylinderrichtung, unter konstantem Winkel schneiden. Da eine solche Ebenenschar durch eine unendlich ferne Gerade bestimmt ist, so gehören die Schraubenlinien als Spezialfälle zu den *Loxodromen.* Dies sind nämlich diejenigen *Kurven, die ein Büschel von Ebenen unter konstantem Winkel schneiden.*

Eigentlich pflegt man die Loxodromen allerdings anders zu definieren, nämlich als diejenigen Kurven, die auf Rotationsflächen die Meridiankurven oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Breitenkreise unter konstantem Winkel schneiden[167]). Da jedoch die Tan-

165) Natürliche Geometrie, 1901, p. 189—192.

166) Ist $d\tau$ der Winkel unendlich benachbarter Tangenten und $d\vartheta$ der Winkel unendlich benachbarter Binormalen in den Endpunkten eines Bogenelementes ds, so kann man mit *R. Hoppe* (vgl. III D 1, 2, Nr. **30**) den Krümmungswinkel $\tau = \int d\tau$ und den Torsionswinkel $\vartheta = \int d\vartheta$ einführen. Die Kurven, bei denen eine der Relationen:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \text{const.}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4} \vartheta = e^\tau, \quad \frac{\tau^2}{\vartheta} = \text{const.}, \quad \frac{\vartheta^2}{a} + \frac{\tau^2}{b} = 1$$

besteht, sind von *R. Hoppe,* J. f. Math. 60 (1862), p. 185, 186, und 63 (1864), p. 131, 132, betrachtet worden. *L. Aoust,* Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 126, nennt die Kurven, bei denen $\tau^2 + \vartheta^2 = \text{const.}$ ist, *courbes cyklides.* Zu ihnen gehören die Filarevolventen zweiter Ordnung der ebenen Kurven. Siehe p. 246 daselbst.

167) Ursprünglich verstand man unter Loxodromen nur die Kurven konstanten Kurses auf der Erdkugel; die Verallgemeinerung auf eine Rotationsfläche lag jedoch wegen der Abweichung der Erdoberfläche von der Kugelgestalt nahe.

genten der Breitenkreise Normalen der Meridianebenen sind, so folgt, dass solche Kurven auch die Meridian*ebenen* unter konstantem Winkel schneiden. Umgekehrt: Schneidet eine Kurve ein Büschel von Ebenen unter konstantem Winkel und lässt man sie um die Axe des Büschels rotieren, so erzeugt sie eine Rotationsfläche, auf der sie alle Meridiankurven unter konstantem Winkel durchsetzt.

Die zuerst gegebene Definition der Loxodromen ist jedoch vorzuziehen, weil sie *von den Rotationsflächen unabhängig* ist, sodass die Loxodromen schon in der eigentlichen Kurventheorie eine selbständige Bedeutung haben[168]). Da die logarithmischen Spiralen in der Ebene (Nr. **16**) die Geraden eines Strahlenbüschels unter konstantem Winkel schneiden, so folgt, *dass die Loxodromen als eine Verallgemeinerung der logarithmischen Spiralen auf den Raum aufzufassen sind.* In der Ebene gehen aus den logarithmischen Spiralen vermöge Transformation durch reziproke Radien diejenigen Kurven hervor, die ein Kreisbüschel unter konstantem Winkel treffen, im Raume aus den Loxodromen diejenigen Kurven, die ein Kugelbüschel unter konstantem Winkel treffen, insbesondere aus den Schraubenlinien diejenigen Kurven, bei denen sich der gemeinsame Kreis des Büschels auf einen Punkt (eigentlich auf ein imaginäres Geradenpaar) reduziert.

Liegt die Axe der Loxodromen, d. h. die Axe des zugehörigen Ebenenbüschels, im Endlichen und ist sie keine Minimalgerade[169]), so kann sie als z-Axe gewählt werden. Ist ε der konstante Winkel, den die Loxodrome mit den Ebenen durch die z-Axe bilden soll, so ist

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \sin\varepsilon \tag{49}$$

diejenige totale Differentialgleichung, deren Integralkurven die zur z-Axe und zum Winkel ε gehörigen Loxodromen sind. Zur Integration führt man statt x und y den Abstand $\mathfrak{r}$ des Punktes (x, y, z) von

168) Wir können keine ältere Stelle angeben, wo die Loxodromen in dieser Weise definiert wären. Sehr nahe kommt dieser von den Rotationsflächen unabhängigen Definition *L. Aoust,* J. de math. (1) 11 (1846), p. 184—192 (insbes. p. 186), indem er hervorhebt, dass gewisse Eigenschaften der Loxodromen von der Gestalt der Fläche unabhängig sind. Obige Definition bei *G. Scheffers,* Leipziger Ber. 1902, p. 363—370.

169) Ist sie eine Minimalgerade, so giebt es dennoch zugehörige *reelle* Loxodromen, deren Bestimmung nur eine Quadratur verlangt. Sie liegen auf Kegeln, deren Querschnitte logarithmische Spiralen sind. Doch hat man diese Kurven bisher nicht betrachtet. Sie sind natürlich auch hinsichtlich der konjugiert imaginären Minimalgerade Loxodromen, gehören daher zu den *Doppelloxodromen,* von denen weiter unten die Rede ist.

der z-Axe und den Winkel θ ein, den $\mathfrak{r}$ mit der xy-Ebene bildet, sodass kommt:

$$\mathfrak{r}\,d\theta = \sin\varepsilon \sqrt{d\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 d\theta^2 + dz^2}.$$

Wählt man z irgendwie als Funktion von $\mathfrak{r}$:

$$z = f(\mathfrak{r}),$$

so liegt nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung in $\mathfrak{r}$ und θ vor, die durch Quadratur integrierbar ist:

$$\theta = \operatorname{tg}\varepsilon \int \sqrt{1 + f'(\mathfrak{r})^2}\, \frac{d\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} + \text{const.} \tag{50}$$

Ist θ die hierdurch bestimmte Funktion von $\mathfrak{r}$, so sind:

$$x = \mathfrak{r}\cos\theta, \quad y = \mathfrak{r}\sin\theta, \quad z = f(\mathfrak{r}) \tag{51}$$

die endlichen Gleichungen der Loxodromen, ausgedrückt mittels des Parameters $\mathfrak{r}$, wobei $f(\mathfrak{r})$ eine beliebig zu wählende Funktion von $\mathfrak{r}$ ist[170]).

Bindet man θ nicht vermöge (50) an $\mathfrak{r}$, betrachtet man vielmehr $\mathfrak{r}$ und θ als unabhängige Veränderliche, so sind die Gleichungen (51) die einer Rotationsfläche, deren Axe die z-Axe ist und deren Meridian durch die Wahl der Funktion $z = f(\mathfrak{r})$ bestimmt wird. Insbesondere also haben wir zugleich diejenigen Loxodromen gefunden, die auf einer gegebenen Rotationsfläche um die z-Axe liegen und mit den Meridiankurven der Fläche den Winkel ε bilden. Die Loxodromen einer Rotationsfläche sind augenscheinlich rektifizierbar, sobald die Meridiankurve rektifizierbar ist, da die Bogen beider in entsprechenden Stücken einander proportional sind[171]).

Die ältesten Untersuchungen über Loxodromen betreffen die der Kugel (Erdkugel) wegen ihres nautischen Interesses[172]). Diese *Kurven konstanten Kurses* oder *sphärischen Loxodromen* haben die Pole der Kugel zu asymptotischen Punkten. Projiziert man die Kugel von einem der Pole aus auf die Äquatorebene (stereographisch) [III A 2; III D 6a,

170) *G. Scheffers* a. a. O. zeigt, dass man die endlichen Gleichungen einer allgemeinen Loxodrome durch Differentiation und Elimination allein (ohne Quadratur) aufstellen kann.

171) Über Analogien zwischen den Loxodromen einer Rotationsfläche und den Geraden der Ebene vgl. *L. Aoust* Fussn. 168, und *P. Serret,* Théorie de lignes à double courb., Paris 1860, p. 124, 125. Nach *Serret* gilt der Satz: Verändert sich ein aus Loxodromen gebildetes Dreieck auf einer Rotationsfläche so, dass die Seiten dabei Loxodromen bleiben und zwei von ihnen durch feste Punkte gehen und dass ausserdem die Ecken ihre zugehörigen Breitenkreise nicht verlassen, so geht auch die dritte Seite durch einen festen Punkt.

172) Zur älteren Geschichte siehe *S. Günther,* Studien zur Geschichte d. math. und physik. Geographie, 6. Heft, Halle 1879, p. 333—407, worüber man bei *H. Brocard,* Bull. sciences math. (2) 3, 1. partie (1879), p. 329—339, ein Referat findet.

Nr. 4], so gehen die Meridiane in Geraden und die sphärischen Loxodromen, weil die Kugel dabei konform abgebildet wird, in *logarithmische Spiralen* über. Dies bemerkte zuerst *E. Halley*[173]). Projiziert man sie von einer andern Stelle aus stereographisch, so gehen die sphärischen Loxodromen in die oben erwähnten Kurven über, die ein Büschel von Kreisen unter konstantem Winkel schneiden[174]). *G. Mercator*[175]) gab 1569 auf seiner berühmten *Seekarte* eine solche konforme Abbildung der Kugel, bei der sich ihre Loxodromen als Geraden darstellen. Ist λ bezw. β die geographische Länge bezw. Breite eines Punktes der Kugel vom Radius Eins, so hat dabei der Bildpunkt die rechtwinkligen Koordinaten[176]):

$$x = \lambda, \quad y = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right).$$

Liegt ein *linearer Komplex* [III C 9, III D 9] vor und ist die z-Axe seine Axe, sodass etwa

$$xdy - ydx = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot dz \tag{52}$$

für die Richtungen $(dx : dy : dz)$ derjenigen Geraden des Komplexes gilt, die durch den Punkt (x, y, z) gehen, so liegen auf einer Kugel vom Radius Eins, deren Mitte auf der Komplexaxe gelegen ist, wie auf jeder Fläche ∞^1 Kurven, die in jedem Punkte eine der hindurchgehenden Komplexgeraden berühren, und diese Kurven sind nach *J. Plücker*[177]) Loxodromen, die den Winkel ε mit den Ebenen durch die Axe des Komplexes bilden. In der That zieht die Gleichung (52) zusammen mit:

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1, \quad xdx + ydy + (z - a)\,dz = 0$$

die Gleichung (49) nach sich.

---

173) Lond. Trans. für 1695—97, 18, p. 202.

174) *G. Holzmüller,* Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 269—289, insbesondere p. 279 u. f., nennt diese Kurven *logarithmische Doppelspiralen.*

175) *G. Kremer,* genannt *Mercator,* machte über die Konstruktion seiner Karte keine erschöpfenden Mitteilungen. Den mathematischen Ausdruck gab *H. Bond* 1645, den Beweis *Halley* a. a. O. Vgl. *N. Herz,* Lehrbuch der Landkartenprojektionen, Leipzig 1885, p. 114, und die ausführlichen Angaben bei *A. Breusing,* Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe, Leipzig 1892, p. 31—48.

176) Durch ähnliche Vergrösserung erhält man hieraus die allgemeinste konforme Abbildung der Kugel, bei der die Loxodromen in Geraden übergehen, durch projektive Transformation die allgemeinste Abbildung der Kugel überhaupt, bei der die Loxodromen in Geraden übergehen. Die allgemeinste Abbildung der Kugel, bei der die Loxodromen in Kreise übergehen, wurde von *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1898, p. 261—294, insbes. p. 273, 274 bestimmt.

177) Neue Geometrie des Raumes, hrsg. von *F. Klein,* 1. Abt. Leipzig 1868, p. 61 Anm.

Betrachtet man ferner diejenige eingliedrige projektive Gruppe des Raumes, die von einer infinitesimalen projektiven Transformation erzeugt wird [II A 6, Nr. 4], bei der x, y, z die Inkremente

$$(53)\begin{cases}\delta x = (y \sin \varepsilon + xz \cos \varepsilon)\delta t, \quad \delta y = (-x \sin \varepsilon + yz \cos \varepsilon)\delta t, \\ \delta z = (z^2 - 1) \cos \varepsilon \delta t\end{cases}$$

erfahren, so erkennt man, dass die Fortschreitungsrichtungen $(\delta x : \delta y : \delta z)$ der Punkte (x, y, z) der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

die Kugel berühren, weil diese Kugelgleichung und die Gleichungen (53) die Gleichung

$$x \delta x + y \delta y + z \delta z = 0$$

nach sich ziehen. Da infolge dieser Gleichungen die Definitionsgleichung (49) der Loxodromen erfüllt ist, so folgt: Bei der vorliegenden Gruppe durchlaufen die Punkte jener Kugel Bahnkurven, die auf der Kugel liegen und Loxodromen sind, deren Axe die z-Axe ist. Demnach sind die sphärischen Loxodromen *W-Kurven* (vgl. Nr. **20**). Dies haben *F. Klein* und *S. Lie*[178]) bemerkt.

Ausser den sphärischen Loxodromen[179]) sind insbesondere die auf Rotationsflächen 2. O. und auf einzelnen Rotationsflächen 4. O., nämlich solchen, die durch Drehung einer Parabel oder eines Kreises entstehen, rechnerisch verfolgt worden; auf die von einzelnen Autoren behandelte Frage nach denjenigen Rotationsflächen, die durch besondere Eigenschaften ihrer Loxodromen charakterisiert sind, gehen wir nicht ein[180]).

---

178) Paris C. R. 70 (1870), p. 1224. Man kann hinzufügen: Von den sonstigen Bahnkurven jener eingliedrigen Gruppe sind nur noch die in den Ebenen $z = \pm 1$ gelegenen Kurven Loxodromen hinsichtlich der z-Axe, nämlich logarithmische Spiralen, deren asymptotische Punkte auf der z-Axe liegen.

179) Ihre geodätische Krümmung [III D 3, Nr. **12**] und ihre Torsion bei *P. Serret,* Théorie des lignes à double courb., Paris 1860, p. 47, 48. Vgl. auch p. 56. Über die sphärischen Loxodromen vgl. auch *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1902, p. 365.

180) Ausser den genannten Arbeiten erwähnen wir noch folgende Schriften, die über allgemeine oder spezielle Loxodromen handeln: *E. W. Grebe,* Archiv Math. Phys. (1) 2 (1842), p. 127—132; *J. R. Boyman,* Archiv Math. Phys. (1) 7 (1846), p. 337—348; 13 (1849), p. 375—377; *J. A. Grunert,* Loxodromische Trigonometrie, Leipzig 1849; *A. Tissot,* Nouv. ann. (1) 11 (1852), p. 454—457; *J. A. Grunert,* Archiv Math. Phys. (1) 21 (1853), p. 304—314; *W. Plagemann,* ebenda (1) 32 (1859), p. 1—67; *P. Serret,* Fussn. 179, ausserdem p. 4, 39, 101—108, 124, 125; *A. Enneper,* Gött. Nachr. 1869, p. 459—475; Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 466—475; *A. Laisant,* Nouv. ann. (2) 13 (1874), p. 573—575; *L. Aoust,* Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 163, 164, 180—183, 193, 209, 259,

Man kann fragen, welche Kurven in doppelter Weise als Loxodromen aufgefasst werden können, doch scheint man diese *Doppelloxodromen*, zu denen also zwei Axen gehören, nicht allgemein untersucht zu haben. Ist die eine Axe unendlich fern, so führt das Problem zu denjenigen *Loxodromen, die zugleich Schraubenlinien sind.* Wenn dabei die im Endlichen gelegene Axe die unendlich ferne Axe senkrecht kreuzt, so kommt man zu den *Loxodromen des Rotationskegels.* Sie sind nämlich zugleich Schraubenlinien auf solchen Cylindern, die der Kegelaxe parallel laufen und deren senkrechte Querschnitte logarithmische Spiralen liefern, deren asymptotische Punkte auf der Kegelaxe liegen. Sie heissen *cylindro-konische Schraubenlinien.* Bei der Abwickelung ihrer Kegel gehen sie in logarithmische Spiralen über. Dass sie eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften haben[181]), weshalb sie sehr häufig betrachtet worden sind[182]), hat seinen Grund darin, dass *alle*[183]) Bahnkurven einer gewissen eingliedrigen projektiven Gruppe solche Kurven sind, dass sie also zu den *W-Kurven* (Nr. 20) gehören[184]). Diese eingliedrige Gruppe geht aus einer solchen infini-

260; *C. Dina,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 298—310, insb. p. 309; *F. Joachimsthal*, Anwendung d. Diff.- u. Int.-R. auf d. allg. Theorie d. Flächen, 1. Aufl., Leipzig 1872, p. 83, 84 (3. Aufl. 1890, p. 147, 148); *A. Enneper,* Math. Ann. 19 (1882), p. 72—83; *H. Molins,* Toulouse Mém. (8) 7 (1885), p. 293—322; *E. Cesàro,* Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 127—142, insbesondere p. 135—137; *J. Tesař*, Prag Berichte 1886, p. 347—360; *F. August*, Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 154—166; *G. Pirondini*, Giorn. di mat. 27 (1889), p. 168—223, insb. p. 181; Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 165—212, insbes. p. 173, 202; *A. Puchta,* Monatshefte Math. Phys. 1 (1890), p. 443—450; *H. Résal,* Expos. de la théorie des surfaces, Paris 1891, p. 143—147; Paris C. R. 114 (1892), p. 147—152; *F. Cesàro*, Nat. Geom., Leipzig 1901, p. 181—184.

181) *P. Serret*, Fussn. 179, p. 101, charakterisiert sie als Schraubenlinien, bei denen der Krümmungsradius eine lineare Funktion der Bogenlänge ist. Die Striktionslinie der Fläche ihrer Hauptnormalen, ferner der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte und drittens die Gratlinie ihrer Polarfläche sind ebenfalls cylindrokonische Schraubenlinien, deren Kegel dieselbe Axe und Spitze wie der Kegel der Urkurve haben, siehe ebenda p. 105.

182) Von ihnen handelt ein grosser Teil der angegebenen Arbeiten.

183) Sie unterscheiden sich hierdurch wesentlich von den p. 251 erwähnten *W*-Kurven. Denn von den Bahnkurven der daselbst angegebenen Gruppe sind nur gewisse als Loxodromen aufzufassen, nämlich die auf einer Kugel gelegenen (abgesehen von ebenen Kurven). Vgl. Anm. 178. Die ausgezeichneten Eigenschaften der sphärischen Loxodromen sind daher, wie man sagen kann, auf ihre Kugel beschränkt, betreffen also sphärische Konstruktionen, denen man sie unterwerfen kann, während man bei den cylindro-konischen Schraubenlinien zur Entwickelung ihrer Eigenschaften als *W*-Kurven den ganzen Raum zur Verfügung hat.

184) Siehe *Lie-Scheffers,* Vorl. über Differentialgleichungen, Leipzig 1901, p. 244.

tesimalen Transformation hervor, die dem Raume eine unendlich kleine Rotation um eine Axe (z-Axe) verbunden mit einer unendlich kleinen ähnlichen Vergrösserung von einem Punkte der Axe (Anfangspunkt) aus erteilt, bei der also x, y, z Inkremente erhalten von der Form:

$$\delta x = (-ay + bx)\delta t, \quad \delta y = (ax + by)\delta t, \quad \delta z = bz\delta t,$$

wobei also, wenn $\mathfrak{r}, \theta$ Polarkoordinaten in der xy-Ebene bedeuten (sodass $x = \mathfrak{r}\cos\theta,\ y = \mathfrak{r}\sin\theta$ ist):

$$\delta\mathfrak{r} = b\mathfrak{r}\delta t, \quad \delta\theta = a\delta t, \quad \delta z = bz\delta t.$$

Die Bahnkurven der Gruppe sind nämlich gegeben durch:

$$\mathfrak{r} = \text{const.}\, e^{\frac{b}{a}\theta}, \qquad z = \text{const.}\, e^{\frac{b}{a}\theta}.$$

Dass sie cylindro-konische Schraubenlinien sind, folgt daraus, dass die Gruppe konform ist, jeden Rotationskegel, dessen Spitze der Anfangspunkt und dessen Axe die z-Axe ist, in sich überführt und ebenso jeden solchen Cylinder parallel der z-Axe, dessen Querschnitt in der xy-Ebene eine gewisse logarithmische Spirale mit dem Anfangspunkt als asymptotischem Punkte ist[185]. Ein Grenzfall der cylindro-konischen Schraubenlinien sind die *gemeinen Schraubenlinien* (Nr. **20**).

Eine Verallgemeinerung der cylindro-konischen Schraubenlinien sind diejenigen Kurven auf einem *allgemeinen* Kegel, die alle Mantellinien desselben unter konstantem Winkel durchsetzen[186]. Sie können

185) Deshalb und weil die Gruppe jede Gerade in eine Gerade überführt, sind die in Anm. 181 angegebenen Sätze eine unmittelbare Folge davon, dass die cylindro-konischen Schraubenlinien W-Kurven sind.

186) *E. Cesàro* giebt ihnen den leicht irreführenden Namen: *konische Schraubenlinien* (Natürl. Geom. p. 181). *P. Serret,* Théorie nouv. etc., p. 102, 103, und *E. Cesàro,* Nat. Geom., p. 184, haben den falschen Satz, dass diejenigen unter diesen Kurven, die zugleich Schraubenlinien im gewöhnlichen Sinne sind, cylindro-konische Schraubenlinien seien. Vielmehr liegen auf jeder Fläche 2. O., die durch Rotation eines Kegelschnittes um seine Hauptaxe entsteht, Kurven, die einerseits die von einem Brennpunkt ausgehenden Radienvektoren unter konstantem Winkel schneiden und andererseits mit der Richtung der Rotationsaxe einen konstanten Winkel bilden. Diese Kurven schneiden zugleich die von dem anderen Brennpunkt ausgehenden Radienvektoren unter konstantem Winkel. Sie gehören also in *doppelter* Weise zu den im Text genannten Kurven und sind Schraubenlinien. Da der Cylinder der Schraubenlinien als Kegel aufgefasst werden kann, sind dies also Kurven, die zugleich auf *drei* Kegeln liegen und die Mantellinien jedes dieser drei Kegel unter einem konstanten Winkel schneiden. Ist die Rotationsfläche 2. O. ein Rotationskegel, so kommt man zu cylindro-konischen Schraubenlinien. Siehe *G. Pirondini,* J. f. Math. 118 (1897), p. 61—73; *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1902, p. 369, 370. Nach *E. Cesàro* lässt sich

auch als diejenigen Kurven definiert werden, die eine Schar von konzentrischen Kugeln unter konstantem Winkel durchsetzen, also ein gewisses Kugelbüschel, weshalb sie sich den früher erwähnten Kurven unterordnen, die aus Loxodromen durch Transformation durch reziproke Radien hervorgehen, freilich nur, wenn man auch imaginäre Transformationen gestattet.

35. Minimalkurven und Kurven der tetraedralen Komplexe. Die imaginären Kurven von der Länge Null, die sogen. *Minimalkurven*, die durch die totale Differentialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

definiert sind, wurden schon in III D 1, 2, Nrr. **12**, **13**, allgemein besprochen, sodass nur die Erwähnung einiger Einzelheiten nötig ist[187]).

Da man bei einer Minimalkurve von Bogenlänge, Krümmung und Torsion nicht sprechen kann, so haben sie gegenüber allen Bewegungen des Raumes andere Differentialinvarianten als die sonstigen Kurven (vgl. III D 1, 2, Nr. **14**). Sind wie in III D 1, 2, Nr. **13**:

$$(54)\qquad \begin{cases} x = (1-\tau^2)f''(\tau) + 2\tau f'(\tau) - 2f(\tau), \\ y = i(1+\tau^2)f''(\tau) - 2i\tau f'(\tau) + 2if(\tau), \\ z = 2\tau f''(\tau) - 2f'(\tau) \end{cases}$$

die endlichen Gleichungen einer Minimalkurve, so ist

$$(55)\qquad (1-\tau^2)\mathfrak{x} + i(1+\tau^2)\mathfrak{y} + 2\tau\mathfrak{z} = -4f(\tau)$$

die Gleichung ihrer Schmiegungsebene im Punkte (τ), und ihre Tangente im Punkte (τ) erfüllt ausserdem die durch Differentiation nach τ hieraus hervorgehende Gleichung:

$$(56)\qquad \tau\mathfrak{x} - i\tau\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = 2f'(\tau).$$

Sie ist eine Minimalgerade. In dem Punkt, in dem sie den unendlich fernen imaginären Kugelkreis [III C 4] trifft, berührt die Schmiegungs-

---

dies verallgemeinern, indem an die Stelle der Rotationsfläche 2. O. die Fläche tritt, die durch Drehung eines Cartesischen Ovals [III C 3] um die Gerade seiner drei Brennpunkte hervorgeht. Siehe Napoli Rend. 1903, fasc. 3, p. 1—17.

187) Zur Geschichte der Minimalkurven vgl. *P. Stäckel*, Leipziger Berichte 1902, p. 101—108, wo viele Stellen erwähnt werden, an denen die *Formeln* über Minimalkurven auftreten. Mit diesen Gebilden, als *Kurven* aufgefasst, hat erst *S. Lie* synthetisch und analytisch operiert, z. B. in den Paris. C. R. 71 (1870), p. 579—583, und vielen seiner späteren Arbeiten. Es sei angemerkt, dass *J. Bertrand* in seinem Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, 1, Paris 1864, p. 657, zwar das Wort Minimalkurve (ligne minima) hat, darunter aber eine geodätische Linie versteht.

ebene (55) den Kugelkreis. Der Berührungspunkt ist durch die Angabe von τ allein festgelegt, die Schmiegungsebene (55) durch die Angabe von τ und f und endlich die Tangente nach (55), (56) durch die Angabe von τ, f, f'. Demnach kann mit *S. Lie*[188]) τ als Koordinate der ∞^1 Punkte des Kugelkreises, können ferner τ, f als Koordinaten der ∞^2 Tangentialebenen des Kugelkreises, endlich τ, f, f' als Koordinaten der ∞^3 Tangenten aller Minimalkurven, d. h. als Koordinaten der Minimalgeraden aufgefasst werden. Da bei einer Bewegung jede Tangentialebene des Kugelkreises in eine ebensolche übergeht [IV 3, Nr. **1**], so gehört zur Gruppe aller Bewegungen des Raumes eine Gruppe in den Veränderlichen τ und f.[189]) Sie besteht aus ∞^6 Transformationen, und ihre Differentialinvarianten niedrigster Ordnung sind[190]):

$$J_5 = \frac{4f'''f^V - 5f^{IV^2}}{f'''^3},$$

$$J_6 = \frac{1}{\sqrt{f'''}}\frac{dJ_5}{d\tau} = \frac{4f'''^2 f^{VI} - 18f'''f^{IV}f^V + 15f^{IV^3}}{\sqrt{f'''^9}},$$

während

$$J_7 = \frac{dJ_6}{d\tau} : \frac{dJ_5}{d\tau}, \quad J_8 = \frac{dJ_7}{d\tau} : \frac{dJ_5}{d\tau}, \ldots$$

ihre übrigen Differentialinvarianten sind. Die niedrigste, J_5, ist nach *G. Scheffers* gleich dem achtfachen reziproken Wert des Radius desjenigen Rotationscylinders, der die Minimalkurve an der betrachteten Stelle vierpunktig berührt.

Zwei Minimalkurven, die keine Geraden sind, sind nach *S. Lie*[191]) miteinander kongruent, wenn entweder bei beiden dieselbe Relation zwischen J_5 und J_6 besteht oder wenn bei beiden J_5 denselben konstanten Wert hat. Eine besondere Rolle spielen demnach — wie die gemeinen Schraubenlinien in der Schar aller übrigen Kurven — diejenigen Minimalkurven, bei denen J_5 konstant ist. Ist zunächst $J_5 = 0$, so handelt es sich um alle diejenigen ∞^5 Kurven 3. O., die Minimalkurven sind. Ist dagegen J_5 gleich einer von Null verschiedenen Konstante c, so liegen solche Minimalkurven vor, die alle mit einer kongruent sind, die sich so darstellen lässt:

$$x = \frac{8}{c}\cos t, \quad y = \frac{8}{c}\sin t, \quad z = \frac{8i}{c}\cdot t,$$

woraus hervorgeht, dass diese Kurven auf Rotationscylindern vom

188) Siehe *Lie-Scheffers,* Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893, p. 696, 697.

189) *S. Lie,* Leipziger Berichte 1893, p. 370—378, insbes. vgl. hierzu p. 377 unten.

190) *S. Lie* in *Lie-Scheffers* a. a. O. p. 702.

191) Ebenda p. 704.

Radius $8 : c$ liegen, und dass sie bei der Abwickelung ihrer Cylinder in Geraden übergehen, weshalb sie als *Minimalschraubenlinien auf Rotationscylindern*[192]) zu bezeichnen sind. Wir bemerkten schon in Nr. **31**, dass überhaupt jede Minimalkurve als Schraubenlinie aufgefasst werden kann.

Die Minimalkurven sind definierbar als diejenigen Kurven, deren Tangenten einem gewissen Linienkomplex zweiten Grades angehören, nämlich dem Komplex aller Minimalgeraden, d. h. aller Geraden, die den Kugelkreis treffen. (Vgl. III C 9; III D 1, 2, Nr. **12**.)

Liegt überhaupt irgend ein Linienkomplex vor, so kann man diejenigen Kurven betrachten, deren Tangenten sämtlich dem Komplex angehören. Sie heissen nach *J. Plücker*[193]) *Komplexkurven* [III C 9]. Ihre allgemeine Besprechung gehört nicht hierher; wir erwähnen nur einen besonderen Fall, der in naher Beziehung zu den Minimalkurven steht und in dem sich die Komplexkurven geometrisch sehr einfach definieren lassen.

Es giebt ∞^3 Geraden, die ein gegebenes Tetraeder in einem gegebenen Doppelverhältnis Δ schneiden. Der von ihnen gebildete Komplex heisst ein tetraedraler Komplex[194]). Die zugehörigen Kurven sind also diejenigen *Kurven, deren Tangenten ein gegebenes Tetraeder in einem gegebenen Doppelverhältnis* Δ *schneiden*[195]). Durch projektive Transformation gehen die zu einem Tetraeder gehörigen Kurven mit dem Doppelverhältnis Δ in diejenigen Kurven über, die zu dem transformierten Tetraeder und zu demselben Doppelverhältnis Δ gehören. Insbesondere kann man das Tetraeder durch eine projektive Transformation, die ja das Doppelverhältnis ungeändert lässt, in das der drei Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene über-

---

192) Ebenda p. 707.

193) Neue Geometrie des Raumes u. s. w., 1. Abt., hrsg. von F. Klein, Leipzig 1868, p. 61, 158, 193.

194) Er wurde zuerst von *J. Binet*, J. de l'éc. pol. 16 (1813), p. 41—67, als der Inbegriff aller Trägheitsaxen eines festen Körpers betrachtet [IV 3, Nr. 5]. *M. Chasles*, *Th. Reye* und *S. Lie* fanden später andere Definitionen dieses Komplexes. Insbesondere rührt die im Text gegebene aus einem Satze von *H. Müller*, Math. Ann. 1 (1869), p. 407—423, insb. p. 414, in Verbindung mit einem Satze von *K. G. Chr. v. Staudt*, Beiträge zur Geom. d. Lage, 1, Nürnberg 1856, p. 21, her. Vgl. die geschichtlichen Anmerkungen in *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransformationen, 1, Leipzig 1896, p. 320—326.

195) *Allgemein* wurden diese Kurven namentlich von *S. Lie* untersucht, vgl. Göttinger Nachr. 1870, p. 53—66, sowie viele spätere Arbeiten, zusammengefasst in *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransformationen, p. 326 u. f., wo man auch die Litteratur findet.

führen. Ist alsdann (x, y, z) ein Punkt einer zugehörigen Kurve, so sind die Inkremente dx, dy, dz an die Bedingung geknüpft:

$$\frac{(x dz - z dx) dy}{(y dz - z dy) dx} = \Delta. \tag{57}$$

Man bemerkt, dass jede Gleichung von der symmetrischen Form:

$$(b - c) x dy dz + (c - a) y dz dx + (a - b) z dx dy = 0 \tag{58}$$

auf die Form (57) gebracht werden kann, indem hier von den drei Konstanten a, b, c nur eine wesentlich ist. Es kommt eben nur auf den Wert

$$\Delta = \frac{a - c}{b - c}$$

an, der das zugehörige Doppelverhältnis angiebt. Die endlichen Gleichungen der durch (58) definierten Kurven eines tetraedralen Komplexes findet man so: Ist längs einer Kurve zunächst der Ausdruck

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y}$$

nicht konstant, so kann ein längs der Kurve veränderlicher Parameter t durch:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} = \frac{1}{a + t} : \frac{1}{b + t}$$

definiert werden. Alsdann giebt (58):

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{a + t} : \frac{1}{b + t} : \frac{1}{c + t}.$$

Ist also $f(t)$ eine beliebig gewählte Funktion von t, so sind:

$$x = c^{\int \frac{f(t)}{a+t} dt}, \quad y = c^{\int \frac{f(t)}{b+t} dt}, \quad z = c^{\int \frac{f(t)}{c+t} dt} \tag{59}$$

die *endlichen Gleichungen einer Kurve des tetraedralen Komplexes*[196]. Wenn aber jener Ausdruck längs der Kurve konstant ist, so sind längs der Kurve nach (58) alle Verhältnisse

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z}$$

konstant, sodass man setzen darf:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma},$$

wenn α, β, γ drei Konstanten sind, die wegen (58) an die Relation

$$(b - c)\alpha + (c - a)\beta + (a - b)\gamma = 0 \tag{60}$$

gebunden sind. Alsdann aber ergiebt sich sofort, dass die gesuchten Kurven so dargestellt werden können:

$$x^\alpha = At, \quad y^\beta = Bt, \quad z^\gamma = Ct,$$

---

196) *S. Lie*, z. B. in der Geom. d. Bertrf. 1, p. 327.

wo A, B, C beliebige Konstanten sind. *Diese Kurven treten also zu den Kurven* (59) *hinzu.* Dabei sind α, β, γ nur an die Relation (60) gebunden. Diese Kurven sind diejenigen Kurven des tetraedralen Komplexes, die eine infinitesimale projektive Transformation gestatten, bei der das Tetraeder invariant bleibt. Sie sind daher *W-Kurven* (vgl. Nr. 20)[197]).

Setzt man in (59) insbesondere[198]):

$$f(t) = \frac{1}{n},$$

wo n eine Konstante bedeutet, so gehen die besonderen Kurven des tetraedralen Komplexes hervor:

$$x^n = \text{const.}\,(a + t), \quad y^n = \text{const.}\,(b + t), \quad z^n = \text{const.}\,(c + t).$$

Eliminiert man den Parameter t, so kommt man zu zwei Gleichungen von der Form:

$$A_1 x^n + B_1 y^n + C_1 z^n + D_1 = 0, \quad A_2 x^n + B_2 y^n + C_2 z^n + D_2 = 0,$$

deren Koeffizienten konstant sind. Alsdann also sind die Kurven nach Nr. 25 *tetraedral-symmetrische Kurven*[199]).

Zwischen den Minimalkurven und den Kurven eines tetraedralen Komplexes besteht, wie gesagt, ein Zusammenhang: Bildet man nämlich nach *S. Lie*[200]) den Raum (x, y, z) der tetraedralen Kurven (59) auf einen andern Raum $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vermöge der Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

logarithmisch ab, so geht die Differentialgleichung (58) über in:

$$(61) \qquad (b - c)\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + (c - a)\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{x} + (a - b)\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = 0.$$

Die Kurven, die dieser Gleichung genügen, haben überall Fortschreitungsrichtungen $(d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z})$, die den Mantellinien des Kegels zweiter Ordnung:

$$(b - c)\,\mathfrak{y}\mathfrak{z} + (c - a)\,\mathfrak{z}\mathfrak{x} + (a - b)\,\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$$

parallel sind. Da es ∞^3 Geraden giebt, die den Mantellinien parallel sind, so sind die Kurven die *Komplexkurven desjenigen Linienkomplexes, der aus allen Geraden besteht, die die unendlich ferne Ebene in den*

197) Fussn. 196, p. 328. In seiner in Anm. 64 genannten Arbeit von 1870 hatte *S. Lie* diese Kurven noch nicht bemerkt.

198) A. a. O. p. 332, 333.

199) Dass die Tangenten tetraedral-symmetrischer Kurven das Tetraeder in einem konstanten Doppelverhältnis schneiden, hatte *J. de la Gournerie*, siehe Anm. 91, selbst schon erkannt.

200) Geom. d. Berührungstranformationen p. 356. Schon früher, z. B. Archiv for Math. og Naturv. 4 (1880), p. 477—506.

Punkten eines Kegelschnittes treffen. Durch eine *lineare* Transformation lässt sich weiterhin dieser Kegelschnitt in den *Kugelkreis* überführen.

Also folgt: Vermöge einer logarithmischen und darauf erfolgenden linearen Abbildung gehen die tetraedralen Kurven, die zu einem gegebenen Tetraeder und zu einem gegebenen Doppelverhältnis gehören, in die *Minimalkurven* über.

Hiernach lassen sich mithin auch die endlichen Gleichungen (59) ebenso wie die endlichen Gleichungen der Minimalkurven (vgl. III D 1,2, Nr. **13**) von Integralzeichen befreien. In der That, setzt man:

$$\frac{f(t)}{(a+t)(b+t)(c+t)} = F'''(t),$$

so gehen die Gleichungen (59) über in:

$$x = e^{2F(t) - (b+c+2t)F'(t) + (b+t)(c+t)F''(t)},$$

$$y = e^{2F(t) - (c+a+2t)F'(t) + (c+t)(a+t)F''(t)},$$

$$z = e^{2F(t) - (a+b+2t)F'(t) + (a+t)(b+t)F''(t)}.$$

Unter den tetraedralen Kurven sind übrigens wichtige algebraische Kurven enthalten, auf die wir aber hier nicht einzugehen haben.

36. Gemeinsame Eigenschaften einiger Kurvenfamilien. Die Schraubenlinien, die den Winkel θ mit der positiven z-Axe bilden (Nr. **32**), sind durch die Gleichung:

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \cos\theta$$

oder:

$$dx^2 + dy^2 - \operatorname{tg}^2\theta\, dz^2 = 0 \tag{62}$$

definiert, die Loxodromen, die den Winkel ε mit den Ebenen durch die z-Axe bilden, durch die Gleichung (49) in Nr. **34** oder:

$$(x dy - y dx)^2 - \sin^2\varepsilon\,(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0, \tag{63}$$

die Minimalkurven (Nr. **35**) durch die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{64}$$

und die Kurven des tetraedralen Komplexes durch die Gleichung (58) in Nr. **35**:

$$(b - c) x dy dz + (c - a) y dz dx + (a - b) z dx dy = 0. \tag{65}$$

Diese vier Gleichungen ordnen sich der gemeinsamen Form unter [201]):

201) Auch die in Nr. **34** zum Schluss erwähnten Kurven, die mit den von einem festen Punkte ausgehenden Radienvektoren einen konstanten Winkel bilden,

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{66}$$

die in dx, dy, dz homogen sein soll. Eine solche totale Differentialgleichung heisst nach *S. Lie*[202]) eine *Monge'sche Gleichung* [II A 5, Nr. 32]. Sie ordnet jedem Punkte (x, y, z) einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ der hindurchgehenden Integralkurven zu, der im Falle der vier angegebenen Familien von Kurven insbesondere vom *2. Grade* ist. Sehen wir von den Minimalkurven ab, so können wir längs einer Integralkurve x, y, z als Funktionen der Bogenlänge s auffassen. Sind dann wie früher $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungskosinus der Tangente, Haupt- und Binormale, $1:\varrho$ und $1:T$ Krümmung und Torsion einer Integralkurve im Punkte (x, y, z), so ist nach (66):

$$\Omega(x, y, z, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0.$$

Differentiation nach s liefert vermöge der Frenet'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. 31):

$$\Omega_x\alpha_1 + \Omega_y\beta_1 + \Omega_z\gamma_1 + \frac{1}{\varrho}(\Omega_{\alpha_1}\alpha_2 + \Omega_{\beta_1}\beta_2 + \Omega_{\gamma_1}\gamma_2) = 0.$$

Ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Krümmungsmittelpunkt des betrachteten Kurvenpunktes, sodass

$$\mathfrak{x} = x + \varrho\alpha_2, \quad \mathfrak{y} = y + \varrho\beta_2, \quad \mathfrak{z} = z + \varrho\gamma_2$$

und

$$\varrho^2 = (\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2$$

ist, so folgt hieraus durch Elimination von $\varrho, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

$$(\Omega_x\alpha_1 + \Omega_y\beta_1 + \Omega_z\gamma_1)\{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2\}$$
$$+ \Omega_{\alpha_1}(\mathfrak{x} - x) + \Omega_{\beta_1}(\mathfrak{y} - y) + \Omega_{\gamma_1}(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Wegen der Form dieser Gleichung hinsichtlich $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ liest man aus ihr den Satz von *S. Lie*[203]) ab:

Diejenigen Krümmungsmittelpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, *die zu einem bestimmten Punkte* (x, y, z) *und zu allen denjenigen Integralkurven durch diesen Punkt gehören, die daselbst eine gemeinsame Tangente* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *haben, liegen auf einem Kreise,* dessen Ebene natürlich zu der gemeinsamen Tangente senkrecht ist und der durch den betrachteten Punkt (x, y, z) geht.

---

ordnen sich durch ihre analytische Definitionsgleichung der Form (66) unter, wie überhaupt die Kurven, die ein Büschel von Kugeln unter konstantem Winkel schneiden.

202) Geom. d. Bertrf. p. 249.

203) Leipziger Berichte 1898, p. 1, 2, wo er diesen Satz als eine Ausdehnung des *Meusnier*'schen Satzes für Kurven auf Flächen (vgl. III D 1, 2, Nr. 35; III D 3, Nr. 1) bezeichnet. Angedeutet schon in den Leipziger Berichten 1896, p. 412 Anm.

Insbesondere gilt dieser Satz für alle Loxodromen, die die Ebenen eines Büschels unter demselben Winkel schneiden, *ferner für alle Schraubenlinien,* die gleiche Neigung gegen eine feste Ebene haben, *und für alle Kurven eines tetraedralen Komplexes.*

Die Schmiegungsebene eines Punktes (x, y, z) ist nach *S. Lie*[204]) nur dann stets die Tangentialebene des zugeordneten Kegels von Fortschreitungsrichtungen längs der Tangente der Integralkurve, wenn die Monge'sche Gleichung (66) die speziellere Form

$$\Phi(ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx, dx, dy, dz) = 0$$

hat. Alsdann hat sie insbesondere ∞^3 geradlinige Integralkurven, d. h. dann handelt es sich um *Komplexkurven* (vgl. Nr. **35**). Diesem Fall ordnen sich die *Minimalkurven* und die *Kurven eines tetraedralen Komplexes* unter [205]).

V. Sonstiges.

37. Aufzählung einiger nicht-besprochenen transcendenten Kurven. Aus dem Altertum stammt die *Quadratrix* des *Dinostratus* $\left(y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r}\right)$, angewandt zur Quadratur des Kreises. Zu demselben Zweck sind auch andere *Quadratrixkurven* ersonnen worden[206]). Dazu gehört die *Tschirnhaus*'sche *Quadratrix,* die affin ist zur *Sinuslinie* $y = \sin x$, die *Ozanam*'sche *Kurve,* die affin ist zur Kurve $y = \sin^2 x$, und die von *C. Falkenburg*[207]) als *Kochleoide* bezeichnete Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ ist: $\mathfrak{r}\,\theta = \text{const.} \sin\theta$, die aber schon aus älterer Zeit stammt. Die Sinuslinie und die Kochleoide lassen sich durch Projektion gemeiner Schraubenlinien (Nr. **20**) erzeugen wie auch die Cykloiden mit gerader Polbahn (Nr. **6**). Die Bedeutung der Sinuslinie sowie der durch *Superposition mehrerer*

---

204) Geom. d. Bertrf. p. 305.

205) Für Komplexkurven ist von *S. Lie*, Christiania Videnskabs-Selskabet Forhandlinger 1883, p. 20, ein falscher Satz betr. ihre *Torsion* ausgesprochen und in *Lie-Scheffers* a. a. O. mit fehlerhaftem Beweise p. 308 wiedergegeben worden. Denselben falschen Satz findet man auch bei *A. Demoulin,* Paris C. R. 115 (1892), p. 282, und Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle, Brüssel u. Paris 1894, p. 57. Jedoch erkannte *Demoulin* in den Pariser C. R. 124 (1897), p. 1077, den Fehler. Vgl. auch *K. Zindler,* Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 30 Anm.

206) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 410—416. Wir fügen zu seinen Citaten hinzu: *G. Fouret,* Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 39—43.

207) Zu *G. Loria's* Citaten sei noch hinzugefügt: *A. Bentheim*, Nieuw Archiv voor wiskunde, 10 (1883), p. 76—80.

Sinuslinien in verschiedenem Massstab entstehenden *Schwingungskurven* für die Theorie der Elasticität ist bekannt[208]).

Auch der Name *Spirale* stammt aus dem Altertum (*Loria*, Spezielle Kurven, p. 441, Nr. 188, führt ihn auf *Plato* zurück.) Er lässt sich kaum mathematisch streng definieren[209]). Auch die Erklärungen bei *G. Loria*: Kurven, deren geeignetste analytische Darstellung man bei Anwendung von Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$, θ erhält, und bei *E. Pascal*: Kurven, die sich in unendlich vielen Windungen, von denen jede folgende entweder innerhalb oder ausserhalb der vorhergehenden liegt, um einen Punkt drehen, sind nur Notbehelfe[210]). Herkömmlich nennt man unter den Spiralen ausser den archimedischen (Nr. **6**), den logarithmischen (Nr. **16**) und den Sinusspiralen (Nr. **21**—**24**) noch die *parabolischen oder Fermat'schen Spiralen*[211]) ($\mathfrak{r}^2 = a^2\theta$), die *hyperbolischen Spiralen* ($\mathfrak{r} = a : \theta$) und die *reziproken parabolischen Spiralen oder Litui* ($\mathfrak{r}^2 = a^2 : \theta$). Allgemein nennt *G. Loria*[212]) die Kurven $\mathfrak{r}^n = a^n\theta$ *Spiralen höheren Grades. W. Rulf*[213]) spricht von *algebraischen Spiralen*, ohne ausdrücklich zu sagen, dass er darunter diejenigen transcendenten Kurven versteht, die durch eine algebraische Gleichung zwischen $\mathfrak{r}$ und θ definiert werden können[214])[215]).

Betrachtungen der Mechanik [IV 11b] führten zu den *Brachistochronen* (Kurven kürzester Fallzeit) und *Tautochronen* (Kurven mit von der Wegelänge unabhängiger Fallzeit), die unter den einfachsten Voraussetzungen gemeine Cykloiden (Nr. **6**) sind[216]). Ebenso entspringen der Mechanik [IV C, Abschn. III] die *elastischen Kurven*, die sich jedoch nicht durch endliche geschlossene Gleichungen mittels der elementaren transcendentenu Funktionen, sondern nur durch Differentialgleichungen [III D 8] definieren lassen[217])[218]).

---

208) Der englische Maler *W. Hogarth* machte die Sinuslinie als Wellenlinie zur Grundlage seiner ästhetischen Untersuchungen in dem Buche: Analysis of beauty, 1753.

209) Siehe *Hoffmann-Natani,* Mathem. Wörterbuch 6, Berlin 1867, p. 524.

210) *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 442, vgl. auch p. 596; *E. Pascal*, Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von *Schepp,* 2, Leipzig 1902, p. 544.

211) *E. Weyer,* Über die parabolische Spirale, Kiel und Leipzig 1894.

212) *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 434—441.

213) Monatshefte Math. Phys. 3 (1892), p. 211—216.

214) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 441—448.

215) *W. Rulf* zeigte Fussn. 213, wie man den Krümmungsradius einer Spirale bestimmen kann, sobald man den Krümmungsradius derjenigen Spirale kennt, deren Radienvektoren die Polarsubnormalen der ursprünglichen Spirale sind.

216) Vgl. die Lehrbücher der Mechanik, ferner wegen der Verallgemeinerungen *C. H. Müller,* Über barytrope und tautobaryde Kurven, Diss. Marburg 1880.

217) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 582—585.

Es würde zu weit führen, wollten wir solche Kurven besprechen, die durch gewisse Operationen aus bekannten Kurven hervorgehen und die *G. Loria abgeleitete Kurven* nennt, wie z. B. die *Fusspunktkurven* und die *Inversen* bekannter Kurven, ferner Kurven, die beim Gleiten eines starren Winkels längs einer Kurve entstehen, die *schiefen Evoluten* einer Kurve u. s. w. Derartige ebene Kurven hat namentlich *L. Aoust* in seiner Analyse des courbes planes, 1873, systematisch betrachtet, alsdann auch *G. Loria.* Zwischen verschiedenen der so hervorgehenden Kurvenarten bestehen besondere Beziehungen. Ein enger Zusammenhang[219]) besteht z. B. zwischen den *Schwerpunktskurven* und *Verfolgungskurven*[220]). Die Betrachtung der *Brennkurven* oder *kaustischen Kurven,* die durch Refraktion oder Reflexion entstehen, führte vielfach zu den schon von uns vorgeführten ebenen Kurven[221]).

Weiterhin nennen wir noch die *Antiloga* von *K. Chr. Fr. Krause*[222]), dargestellt durch die Gleichung $s\tau = a$, wenn s die Bogenlänge, τ der Tangentenwinkel ist, und die von *Krause* und *A. Peters* untersuchte Kurve[223]), bei der $s^2 = a^2\tau$ ist und die später von *E. Cesàro*[224]) als *Klothoide* bezeichnet und durch die natürliche Gleichung $s\varrho =$ const. (ϱ = Krümmungsradius) dargestellt wurde[225]).

Ferner sind diejenigen Untersuchungen erwähnenswert, die sich auf *Kurven* beziehen, *die gewissen unter ihren höheren Evoluten ähnlich*

218) Bei *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1898, p. 440, treten *elliptische Kurven 2. Art* auf, die eine grosse Klasse unter sich verwandter transcendenter Kurven bilden, die in geometrischer Hinsicht und mit Rücksicht auf ihre Anwendungen allgemein studiert zu werden verdienen, wozu die Verfasser auffordern.

219) Nach *E. Cesàro,* Nouv. ann. (3) 2 (1883), p. 85—89; ebenda 5 (1886), p. 65—83; Natürliche Geometrie, p. 97—110.

220) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 607—614. Zu diesen Kurven gehört die *Hundekurve,* die Bahn des seinem Herren nachlaufenden Hundes bei Voraussetzung konstanter Geschwindigkeiten von Herr und Hund. Sie ist, wenn die Bahn des Herren gerade ist, im allgemeinen interscendent [Nr. **1**] (im besonderen algebraisch), dagegen transcendent, wenn die Geschwindigkeiten von Herr und Hund gleich gross sind.

221) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 662—672.

222) Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima, hrg. v. *H. Schröder,* München 1835 (vom Verf. nicht eingesehen).

223) Z. B. bei *A. Peters,* Neue Kurvenlehre, Dresden 1835, p. 173, 174.

224) Nouv. ann. (3) 5 (1886), p. 511—520; Natürliche Geometrie, p. 15.

225) Sie ist ein Spezialfall der Kurven, bei denen $\varrho = as^n$ ist. Zu diesen Kurven gehört auch die Kreisevolvente (Nr. **6**). Vgl. *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 30 (1892), p. 326—343, und *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 457—460.

oder kongruent sind[226]). Zu ihnen gehören die logarithmischen Spiralen (nach Nr. **16**) und die Cykloiden (nach Nr. **9**).

Stillschweigend haben wir uns auf solche Kurven beschränkt, in deren Gleichungen nur im allgemeinen endliche, stetige und differenzierbare Funktionen auftreten. Die *ausserordentlichen Kurven*, bei denen diese Voraussetzungen nicht sämtlich erfüllt sind, haben ihren Platz in der Funktionentheorie [II A 1, Nr. 9 ff.].

38. Einteilung der ebenen transcendenten Kurven. Die Gleichungen der ebenen transcendenten Kurven in Cartesischen oder projektiven Koordinaten sind so verschiedenartig, dass aus ihnen kein Einteilungsprinzip hervorgeht. Man könnte vermuten, dass eine bessere Übersichtlichkeit entspringe, wenn natürliche Bestimmungsstücke, wie Bogenlänge s und Krümmungsradius ϱ, eingeführt würden. Aber dann zeigt es sich, dass die interessanteren transcendenten Kurven durchaus nicht immer den einfacheren Gleichungen in s und ϱ entsprechen. Vgl. z. B. die vielen natürlichen Gleichungen in *E. Cesàro*'s Natürlicher Geometrie. Eine bessere Übersicht als die Darstellung in x, y gewährt allerdings die Darstellung in s und ϱ, wie man z. B. an den cykloidalen Kurven (Nr. 8) sieht. Ein besonderer Wert der Darstellung in natürlichen Koordinaten ist, dass sie gestattet, *systematisch* die Identität von Kurven nachzuweisen, die aus verschiedenen Definitionen hervorgegangen sind, da zwei ebene Kurven dann und nur dann kongruent sind, wenn bei beiden zwischen ihren Differentialinvarianten gegenüber allen Bewegungen (vgl. III D 1, 2, Nr. **14**) dieselben Relationen bestehen. Ein klassisches Beispiel hierfür gab *E. Cesàro*, vgl. Anm. 104.

Einen ernstlichen Versuch, zu einer rationellen Einteilung der ebenen transcendenten Kurven zu gelangen, macht *G. Loria*[227]). Er betrachtet nämlich nach *G. Fouret*[228]) und *Clebsch-Lindemann*[229]) eine Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, die in x, y, y' algebraisch ist:

$$f(x, y, y') = 0.$$

Sie sei insbesondere in y' vom μ^{ten} Grade. Durch jeden Punkt der Ebene gehen dann von den ∞^1 algebraischen oder transcendenten

226) *V. Puiseux*, J. de math. (1) 9 (1844), p. 377—399; *G. Pirondini*, Nouv. ann. (3) 5 (1886), p. 460—480; *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 622—626.

227) Le curve panalgebriche, Prague Soc. Mém. 1901, Nr. 36, 1902, und: Spezielle Kurven, p. 407, 408, 724—730.

228) Paris soc. math. Bull. 2 (1874), p. 72—83.

229) Vorlesungen über Geometrie 1, Leipzig 1876, p. 962—978.

Integralkurven deren μ. Setzt man $y = ax + b$, $y' = a$ und ist die hervorgehende Gleichung:

$$f(x, ax + b, a) = 0$$

bei gegebenem a und b vom ν^{ten} Grade in x, so heisst dies, dass es unter den ∞^1 Integralkurven deren ν giebt, die eine beliebige Gerade $y = ax + b$ berühren. Alsdann liegen die Berührungspunkte der von irgend einem Punkte O an alle Integralkurven gezogenen Tangenten auf einer algebraischen Kurve von der Ordnung $\mu + \nu$, die O als μ-fachen Punkt hat. Entsprechend hüllen diejenigen Tangenten, die in allen Schnittpunkten irgend einer Geraden g mit den Integralkurven konstruiert werden können, eine algebraische Kurve von der Klasse $\mu + \nu$ ein, die die Gerade g als ν-fache Tangente hat. Umgekehrt, wenn eine ebene transcendente Kurve so beschaffen ist, dass die Berührungspunkte aller von einem *beliebigen* Punkte O der Ebene ausgehenden Tangenten an sie auf einer algebraischen Kurve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, oder wenn sie so beschaffen ist, dass diejenigen ihrer Tangenten, die man in ihren Schnittpunkten mit einer *beliebigen* Geraden g der Ebene konstruieren kann, eine algebraische Kurve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Klasse umhüllen, so ist die Kurve eine Integralkurve einer in x, y, y' algebraischen Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$, nach *G. Fouret*[230]).

Alle transcendenten Kurven von dieser Art nennt *G. Loria* *pan-algebraisch*. Er zeigt, dass eine grosse Anzahl von transcendenten Kurven, darunter viele wichtige, deshalb, weil sich ihre geometrischen Definitionen durch algebraische Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdrücken lassen, panalgebraisch sind, und bestimmt für sie die *Charakteristiken* μ und ν[231]). Man muss nämlich beachten, dass die Zahlen μ und ν nach den angegebenen Sätzen von *G. Fouret* auch dann bestimmbar sind, wenn nicht die Differentialgleichung einer Schar von ∞^1 panalgebraischen Kurven vorliegt, sondern nur eine solche Kurve gegeben ist, da die Zahl der von einem Punkte an die Kurve gehenden Tangenten unendlich gross ist. Die ebenen *W*-Kurven (Nr. **18**) lassen sich als die einfachsten panalgebraischen Kurven definieren, nämlich als diejenigen, bei denen $\mu = \nu = 1$ ist. Bei den allgemeinen Trochoiden (Nr. **3**) ist $\mu = 2$, $\nu = 6$, bei den spezielleren ist ν unter Umständen kleiner. Für die Kettenlinien und Traktricen (Nr. **27**) ist $\mu = \nu = 2$, für die Kurven von *Delaunay* und *Sturm* (Nr. **11**) ist $\mu = 2$, $\nu = 4$ u. s. w. Die allgemeinen Sinus-

230) Paris Bull. soc. math. 2 (1874), p. 96—100, insbes. p. 97.

231) In der vorhin erwähnten Abhandlung. Auch in *G. Loria*, Spezielle Kurven, sind jedesmal bei den einzelnen Kurven die Charakteristiken bestimmt.

spiralen (Nr. 21) und die sie umfassenden allgemeinen *Cesàro*'schen Kurven (Nr. 26) sind allerdings *nicht* panalgebraisch.

Durch die Ordnung nach den Charakteristiken wird aber wenigstens für die ausgedehnte Familie der panalgebraischen transcendenten Kurven eine rationelle Einteilung gewonnen.

39. Register der erwähnten Kurven. Nachstehend geben wir ein Verzeichnis aller im Vorhergehenden genannten Kurven mit der Angabe derjenigen Nummern, in denen sie vorkommen. Ist von einer Kurve *nur* in den Fussnoten einer Nummer die Rede, so ist dies durch Einklammern der Zahl angedeutet. Kurve oder Kurven ist mit K. abgekürzt.

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

III D 5. BESONDERE FLÄCHEN.

Von

R. v. LILIENTHAL

IN MÜNSTER I/W.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Bemerkung. Auf die im folgenden häufiger angeführten Werke:

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. 1, Paris 1887; 2, 1889; 3, 1894; 4, 1896;

L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von *M. Lukat,* Leipzig 1896/99 (im Original: Lezioni di geometria differenziale. Pisa 1893, 2. Ed. 1902),

wird unter der Bezeichnung „*Darboux*" 1, 2, 3, 4; „*Bianchi*" hingewiesen.

Weitere Litteratur siehe unter III D 1, 2, p. 2.

I. Geradlinige Flächen.

1. Erklärungen. Eine Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, nennt man eine *geradlinige* Fläche (*Linienfläche, Regelfläche, windschiefe Fläche*). Für den Fall, dass die erzeugende Gerade stets Tangente ein und derselben Kurve ist, heisst die geradlinige Fläche *abwickelbar,* weil sie alsdann auf eine Ebene abgewickelt werden kann (III D 6 a, Nrr. **3, 21**). Lässt man eine durch

einen festen Punkt gehende Gerade sich so bewegen, dass sie der erzeugenden Geraden einer Linienfläche stets parallel ist, so erhält man den *Leitkegel* (*Richtungskegel*) der Linienfläche, der bei den Zylinderflächen durch eine Gerade vertreten wird, der aber auch, wie bei der gewöhnlichen Schraubenfläche (Nr. 5), eine Ebene, die *Leitebene*, sein kann. Besitzt eine Linienfläche eine Leitebene, und treffen ihre Erzeugenden ein und dieselbe feste Gerade, so wird sie eine *Konoidfläche* genannt. Die geradlinigen Flächen mit einer Leitebene sind ausführlich untersucht von *E. Catalan*[1]), der auch im besonderen die gewöhnliche Schraubenfläche und ihre geodätischen Linien behandelte. Die um den Mittelpunkt des Leitkegels mit dem Halbmesser Eins beschriebene Kugel schneidet aus dem Leitkegel die *sphärische Indikatrix* der Linienfläche aus. Nehmen wir als Koordinaten der Punkte einer Linienfläche:

$$x = x_0 + up_x, \quad y = y_0 + up_y, \quad z = z_0 + up_z,$$

wo x_0, y_0, z_0; p_x, p_y, p_z — die Richtungskosinus der Erzeugenden — Funktionen von v allein bedeuten, so haben wir es mit einer abwickelbaren Fläche zu thun, wenn

$$\sum x_0'(p_y p_z' - p_z p_y') = 0.$$

Die Aufstellung der partiellen Differentialgleichung der geradlinigen Flächen und ihrer Arten bildet ein Hauptziel der Application d'Analyse à la Géométrie von *G. Monge* (fünfte Aufl. besorgt von *J. Liouville*, Paris 1850). Vgl. *J. A. Serret*, Lehrbuch der Diff.- und Integralrechnung, deutsch von *A. Harnack* 1, Leipzig 1884, p. 486 ff.; 2. Aufl., von *G. Bohlmann*, 1, 1897, p. 471 ff. Über die Bedingung, unter der eine gegebene, nicht abwickelbare, Fläche geradlinig ist, vgl. *E. Cosserat*, Toulouse Mém. (9) 7 (1895), p. 373.

2. Nichtabwickelbare Linienflächen. Wir erwähnen zunächst Sätze von *M. Chasles*[2]). Die Tangentialebenen der Fläche längs einer Erzeugenden bilden ein Ebenenbüschel, dessen Ebenen den Punkten der Erzeugenden, in denen sie die Fläche berühren, projektiv zugeordnet sind. Der Satz, dass die Normalen einer Linienfläche längs einer Erzeugenden ein hyperbolisches Paraboloid bilden, dürfte auf

1) J. éc. polyt. 17 (1843), p. 121. Vgl. *Ch. Bioche*, Bull. sciences math. (2) 16 (1892), p. 159.

2) J. de math. (1) 2 (1837), p. 413; Corréspond. math. et phys. 11 (1839), p. 52. Vgl. die ausführliche Untersuchung auf kinematischer Grundlage von *E. Lamarle*, Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation, Bruxelles-Paris (1859), p. 57 ff.

P. Hachette zurückzuführen sein[2a]). Jede Ebene des Büschels berührt in einem Punkte P die Fläche und steht in einem Punkte P' auf ihr senkrecht. Legt man drei Ebenen durch eine Erzeugende, so bilden die sechs Punkte, in denen Berührung und Senkrechtstehen stattfindet, eine Involution. Das Produkt p der Entfernungen der Punkte P und P' von einem festen Punkte O der Erzeugenden ändert sich nicht, wie auch der Punkt P in der Erzeugenden gewählt sein mag, es ist also eine Funktion von v allein. Der Punkt O heisst der *Mittelpunkt* (*Zentralpunkt*) der Erzeugenden. Er ist der Ort des Punktes P', falls P im Unendlichen liegt, und er ist gleichzeitig der in der Erzeugenden liegende Endpunkt ihres kürzesten Abstandes von der benachbarten Erzeugenden. Der Ort der Punkte O wird die *Grat- oder Striktionslinie*, auch *Kehllinie* der Fläche genannt. Die Tangenten der Gratlinie sind senkrecht zu den entsprechenden Tangenten der sphärischen Indikatrix. Die Koordinaten der Gratlinie ergeben sich aus den Koordinaten der Fläche, wenn man u durch die Funktion u_0 ersetzt, die durch die Gleichung

$$u_0 = -\frac{\sum x_0' p_x'}{\sum p_x'^2}$$

bestimmt wird[2b]). Bezeichnen wir mit ψ den Winkel, den die im Punkte (u) einer Erzeugenden berührende Tangentialebene mit der im Punkte (u_0) derselben Erzeugenden berührenden bildet, so ist:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{u-u_0}{\beta},$$

wo β nur von v abhängt. Man nennt β den *Verteilungsparameter (Distributionsparameter).* Das oben mit p bezeichnete Produkt hat den Wert $-\beta^2$. Für β selbst findet sich die Gleichung[3]):

$$\beta = \frac{-1}{\sum p_x'^2} \sum x_0' (p_y p_z' - p_z p_y').$$

Nennt man φ den Winkel, unter dem die betrachtete Erzeugende die Gratlinie schneidet, ferner s die Bogenlänge der Striktionslinie, σ die Bogenlänge der sphärischen Indikatrix, so ist auch:

$$\beta = -\sin\varphi \frac{ds}{d\sigma}.$$

2a) J. f. Math. 8 (1832), p. 358. Vgl. *E. Duporcq*, Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 111.

2b) Über die Bestimmung einer geradlinigen Fläche mit vorgeschriebener Gratlinie vgl. *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 345.

3) „*Darboux*“, 3, p. 302.

Für das *Gauss*'sche Krümmungsmass (III D 1, 2, Nr. 36) der Fläche erhält man den Ausdruck:

$$\frac{-\beta^2}{((u-u_0)^2+\beta^2)^2}.$$

In den Punkten der Gratlinie ist also das Quadrat des Verteilungsparameters gleich dem absoluten Wert des Produkts der Hauptkrümmungshalbmesser.

Die durch die Punkte der Gratlinie senkrecht zu den daselbst schneidenden Erzeugenden der Fläche gezogenen Flächentangenten bilden die *konjugierte* Fläche der Linienfläche. Ihre Gratlinie fällt mit der der gegebenen zusammen[4]). Bezeichnet man den Winkel zweier benachbarter Erzeugenden der gegebenen Fläche mit $d\omega$, den Winkel der entsprechenden Erzeugenden der konjugierten Fläche mit $d\omega'$, so ist das Verhältnis $\frac{d\omega'}{d\omega}$ gleich der geodätischen Krümmung (III D 3, Nr. 12) der sphärischen Indikatrix der gegebenen Fläche im entsprechenden Punkt[5]).

G. Pirondini[5a]) zeigte, dass längs der Striktionslinie einer geradlinigen Fläche die Erzeugenden der Fläche, ihre Normalen und die Erzeugenden ihrer konjugierten Fläche bezw. parallel sind den Tangenten, den Haupt- und Binormalen einer Kurve. Die Hinzunahme dieser Kurve ist häufig von Vorteil, so in dem von *R. Hoppe*[5b]) behandelten Falle, in welchem die Gratlinie zugleich Krümmungslinie der Linienfläche ist.

Eine ausführliche Erörterung der auf einer Linienfläche gezogenen Kurven findet man in dem angeführten Werke von *P. Serret*[6]). Hervorzuheben sind Sätze über Haupttangentenkurven[7]) (III D 3, Nr. 1). Die eine Schar dieser Linien wird von den Erzeugenden der Fläche gebildet. Hinsichtlich der anderen kann man mit *J. Bertrand*[8]) fragen,

4) *Paul Serret*, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 144.

5) *P. Serret*, a. a. O. p. 146.

5a) Giorn. di mat. 23 (1885), p. 296; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 218.

5b) Arch. Math. Phys. (2) 15 (1897), p. 251. Vgl. *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 8 (1889), p. 445; *Ch. Bioche*, Par. soc. math. Bull. 19 (1891), p. 42.

6) p. 143 ff.

7) Vgl. *A. Clebsch*, J. f. Math. 68 (1868), p. 151; *A. Voss*, Math. Ann. 12 (1877), p. 485; *E. Picard*, Paris, C. R. 84 (1877), p. 229; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (1) 60 (1877), p. 276; *G. H. Halphen*, Par. soc. math. Bull. 6 (1878), p. 7; *G. Koenigs*, Paris, C. R. 106 (1888), p. 51; *E. Ciani*, Giorn. di mat. 27 (1889), p. 233, wo die durch eine Raumkurve bestimmten geradlinigen Flächen untersucht sind.

8) J. de math. (1) 15 (1850), p. 332. Vgl. im selben Bande p. 481 die

ob sich in ihr Einzelkurven finden, die die Erzeugenden senkrecht schneiden. Die Erzeugenden sind dann die Hauptnormalen einer solchen Haupttangentenkurve (III D 4, Nr. 28). Hier sind folgende Fälle möglich: 1) Es findet sich keine solche Haupttangentenkurve. 2) Es findet sich nur eine solche. Alsdann geht die *Riccati*'sche Differentialgleichung (II A 4 b, Nr. 8), welche im allgemeinen die Haupttangentenkurven bestimmt, in eine lineare über und ist durch Quadraturen integrierbar[9]. 3) Es finden sich zwei. Dann besteht zwischen der ersten und zweiten Krümmung jeder derselben eine lineare Beziehung[10]. 4) Sämmtliche Einzelkurven der Schar sind orthogonale Durchdringungskurven der Erzeugenden. Hier besitzt jede der fraglichen Haupttangentenkurven konstante erste und zweite Krümmung und ist somit eine Schraubenlinie (III D 1, 2, Nr. 32; III D 4, Nr. 20). Die entsprechende Fläche ist die gewöhnliche Schraubenfläche[11] (Nr. 5).

Aus dem Umstand, dass die Bestimmung der nicht geraden Haupttangentenkurven einer Linienfläche von einer *Riccati*'schen Differentialgleichung abhängt, folgert *P. Serret*[12], dass die fraglichen Kurven aus je zwei Erzeugenden projektive Punktreihen ausschneiden[13]. Besitzt die betrachtete Linienfläche eine Leitebene, so teilen die fraglichen Kurven je zwei Erzeugende in proportionale Abschnitte[14]. Wenn die Gratlinie einer geradlinigen Fläche zugleich eine Haupttangentenkurve derselben ist, so ist die Tangente der sphärischen Indikatrix der Fläche parallel der Binormalen der Gratlinie. Zugleich sind hier die Verteilungsparameter der Fläche und ihrer konjugierten einander gleich[15].

O. Bonnet fand den Satz[16], dass, wenn eine auf einer Linienfläche gezogene Kurve von den drei Eigenschaften — eine geodätische Linie zu sein — eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden zu sein — die Gratlinie zu sein — zwei besitzt, sie auch die dritte besitzt.

Arbeit von *Voizot*, und im selben Journal (2) 1 (1856), p. 223 eine Arbeit von *A. H. Curtis*.

9) Vgl. *E. Bour*, J. éc. polyt. 22 (1862), p. 48.

10) *Serret*, a. a. O. p. 109. 11) *Serret*, a. a. O. p. 170.

12) a. a. O. p. 169; vgl. *A. Demoulin*, Mathesis (2) 9 (1899), p. 159.

13) Über die allgemeinen Kurven mit dieser Eigenschaft vgl. *Ch. Bioche*, Bull. sci. math. (2) 12 (1888), p. 290; Toulouse Ann. 3 (1889), p. 1; über die geradlinigen Flächen, auf denen die Krümmungslinien die fragliche Eigenschaft besitzen vgl. *Ch. Bioche*, Par. soc. math. Bull. 16 (1888), p. 119.

14) *Serret*, a. a. O. p. 167. Vgl. *A. Enneper*, Gött. Nachr. (1870), p. 501; (1871), p. 2.

15) *Serret*, a. a. O. p. 150; *E. Catalan*, Bull. soc. philomath. (1848), p. 68.

16) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 71.

Die Flächen, auf denen die Gratlinie eine geodätische Linie ist und zugleich die Erzeugenden unter konstantem Winkel schneidet, werden erhalten, wenn man durch die Punkte einer Raumkurve Gerade zieht, die in den rektifizierenden Ebenen (III D 1, 2, Nr. 29) der Raumkurve liegen und mit der Kurve einen konstanten Winkel bilden[17]).

Hinsichtlich der Krümmungslinien bemerkte *P. Serret*[18]), dass es in jeder Schar von solchen im allgemeinen vier Einzelkurven gibt, welche die Erzeugenden unter konstantem Winkel schneiden. Die einzige Linienfläche, bei der alle Krümmungslinien diese Eigenschaft haben, ist die gewöhnliche Schraubenfläche; die einzige geradlinige Fläche mit lauter ebenen Krümmungslinien ist das einschalige Rotationshyperboloid[19]).

Aus einer Arbeit von *U. Dini*[20]) erwähnen wir den Satz: Sind die Erzeugenden einer Linienfläche längs ihrer Gratlinie die Tangenten eines Zylinders, so ist die Fläche entweder abwickelbar oder ihr Leitkegel ist ein Kreiskegel. In derselben Arbeit sind weitere Eigenschaften von Linienflächen mit einem Kreisleitkegel mitgeteilt. — *S. Lie*[20a]) und *E. Picard*[21]) betrachteten die Linienflächen, deren Erzeugende einem linearen Komplex (III C 9) angehören. In zwei Punkten einer Erzeugenden ist die Tangentialebene einer solchen Fläche zugleich die dem Berührungspunkte hinsichtlich des Komplexes konjugierte Ebene. Der Ort jener Punkte auf der Fläche wird von zwei Haupttangentenkurven gebildet.

Sätze über geradlinige Flächen mit *Liouville*'schem Linienelement (III D 3, Nr. 18) finden sich bei *G. Demartres,* Par. C. R. 110 (1890), p. 329; besondere konjugierte Kurvensysteme (III D 3, Nr. 3) auf geradlinigen Flächen behandelt *A. Voss,* Math. Ann. 39 (1891), p. 214, 215.

3. Abwickelbare Linienflächen. (Vgl. III D 3, Nr. 4, p. 112.) Die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind die Tangenten ihrer Gratlinie. Bezeichnet man die Koordinaten der Punkte der letzteren mit x_0, y_0, z_0, mit v ihre von einem festen Punkte an gerechnete Bogenlänge, so stellen die Gleichungen:

$$x = x_0 + (u - v)\frac{dx_0}{dv}, \quad y = y_0 + (u - v)\frac{dy_0}{dv}, \quad z = z_0 + (u - v)\frac{dz_0}{dv}$$

die fragliche Abwickelbare in der Art dar, dass die Kurven $u = \text{const.}$

17) *Serret,* a. a. O. p. 149, 150. 18) a. a. O. p. 159.

19) *U. Dini,* Ann. di mat. (2) 1 (1867—68), p. 146 und ebenda (2) 4 (1870—71), p. 201.

20) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 281. 20a) Math. Ann. 5 (1872), p. 179.

21) Paris, C. R. 84 (1877), p. 229 und Ann. éc. norm. (2) 6 (1877), p. 331. Vgl. *Ch. Bioche,* Par. soc. math. Bull. 19 (1891), p. 39.

die senkrechten Durchdringungskurven der Erzeugenden ($v =$ const.) sind[21a]). Die den wachsenden bez. abnehmenden Werten der Bogenlänge v entsprechenden Halbtangenten der Gratlinie bilden den Teil der Fläche, für welchen $u - v$ positiv bez. negativ ist. Die auf dem ersten oder zweiten dieser Teile liegenden Kurven $u =$ const. werden durch die Bewegung des einen der beiden Endpunkte eines auf die Gratlinie gelegten Fadens erhalten, wenn der Faden so abgewickelt wird, dass beim Fortschreiten seines Berührungspunktes auf der Gratlinie sich die zu letzterem gehörende Bogenlänge verkleinert oder vergrössert. Sie sind also die *Filarevolventen* der Gratlinie[21b]) (III D 1, 2, Nr. **33**). Andererseits bilden sie die eine Schar der Krümmungslinien der Fläche, während die andere von den Erzeugenden gebildet wird. Hier gilt der Satz[21c]), dass die Polarflächen (Ort der Krümmungsachsen, III D 1, 2, Nr. **29**) der Kurven $u =$ const. in eine einzige Fläche zusammenfallen, die die Rolle der Krümmungsmittelpunktsfläche (Nr. **8**) der Abwickelbaren spielt[21d]) und mit der rektifizierenden Fläche der Gratlinie, d. h. der Einhüllenden ihrer rektifizierenden Ebenen (III D 1, 2, Nr. **29**) identisch ist.

Sowohl die Bestimmung der geodätischen Linien[22]) (III D 3, Nr. **14**) einer Abwickelbaren wie die Bestimmung der isogonalen Trajektorien ihrer Erzeugenden[23]) führt auf die Integration einer linearen Differentialgleichung. Schneidet eine Geodätische die zur Bogenlänge v_0 gehörende Erzeugende unter dem Winkel φ_0, so schneidet sie die zur Bogenlänge v gehörende Erzeugende unter dem Winkel $\varphi = -\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{\varrho} + \varphi_0$, wo $\frac{1}{\varrho}$ die erste Krümmung der Gratlinie bezeichnet. Dabei ist $\operatorname{tg} \varphi$ gleich dem

---

21a) Für die Anwendung von Ebenenkoordinaten vgl. *L. Painvin*, Par. C. R. 71 (1870), p. 217.

21b) *E. Beltrami*, Ann. di mat. (1) 4 (1861), p. 276; *E. Combescure*, J. f. Math. 62 (1863), p. 174.

21c) *H. Molins*, J. de math. (2) 4 (1859), p. 347.

21d) *G. Monge*, Paris Mém. sav. [étr.] 10 (1785) (lu 1776), p. 546.

22) *F. Minding*, J. f. Math. 20 (1840), p. 223; *H. Molins*, J. de math. (1) 12 (1847), p. 394; *L. Aoust*, Analyse infinités. des courbes tracées sur une surf. quelc., Paris (1869), p. 189; *A. Enneper*, Zeitschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 615. Eine zusammenfassende Darstellung gab *A. Puchta*, Wien. Ber. 97IIa (1888), p. 1269. Vgl. „*Bianchi*", p. 171; „*Darboux*" 3, p. 220. Eine charakteristische Eigenschaft der fraglichen Linien zeigte *H. v. Mangoldt*, Math. Ann. 18 (1881), p. 604. Über algebraische Geodätische und Krümmungslinien auf abwickelbaren Flächen vgl. *P. Stäckel*, Math. Ann. 43 (1893), p. 171; 45 (1894), p. 341.

23) *H. Molins*, J. de math. (1) 8 (1843), p. 132; vgl. *E. Combescure*, J. f. Math. 62 (1863), p. 174.

Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung der Geodätischen. Die sämtlichen Geodätischen, welche eine Erzeugende unter demselben Winkel schneiden, schneiden jede Erzeugende unter ein und demselben Winkel; ihre orthogonalen Trajektorien sind wieder geodätische Linien der Abwickelbaren, und jede Geodätische der letzteren ist eine isogonale Trajektorie einer derartigen Schar. — Die Aufgabe, durch eine gegebene Kurve eine abwickelbare Fläche so zu legen, dass die Kurve auf ihr ein geodätischer Kreis (III D 3, Nr. 38) mit gegebener geodätischer Krümmung wird, ist von *H. Molins*[24]) gelöst und von *W. Schell*[25]) ausführlich behandelt worden. — Bei *P. Serret*[26]) finden sich die Sätze:

1) Wenn die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche eine feste Kugel unter konstantem Winkel treffen, so ist ihre Gratlinie eine geodätische Linie des Kegels, der vom Kugelmittelpunkt aus durch diese Gratlinie gelegt ist.

2) Besitzt eine abwickelbare Fläche eine ebene Krümmungslinie, so ist ihre Gratlinie eine geodätische Linie des Zylinders, der durch die Gratlinie hindurchgeht und auf der Ebene der Krümmungslinie senkrecht ist.

3) Besitzt eine abwickelbare Fläche eine sphärische Krümmungslinie, so ist ihre Gratlinie eine geodätische Linie des Kegels, der vom Mittelpunkt der Trägerkugel aus durch die Gratlinie gelegt ist.

Hinsichtlich der geodätischen Linien auf einem Kegel bemerkt *G. Pirondini*[27]), dass die Schmiegungsebenen einer jeden konstanten Abstand von der Spitze des Kegels besitzen, und dass das Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung einer solchen Linie eine lineare Funktion der Bogenlänge ist. Beide Sätze sind umkehrbar.

In einer grossen Arbeit über die Umhüllungsflächen von Ebenen- und Kugelscharen[28]) betrachtet *G. Pirondini* den Schnitt einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche mit der Fläche selbst. Dieser Schnitt berührt die Gratlinie der abwickelbaren Fläche in einem Punkt, und in ihm ist das Verhältnis des Krümmungshalbmessers des Schnitts zum Halbmesser der ersten Krümmung der Gratlinie gleich $\frac{4}{3}$.[29]) Ferner wird die Aufgabe gelöst, durch eine gegebene Kurve eine

24) J. de math. (2) 1 (1856), p. 265.

25) Allgem. Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 2. Aufl. Leipzig 1898, p. 142.

26) a. a. O. p. 89. Den Satz 2) gibt *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 20 (1853), p. 170. S. auch *Schell,* Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 4.

27) Giorn. di mat. 26 (1888), p. 105, 115. Vgl. *X. Antomari,* Par. soc. math. Bull. 17 (1889), p. 118.

28) Bologna, Mem. (4) 9 (1889), p. 641. 29) ibid. p. 644.

Abwickelbare so zu legen, dass die Kurve durch Abwickelung der Fläche auf eine Ebene in eine gegebene ebene Kurve übergeht[30]. Auch die Frage, unter welchen Bedingungen eine mit dem Dreikant der Tangente, Haupt- und Binormale einer Kurve (III D 1, 2, Nr. 29) festverbundene Gerade eine abwickelbare Fläche beschreibt, ist von *Pirondini* behandelt[31], und im besonderen ist der Fall untersucht, in dem die Gerade einer Kante des Dreikants parallel ist. Die Parallelfläche einer Abwickelbaren wurde von *Pirondini*[32], die zwei gegebenen Flächen umschriebene Abwickelbare von *A. Enneper* untersucht[33].

II. Weitere kinematisch definierbare Flächen.

4. Cyklische Flächen. Unter einer *cyklischen* Fläche versteht man eine solche, auf der eine einfach unendliche Anzahl von Kreisen liegt. Für die analytisch-geometrische Behandlung der cyklischen Flächen ist die Methode von *E. Laguerre* von Wichtigkeit, bei der ein Kreis als Durchschnitt zweier isotroper Kegel erscheint[34]. Die erste differentialgeometrische Untersuchung dieser Flächen dürfte *A. Enneper* gegeben haben, der zunächst den Satz aufstellte[35]: Schneiden sich auf einer cyklischen Fläche je zwei unendlich benachbarte Kreise in zwei Punkten, so ist die Fläche die Einhüllende einer einfach unendlichen Schar von Kugeln und umgekehrt. Fallen die Schnittpunkte in einen Punkt zusammen, so berührt in ihm der erzeugende Kreis die Schnittpunktskurve. Jetzt ist entweder die Ebene des Kreises zugleich die Schmiegungsebene der Schnittpunktskurve oder sie enthält die Tangente der Mittelpunktskurve der erzeugenden Kreise.

Die Einhüllenden einer einfach unendlichen Kugelschar bilden eine Hauptklasse unserer Flächen[36] (vgl. III D 3, Nr. 4, p. 113). Hier bilden die erzeugenden Kreise die eine Schar der Krümmungslinien; längs jedes erzeugenden Kreises bilden die Normalen der Fläche einen Kegel, dessen Spitze (S) auf der Mittelpunktskurve (C) der Kugeln liegt,

---

30) ibid. p. 647. 31) ibid. p. 645.

32) Ann. di mat. (2) 19 (1891—92), p. 247.

33) Gött. Nachr. 1869, p. 207.

34) Paris, Bull. Soc. Philomat. 7 (1870), p. 95, 209 (III C 4).

35) Gött. Nachr. 1866, p. 243 und ausführlich: Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 393.

36) *G. Monge,* Application d'Analyse à la Géom., 5. Auflage, besorgt von *J. Liouville,* Paris 1850, p. 238, 369; *A. Ribaucour,* Paris, Bull. Soc. Philomat. 5 (1868), p. 30. Vgl. *L. Lecornu,* J. éc. polyt. Cah. 53 (1883), p. 135; *A. Pirondini,* Bologna, Mem. (4) 9 (1889), p. 672.

und die Entfernung dieser Spitze von den Punkten des betrachteten Kreises ist gleich dem zu dem letzteren gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche (vgl. Nr. **9**). Die Endpunkte der zur zweiten Schar der Krümmungslinien gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser bilden längs des betrachteten Kreises einen Kegelschnitt, der aus obigem Kegel durch eine zur Schmiegungsebene der Kurve (C) im Punkte (S) senkrechte Ebene ausgeschnitten wird. Wenn zwei unter den nicht kreisförmigen Krümmungslinien eben sind, so sind es sämtliche, und ihre Ebenen gehen durch eine Gerade. Diesen Einhüllenden hat *Enneper* noch eine besondere Arbeit gewidmet[37]) und gezeigt, dass die Krümmungslinien dieser Flächen nur dann isotherm (III D 3, Nr. **19**) sein können, wenn die Mittelpunktskurve der Kugeln eben ist, ferner, dass bei konstantem Kugelhalbmesser nur der *Kreiswulst* (*torus*) isotherme Krümmungslinien besitzt[38]). Die Bestimmung der fraglichen Flächen mit isothermen Krümmungslinien wird von *Enneper* auf eine Quadratur zurückgeführt, wenn der Krümmungshalbmesser der Mittelpunktskurve der Kugeln als Funktion des Radius der Kugeln bekannt ist[39]), auch werden besondere Fälle behandelt. Die Einhüllende einer Schar von Kugeln mit demselben Halbmesser wird *Röhrenfläche* (*Kanalfläche*) genannt[39a]).

Im allgemeinen schneiden sich zwei unendlich benachbarte erzeugende Kreise nicht, und man kann dann nach dem Ort der Punkte der Erzeugenden fragen, in denen ihre Entfernung von den Punkten des benachbarten Kreises ein Maximum oder Minimum besitzt[40]). (*Striktionslinie* im Fall des Minimums, *Elongationslinie* im Fall des Maximums.) Die Bestimmung dieser Linien führt *Enneper* auf den Satz, dass es im allgemeinen vier derartige Linien auf einer cyklischen Fläche gibt, und auf bemerkenswerte Eigenschaften dieser Linien in besonderen Fällen. — Erwähnt sei noch die *Enneper*'sche Berechnung der Hauptkrümmungshalbmesser einer cyklischen Fläche[41]).

Eine von der *Enneper*'schen verschiedene, mit Hülfe der kinematischen Methode durchgeführte und an geometrischen Ergebnissen reichere Untersuchung der cyklischen Flächen gab *G. Demartres*[42]). Wir erwähnen die Sätze, dass im allgemeinen auf jedem erzeugenden

37) Gött. Nachr. 1873, p. 217.

38) ibid. p. 225. 39) ibid. p. 229.

39a) Das unter 36) zitierte Werk von *Monge* p. 36; *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 179.

40) Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 411; vgl. *G. Demartres,* Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 151. 41) ibid. p. 402.

42) Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 123; vgl. „*Darboux*“ 4, p. 493.

Kreis zwei Punkte vorhanden sind, in denen er von einer Krümmungslinie, und zwei weitere Punkte, in denen er von einer Haupttangentenkurve berührt wird[43]). Die Ebenen zweier unendlich benachbarter Kreise (G) und (G') schneiden sich in der Charakteristik der Ebene von (G). Projiziert man (G') senkrecht auf die Ebene von (G), so hat die Projektion mit dem Kreis (G) eine Sehne gemein, deren Durchschnitt mit der Charakteristik im Punkte (P) gelegen sei. Jede in der Ebene von (G) durch (P) gelegte Gerade (L) schneidet den Kreis (G) in zwei Punkten, die als *konjugiert* bezeichnet werden sollen. Nun gilt der Satz, dass die Tangentialebenen einer cyklischen Fläche in zwei konjugierten Punkten eines erzeugenden Kreises sich in einer Geraden schneiden, die ein einschaliges Hyperboloid beschreibt, wenn sich (L) um (P) dreht[44]). Die Normalen der Fläche längs eines erzeugenden Kreises treffen einen Kegelschnitt[44]), der in zwei Gerade ausartet, wenn der Kreis (G') mit dem Kreis (G) *einen* Punkt gemein hat[45]). Irgend vier orthogonale Trajektorien der erzeugenden Kreise schneiden jeden dieser Kreise in vier Punkten mit konstantem Doppelverhältnis[46]).

Die Frage nach den cyklischen Flächen, auf denen die orthogonalen Trajektorien der erzeugenden Kreise geodätische Linien sind, führt auf die Rotationsflächen und diejenigen Flächen, bei denen die Mittelpunktskurve der Kreise konstante Torsion (III D 1, 2, Nr. **30**) besitzt, während die Ebenen der Kreise mit den Schmiegungsebenen dieser Kurve zusammenfallen, und der Halbmesser der Kreise dem Torsionshalbmesser dieser Kurve gleich ist[47]). Hier schneiden zwei Kreise auf einer orthogonalen Trajektorie einen Bogen aus, der dieselbe Länge besitzt wie das entsprechende Bogenstück der Mittelpunktskurve der Kreise[48]), und es gilt der Satz von *S. Lie*[48a]), dass die Torsion der orthogonalen Trajektorien konstant und gleich der Torsion der Mittelpunktskurve ist.

Demartres belegt mit dem Namen *isocyklische* Fläche eine solche, bei der die erzeugenden Kreise isotherm sind, und findet im Besonderen, dass ausser den Rotationsflächen und Kanalflächen diejenigen Einhüllenden einer Kugelschar, deren Krümmungslinien isotherm sind, durch die Eigenschaft gekennzeichnet werden, dass, wie schon *Enneper* fand, die Mittelpunktskurve eben ist, und die Kugeln selbst eine feste Kugel senk-

---

43) Die in 42) zitierten Ann. p. 135. 44) ibid. p. 137. 45) ibid. p. 142.

46) ibid. p. 150; *E. Picard*, Ann. éc. norm. (2) 6 (1877), p. 362. Vgl. *A. Demoulin,* Bull. sci. math. (2) 22 (1898), p. 174.

47) Die in 42) zitierten Ann. p. 152. 48) ibid. p. 155.

48a) Arch. Math. og Naturv. 5 (1881), p. 332

recht schneiden, deren Mittelpunkt in der Ebene jener Mittelpunktskurve liegt[49]).

In einer weiteren Arbeit bestimmt *Demartres* die allgemeinen isocyklischen Flächen[50]). Wenn die Ebene des erzeugenden Kreises stets Normalebene seiner Mittelpunktskurve ist, so sind die erzeugenden Kreise nur dann isotherm, wenn die Mittelpunktskurve eine logarithmische Spirale (III D 4, Nr. **16**), der Radius proportional dem Bogen derselben, gemessen vom Pol ab, ist. Die orthogonalen Trajektorien der Kreise sind Schraubenlinien[51]). Ausser den Einhüllenden einer Kugelschar sind nur diejenigen cyklischen Flächen, deren erzeugende Kreise in parallelen Ebenen liegen, durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass die Tangentialebenen längs eines erzeugenden Kreises einen Kegel umhüllen[52]).

A. Lelieuvre fand, dass die Bestimmung der Krümmungslinien einer cyklischen Fläche auf eine *Riccati*'sche Gleichung oder auf Quadraturen führt, falls die Krümmungslinien der Fläche konstant gegen die erzeugenden Kreise geneigt sind[53]).

Über Flächen, auf denen zwei Scharen von Kreisen liegen, vgl. *G. Koenigs*, Par. C. R. 109 (1889), p. 364.

Zu den Einhüllenden einer Kugelschar gehören die *Rotationsflächen*[53a]). Hier werden die Krümmungslinien von den erzeugenden Kreisen — den *Parallelen* — und den die Rotationsachse enthaltenden ebenen Schnitten — den *Meridianen* — gebildet. Letztere sind zugleich geodätische Linien. Jede Normale trifft die Rotationsachse. Dieser Treffpunkt sowie der zum Ausgangspunkt der Normalen gehörende Krümmungsmittelpunkt des Meridians fällt mit je einem Mittelpunkt der zum Ausgangspunkt der Normale gehörenden Hauptnormalkrümmungen zusammen.

5. Schraubenflächen. Eine *Schraubenfläche* entsteht durch Schraubung einer gegebenen Kurve um eine gegebene Gerade, d. h. durch Drehung der Kurve um die Gerade und Parallelverschiebung der Kurve längs der Geraden um eine Strecke, die proportional dem Drehungswinkel ist[54]). Die Proportionalitätskonstante wird der *Parameter* der Schraubenfläche genannt. Man kann die Schraubenflächen

---

49) Die in 42) zitierten Ann., p. 176.

50) Ann. éc. norm. (3) 4 (1887), p. 145.

51) *G. Pirondini*, Bologna, Mem. (4) 9 (1889), p. 678.

52) *A. Boulanger*, Nouv. Ann. (3) 11 (1892), p. 159.

53) Paris, C. R. 118 (1894), p. 697.

53a) Das unter 36) zitierte Werk von *Monge* p. 17.

54) „*Darboux*" 1, p. 89 (IV 3, Nrr. **18**—**21**).

auch kennzeichnen als die bei den infinitesimalen Schraubungstransformationen des Raumes invarianten Flächen[55]). Nehmen wir die Gerade zur z-Achse, und sind $x_0 = v \cos \alpha$, $y_0 = v \sin \alpha$, z_0 die als Funktionen von v gedachten Koordinaten der Punkte der gegebenen Kurve, so sind für φ als Drehungswinkel und g als Parameter die Gleichungen der allgemeinen Schraubenfläche diese:

$$x = v \cos (\alpha + \varphi) = x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi,$$
$$y = v \sin (\alpha + \varphi) = y_0 \cos \varphi + x_0 \sin \varphi,$$
$$z = z_0 + g\varphi.$$

Führen wir $\alpha + \varphi$ als neue Veränderliche u ein, so folgt:

(A) $$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = gu + f(v)$$

oder auch:

$$z = g \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Unter den Schraubenflächen ist die *gewöhnliche* oder *flachgängige* — von *H. A. Schwarz Meusnier*'sche genannte (Nr. 19) — ausgezeichnet, die durch Schraubung einer die Drehungsachse senkrecht schneidenden Geraden entsteht. Man kann sie auch als geradlinige Schraubenfläche mit einer Leitebene ansehen. Hier ist $f(v) = 0$, während bei einer Rotationsfläche $g = 0$. Hingewiesen sei auf die *Röhrenschraubenfläche,* die die Einhüllende einer Schar von Kugeln mit konstantem Halbmesser ist, deren Mittelpunkte sich auf einer Schraubenlinie befinden. Sie wurde von *Th. Kuen* untersucht und modelliert, wobei die Krümmungslinien zur Anschauung gebracht sind[56]).

Eine Übersicht über die Eigenschaften der Schraubenflächen nebst Anführung zahlreicher Einzelfälle gab *M. Heckhoff*[57]).

Bei der Darstellung (A) werden die Fundamentalgrössen (III D 1, 2, Nr. 34) der Fläche Funktionen von v allein, woraus sich ergibt, dass die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien $v =$ const. geodätische Linien sind, und dass die Bestimmung der Krümmungslinien, Haupttangentenkurven und Minimalkurven nur Quadraturen erfordert[58]). Auch die Bestimmung der geodätischen Linien der Schraubenflächen erfordert nur Quadraturen[58a]). Es gilt aber auch umgekehrt der Satz, dass, wenn die Fundamentalgrössen einer Fläche nur Funktionen des einen

55) *Lie-Scheffers,* Vorl. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891, p. 237, 246.

56) Modelle von *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 124.

57) Die Schraubenflächen, Bonn 1894.

58) Das unter 55) zitierte Werk p. 260.

58a) Das unter 22) zitierte Werk von *L. Aoust,* p. 187; *S. Lie,* Math. Ann. 4 (1871), p. 84; 5 (1872), p. 204; *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 22 (1884), p. 289.

der beiden zur Darstellung der Fläche angewandten Parameters sind, die Fläche notwendig eine Schraubenfläche ist. Beweise für diesen Satz gaben *A. Enneper*[59]) und *P. Stäckel*[60]).

L. Bianchi[61]) zeigt, dass jede Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche (Nr. 8) einer Schraubenfläche wieder eine solche mit derselben Achse und demselben Parameter ist, wie sie der Ausgangsfläche eignen. Betrachtet man diejenige Schar der geodätischen Linien einer Schraubenfläche, die aus den orthogonalen Trajektorien der von den Punkten der erzeugenden Kurve beschriebenen Schraubenlinien besteht, so sind ihre Tangenten die Normalen einer Schar paralleler Flächen, die von *Bianchi Evolventen* genannt werden, während die Fläche, die mit der gegebenen zusammen die vollständige Krümmungsmittelpunktsfläche jener Evolventen bildet, als *Ergänzungsfläche* bezeichnet wird. Letztere sowie jede Evolvente ist eine Schraubenfläche, welche dieselbe Achse und denselben Parameter besitzt, wie die Ausgangsfläche[62]). Die Ergänzungsfläche einer geradlinigen Schraubenfläche ist wieder geradlinig[63]). Die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche einer gewöhnlichen Schraubenfläche mit den Gleichungen $x = v \cos u$, $y = v \cos u$, $z = gu$ können durch Schraubung je einer der beiden durch die Gleichungen:

$$\pm gz + xy = 0, \quad y^2 - x^2 = g^2$$

bestimmten Raumkurven vierter Ordnung erzeugt werden, die im unendlich fernen Punkt der Schraubungsachse einen Doppelpunkt besitzen[64]). Der Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte einer Schar von Krümmungslinien einer Schraubenfläche ist wieder eine Schraubenfläche[65]). Betrachtet man die Schraubenfläche (S_1), die der Ort ist der Mittelpunkte der ersten Krümmung der von den Punkten der erzeugenden Kurven einer Schraubenfläche (S) beschriebenen Schraubenlinien, und schneidet man (S) und (S_1) durch eine zur Schraubungsachse senkrechte und sie im Punkte (P) treffende Ebene, so ergibt sich die Schnittkurve von (S_1) aus der von (S) durch eine Transformation mittelst reziproker radii vectores, deren Pol im Punkte (P) liegt, und die den Kreis mit dem Halbmesser g ungeändert lässt[66]).

G. Pirondini[67]) bezeichnet mit h den kürzesten Abstand, mit i den Winkel zweier Geraden (L) und (R). Führt nun (L) um (R)

---

59) Gött. Nachr. 1870, p. 335. 60) Leipz. Ber. 1898, p. 1.
61) Giorn. di mat. 17 (1879), p. 12.
62) ibid. p. 13. 63) ibid. p. 17.
64) ibid. p. 18. 65) ibid. p. 27. 66) ibid. p. 35.
67) Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 87.

als Achse eine Schraubenbewegung mit dem Parameter g aus, so entsteht eine abwickelbare Fläche, wenn $g = h \operatorname{cotg} i$; wenn $g = h \operatorname{tg} i$, erhält man die Fläche der Binormalen der von Punkten der Geraden (L) beschriebenen Schraubenlinien. Ferner bestimmte[68]) *Pirondini* die Schraubenflächen, bei denen die erzeugende Kurve stets Haupttangentenkurve der Fläche, oder[69]) isogonale Trajektorie der von den Punkten der Kurve beschriebenen Schraubenlinien bleibt. In einer früheren Arbeit[69a]) findet *Pirondini* die Kurven, die bei der betrachteten Schraubung stets geodätische Linien der erzeugten Fläche bleiben. Unter ihnen sind die durch die Gleichungen:

$$x = f(\alpha) \cos \alpha, \quad y = f(\alpha) \sin \alpha, \quad z = -\frac{1}{g}\int f^2(\alpha)\, d\alpha$$

dargestellten Kurven die einzigen, die bei der betrachteten Schraubung zugleich orthogonale Trajektorien der von ihren Punkten beschriebenen Schraubenlinien bleiben[70]). Längs einer Geodätischen gilt die als Verallgemeinerung des *Clairaut*'schen Satzes (III D 3, Nr. **18**, p. 150) anzusehende Gleichung:

$$\sqrt{g^2 + R^2} \sin i = \text{const.},$$

wo i den Winkel bedeutet, unter dem die Geodätische die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien schneidet, und R den senkrechten Abstand des betrachteten Punktes von der Schraubungsachse[70a]). Auf der gewöhnlichen Schraubenfläche liegt eine unendliche Anzahl von Schraubenlinien, die die geraden Erzeugenden nicht senkrecht schneiden und sich auf Kreiszylindern befinden, welche die Achse der gegebenen Schraubenfläche enthalten[71]).

E. Picard zeigte[72]), dass die Schraubenflächen die einzigen Flächen sind, deren Normalen einem linearen Komplex angehören.

6. Translationsflächen. (Vgl. III D 6 a, Nr. 26.) Mit diesem Namen belegte *S. Lie* diejenigen Flächen, die sich durch Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v)$$

darstellen lassen[73]). Betrachtet man neben dem festen Koordinaten-

---

68) ibid. p. 90. 69) ibid. p. 95.

69a) Giorn di mat. 22 (1884), p. 283.

70) ibid. p. 287; Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 96.

70a) Giorn. di mat. 22 (1884), p. 286.

71) Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 94.

72) Ann. éc. norm. (2) 6 (1877), p. 360.

73) Siehe die zusammenfassende Darstellung von *S. Lie* in Leipz. Ber. 44 (1892), p. 448 und 559, sowie *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen,

system ein bewegliches (ξ, η, ζ), dessen Achsen denen des festen parallel sind, so entsteht die Fläche sowohl durch Bewegung der Kurve mit den Gleichungen

$$\xi = \varphi_1(v), \quad \eta = \varphi_2(v), \quad \zeta = \varphi_3(v),$$

wenn der Anfangspunkt des beweglichen Systems die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

durchläuft, als durch Bewegung der Kurve mit den Gleichungen: $\xi = f_1(u)$ u. s. w., wenn der Anfangspunkt des beweglichen Systems die Kurve mit den Gleichungen: $x = \varphi_1(v)$ u. s. w. durchläuft[74]. Sind u_0 und v_0 zwei zulässige Werte von u und v, denen der Punkt (P_0) entspricht, so hat für diesen Punkt als Anfangspunkt des ξ, η, ζ-Systems die Kurve $u = u_0$ die Gleichungen:

$$\xi = \varphi_1(v) - \varphi_1(v_0), \quad \eta = \varphi_2(v) - \varphi_2(v_0), \quad \zeta = \varphi_3(v) - \varphi_3(v_0).$$

Durchläuft (P_0) die Kurve $v = v_0$, so entsteht ebenfalls die betrachtete Fläche. Sie kann also durch Entlanggleiten jeder Parameterlinie der einen Schar längs jeder Parameterlinie der anderen Schar erzeugt werden. Als geometrische Grundeigenschaft[75] unserer Flächen ist die zu betrachten, dass sie den Ort der Mittelpunkte aller Sehnen bildet, welche die Punkte der beiden Kurven — *Grundkurven* — mit den Gleichungen:

$$2x = f_1(u), \quad 2y = f_2(u), \quad 2z = f_3(u),$$
$$2x = \varphi_1(v), \quad 2y = \varphi_2(v), \quad 2z = \varphi_3(v)$$

verbinden. Die Parameterlinien unserer Flächen sind konjugiert[76] und bilden ein äquidistantes System[77] [III D 3, Nr. **40**]. Lassen sich die Punkte der beiden Grundkurven zu zweien so einander zuordnen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten der Kurven parallel sind, so besitzen die Parameterlinien der Translationsfläche eine gemeinsame Einhüllende, und diese ist eine Haupttangentenkurve der Fläche[78].

Leipzig 1902, p. 188. Vor *Lie* wurden die Translationsflächen betrachtet von *Monge* in dem unter 36) zitierten Werk p. 111, und von *K. Peterson*, der sie *Verschiebungsflächen* nennt. (Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 68.) Die ersten Arbeiten von *Lie* über die fraglichen Flächen finden sich im Arch. for Math. og Naturv. 2 (1877) p. 157 und in den Math. Annal. 14 (1879) p. 331.

74) „*Darboux*“ 1, p. 98.

75) *Lie* a. a. O. p. 449. 76) ibid. p. 449.

77) „*Darboux*“ 1, p. 99.

78) *Lie* a. a. O. p. 451. *Lie-Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, p. 362.

Sind die Punkte der Grundkurven so einander zugeordnet, dass die Annahme $u = v$ jedesmal auf Tangenten führt, die sich schneiden, so ist die Translationsfläche in eine Abwickelbare eingeschrieben, deren Tangentialebenen parallel sind den durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Tangentialebenen der Translationsfläche mit den Gleichungen:

$$x = f_1(u) - \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) - \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) - \varphi_3(v).$$ [79]

Jede Translationsfläche ist eine Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung (II A 5, Nr. **43**) von der Form:

$$R(p, q)\, r + S(p, q)\, s + T(p, q)\, t = 0,$$

jedoch ist nicht umgekehrt jede Integralfläche einer solchen Gleichung eine Translationsfläche[80]. Man kommt auf die fragliche Differentialgleichung auch durch die Aufgabe, alle Flächen zu bestimmen, die dem Komplex der eine gegebene, in der unendlich fernen Ebene liegende, Kurve schneidenden Geraden konjugiert sind und kann hier die Gleichungen der gesuchten Flächen, die entweder Abwickelbare oder Translationsflächen sind, ohne Integration bestimmen[81].

Von den Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen betrachtet werden können, hat *Lie* zuerst solche bestimmt, die unendlich viele Translationserzeugungen gestatten[82]. Treffen für jeden Punkt einer Fläche die beiden Haupttangenten die unendlich ferne Ebene in zwei Punkten, die hinsichtlich eines in dieser Ebene liegenden Kegelschnitts konjugiert sind, so hat man es mit einer Translationsfläche zu tun. Ist der Kegelschnitt im besondern der imaginäre Kugelkreis, so ergibt sich eine Minimalfläche (VI). Sollen jene Punkte hinsichtlich unendlich vieler Kegelschnitte in jener Ebene konjugiert sein, so müssen die Kegelschnitte ein Büschel bilden. Falls die vier Grundpunkte des Büschels getrennt liegen, erhält man die Gleichungsform:

$$\text{(a)} \qquad Ae^{mx} + Be^{my} + Ce^{mz} + D = 0.$$

Von den in den übrigen Fällen auftretenden Flächen erwähnen wir die gewöhnliche Schraubenfläche, die *Scherk*'sche Minimalfläche (Nr. **20**) und die *Cayley*'sche Linienfläche (III C 6).

Die Flächen mit vierfacher Translationserzeugung bestimmte *Lie*

79) *Lie* a. a. O. p. 454. 80) *Lie* a. a. O. p. 455.

81) *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 376, 381.

82) Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 477. Vgl. *R. Kummer,* Inaug.-Dissert., Leipzig 1894 (mit Abbildungen der *Scherk*'schen und *Cayley*'schen Fläche); *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 364, 410.

auf zwei Wegen[83]), von denen der spätere[83a]) das *Abel*'sche Theorem (II B 2, Nr. 41 f.) zu Hilfe nimmt. Hier findet sich namentlich die Gleichungsform:

$$\text{(b)} \qquad Ae^{x+z} + Be^{y+z} + Ce^{x+y} + Le^x + Me^y + Ne^z = 0.$$

Die durch die Gleichungen (a) und (b) gekennzeichneten Flächen gehören zu denjenigen Translationsflächen, die sich durch logarithmische Abbildung aus den von *F. Klein* und *S. Lie*[83b]) betrachteten, durch vertauschbare projektive Transformationen in sich selbst übergehenden, Flächen — „*W*-Flächen" — herleiten lassen[83c]).

Lie zeigt in Erweiterung seiner später (Nr. 27) zu besprechenden Untersuchungen über Minimalflächen, dass es eine diskrete Anzahl von Translationsflächen mit Grundkurven, deren Tangentialrichtungen eine und dieselbe irreduzible (I B 1 b, Nr. 5) Gleichung

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

befriedigen, gibt, die einer gegebenen Abwickelbaren längs einer gegebenen Kurve eingeschrieben werden können[84]). Diese Flächen werden durch Quadraturen gefunden. Weiter untersucht *Lie* die Aufgabe, eine derartige algebraische Translationsfläche in eine algebraische Abwickelbare einzuschreiben[85]) und löst das Problem für die Gleichungsform der Fläche: $z = f(x) + \varphi(y)$.[86])

7. Spiralflächen. Die fraglichen Flächen sind zuerst betrachtet von *K. Peterson*[87]), der sie als Flächen hinstellt, „die wir nur in einer anderen Stellung zu betrachten haben, um sie bei ungeänderter Form in anderem Massstabe zu haben". Von diesem Gesichtspunkt aus erscheinen die fraglichen Flächen als die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x - \frac{y}{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(y + \frac{x}{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} z = 0$$

und besitzen die endliche Gleichung:

---

83) Der erste Arch. Math. og Naturv. 7 (1882), p. 155.

83a) Par. C. R. 114 (1892), p. 334; Leipz. Ber. 48 (1896), p. 141. Vgl. *G. Wiegner,* Inaug.-Dissert., Leipzig 1893 (mit Abbildungen von Modellen); *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf. p. 404, 407.

83b) Par. C. R. 70 (1870), p. 1222, 1275; Math. Ann. 4 (1871), p. 83; *Lie-Engel,* Theorie der Transformationsgruppen 3 (1893), p. 193. Vgl. *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 490.

83c) *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 356.

84) Leipz. Ber. 44 (1892), p. 459.

85) ibid. p. 461, 468.

86) ibid. p. 559; Arch. Math. og Naturv. 4 (1879), p. 334.

87) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 75. Vgl. *P. Stäckel,* Leipz. Ber. 1898, p. 15.

$$\log z = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + f\left(\log \sqrt{x^2 + y^2} - k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$$

für k als willkürliche Konstante und f als willkürliche Funktion.

M. Lévy[88]) kommt auf die Spiralflächen, indem er eine ebene Kurve betrachtet, die sich um eine in ihrer Ebene gelegene Gerade dreht und sich dabei so ändert, dass sie sich stets ähnlich bleibt hinsichtlich eines auf der Geraden gelegenen Punktes. So erhält er, wenn die Gerade mit der z-Achse zusammenfällt, die Gleichung:

$$n \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) + \log z$$

für n als Konstante und φ als willkürliche Funktion.

Bei *S. Lie* treten die Spiralflächen als Flächen auf, die bei einer infinitesimalen *Spiraltransformation* des Raumes, d. h. einer solchen, die aus einer Drehung um eine Achse und einer Ähnlichkeitsformation von einem Punkt der Achse aus zusammengesetzt ist, invariant bleiben[89]). Bei *G. Darboux* führt die Rotation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit r und die gleichzeitige Ähnlichkeitstransformation mit dem konstanten Modul h einer Kurve, deren Koordinaten $x_0 = r_0 \cos \omega_0$, $y_0 = r_0 \sin \omega_0$, z_0 sind, auf die Flächengleichungen:

$$x = r_0 e^{ht} \cos(\omega_0 + rt), \quad y = r_0 e^{ht} \sin(\omega_0 + rt), \quad z = z_0 e^{ht},$$

wo t als veränderlich aufzufassen ist[90]). *P. Stäckel* gibt bei der Beantwortung der Frage, unter welchen Umständen die allgemeine analytische Spiralfläche reell ist, oder algebraisch ist, der Gleichung unserer Flächen die Form:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \Omega\left(\sqrt{x^2 + y^2}\, e^{-k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}\right)$$

für Ω als willkürliche Funktion[91]).

Auch der folgende Weg führt auf die Spiralflächen. Gegeben sei eine Kurve, ein Punkt (P) und eine ihn enthaltende Gerade (L). Man lasse nun jeden Punkt der Kurve eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden desjenigen den Punkt enthaltenden Kreiskegels beschreiben, dessen Achse die Gerade (L), dessen Mittelpunkt der Punkt (P) ist, jedoch so, dass der radius vector der senkrechten Projektion jedes Kurvenpunktes auf eine zu (L) senkrechte Ebene sich mit konstanter

88) Paris, C. R. 87 (1878), p. 288.

89) *Lie-Scheffers*, Vorl. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891, p. 243, 260, woselbst Litteratur; *Lie-Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, p. 162.

90) „*Darboux*“ 1, p. 108.

91) Leipz. Ber. 1898, p. 17.

Winkelgeschwindigkeit um (L) bewegt. Eine weitere Erzeugung der Spiralflächen gab *A. Demoulin*[91a]).

Nehmen wir in den *Darboux*'schen Gleichungen die Grössen r_0, ω_0, z_0 als Funktionen der Veränderlichen ϑ, so erhält das Quadrat des Linienelements der Fläche die Form:

$$ds^2 = e^{2ht}(Adt^2 + 2Bdtd\vartheta + Cd\vartheta^2),$$

wo A, B, C nur von ϑ abhängen[92]). Daher ist es durch eine Quadratur möglich, die orthogonalen Trajektorien der auf der Fläche liegenden Kegelloxodromen (III D 4, Nr. 34) $\vartheta =$ const. zu bestimmen, und durch eine weitere Quadratur den Ausdruck

$$ds^2 = e^{2v}(du^2 + U^2dv^2)$$

zu erhalten, wo U nur von u abhängt. Mit Hülfe ähnlicher Eigenschaften der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zeigt man den auch aus der allgemeinen Theorie der infinitesimalen Transformationen (II A 6) sich ergebenden Satz, dass die Krümmungslinien, die Haupttangentenkurven und die Minimalkurven einer Spiralfläche sich durch Quadraturen bestimmen lassen[93]). Die Auffindung der geodätischen Linien der Spiralflächen führte *S. Lie*[93a]) und später *G. Darboux* auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zurück[94]); die Bestimmung des Linienelements derjenigen Spiralflächen, auf denen die Kurven, längs welcher sich das *Gauss*'sche Krümmungsmass der Fläche nicht ändert, geodätisch parallel sind, hat *L. Raffy* ausgeführt[95]).

III. Krümmungsmittelpunktsflächen.

8. Erklärungen. Den Ort der Mittelpunkte der Hauptnormalkrümmungen einer Fläche pflegt man die *Krümmungsmittelpunktsfläche* oder *Zentrafläche* oder *Evolute* der gegebenen Fläche zu nennen. Da ein Flächenpunkt zwei Hauptkrümmungsmittelpunkte bestimmt, muss die Krümmungsmittelpunktsfläche aus zwei Schalen bestehen. Dieselben bilden den Ort der Gratlinien der abwickelbaren Normalenflächen, welche durch die Einzelkurven der beiden Scharen der Krümmungslinien der gegebenen Fläche gehen. Die Normalen der Ausgangsfläche berühren somit die Krümmungsmittelpunktsfläche, d. h. mit anderen Worten, die letztere ist die Brennfläche (Nr. 30; III D 6 a, Nr. 13) des Normalensystems der ersteren. Bezeichnen wir die beiden Haupt-

91a) Par. soc. math. Bull. 23 (1895), p. 203.

92) „*Darboux*" 1, p. 109, 3, p. 73.

93) Das erste unter 89) zitierte Werk, p. 261.

93a) Math. Ann. 5 (1872), p. 204.

94) „*Darboux*" 3, p. 83.

95) Par. soc. math. Bull. 20 (1892), p. 22.

krümmungshalbmesser der gegebenen Fläche mit R_1 und R_2, die Richtungskosinus ihrer Normalen mit X, Y, Z, so ist die zu R_1 gehörende Schale durch die Gleichungen:

$$x' = x + R_1 X, \quad y' = y + R_1 Y, \quad z' = z + R_1 Z,$$

die zu R_2 gehörende durch die Gleichungen:

$$x'' = x + R_2 X, \quad y'' = y + R_2 Y, \quad z'' = z + R_2 Z$$

gegeben[96]). Hier tritt nun zunächst die Frage auf, unter welchen Umständen eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Kurve ausartet.

9. Die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche artet in eine Kurve aus. Artet eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Kurve aus, so ist die Normalkrümmung jeder Einzelkurve in der zugehörigen Schar von Krümmungslinien der Ausgangsfläche konstant. Diese Krümmungslinien sind Kreise. Die Ausgangsfläche ist die Einhüllende einer Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen (Nr. 4). Bezeichnet s die Bogenlänge dieser Kurve, und ist R eine beliebig gewählte Funktion von s, so trage man auf jeder Tangente der Kurve vom Berührungspunkte aus die Strecke $-R\frac{dR}{ds}$ ab und wähle den erhaltenen Endpunkt der Strecke zum Mittelpunkte eines Kreises, dessen Ebene senkrecht zur Strecke, dessen Radius gleich $R\sqrt{1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$ ist. Die fraglichen Kreise bilden eine Fläche, für welche die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche durch die gewählte Kurve vertreten wird[97]). Hierher gehören die von *S. Finsterwalder* modellierten Flächen, auf denen die zweite Schar der Krümmungslinien aus sphärischen Kurven besteht[98]).

10. Beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche arten in Kurven aus. Dupin'sche Cyklide. Besonderes Interesse beansprucht der Fall, in dem beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche in Kurven ausarten. *Ch. Dupin*[99]) zeigte mittels geometrischer Betrach-

96) Die Krümmungsmittelpunktsflächen dürften zuerst von *G. Monge* betrachtet sein; s. das unter 36) zitierte Werk p. 134. Die hier p. 137 befindliche Behauptung, dass der Schnittlinie der beiden Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche auf der Ausgangsfläche eine Kreispunktslinie entspricht, ist von *E. E. Kummer* berichtigt, Berlin. Monatsber. 1862, p. 426. Über die allgemeine Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen vgl. „*Darboux*" 3, p. 334, „*Bianchi*", p. 234; *v. Lilienthal*, Math. Ann. 30 (1887), p. 1 und 38 (1891), p. 450.

97) *G. Monge* hat dieser Fläche und im besonderen ihrer Differentialgleichung die Kapitel 22 und 26 der Application gewidmet.

98) Modelle von *M. Schilling*, Halle a/S., Nr. 86—88.

99) Applications de Géométrie et de Mécanique, Paris 1822, p. 200.

tungen, dass hier die Ausgangsfläche die Einhüllende einer Schar von Kugeln ist, die sämtlich drei feste Kugeln berühren, ferner, dass die fraglichen beiden Kurven zwei Fokalkegelschnitte sind, d. h. solche, von denen jeder der Ort der Spitzen aller Kreiskegel ist, die durch den anderen gehen (III C 4). Man hat die in Rede stehende Fläche die *Dupin'sche Cyklide* genannt[100]).

Unter ihren Formen ist die einfachste der sogenannte „Kreiswulst“, d. h. die Umdrehungsfläche eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Achse[101]).

J. Liouville bewies[102]) mit Hülfe der Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radien, dass die Krümmungslinien der *Dupin*'schen Cyklide aus lauter Kreisen bestehen. Es mögen die drei festen Kugeln sich in den beiden Punkten P_1 und P_2 schneiden. Macht man den ersteren zum Pol einer solchen Transformation, so gehen jene Kugeln in drei Ebenen über, und die Cyklide wird in einen Kreiskegel umgewandelt, dessen Spitze der dem Punkte P_2 entsprechende Punkt ist.

A. Mannheim zeigte[103]), dass man eine *Dupin*'sche Cyklide durch die Transformation mittels reziproker Radien in einen Kreiswulst verwandeln kann, wenn der Pol der Transformation auf einem die drei festen Kugeln senkrecht schneidenden Kreise liegt, dessen Ebene die Mittelpunkte der drei Kugeln enthält. Aus den Eigenschaften des Kreiswulstes leitet *Mannheim* solche der Cyklide her und findet u. a., dass die beiden auf der Fläche liegenden Kreisscharen von zwei Ebenenbüscheln ausgeschnitten werden, deren Achsen zu einander senkrecht sind. — Die sämtlichen *Dupin*'schen Cykliden, deren Normalen durch dieselben beiden Fokalkegelschnitte gehen, bilden eine Schar von Parallelflächen. Eine anschauliche Erzeugung der fraglichen Cykliden gab *W. Roberts*[104]). Er betrachtet zunächst eine besondere

100) Modelle von *M. Schilling*, Halle a/S., Nr. 79—85, modelliert von *P. Vogel*, *E. E. Kummer* und *S. Finsterwalder*. Vgl. *E. Liebheit*, Inaug.-Dissert. Halle a/S. 1886; *F. Klein*, Einleitung in die höhere Geom., autogr. Vorl. 1, Göttingen 1893, p. 111.

101) Vgl. die Artikel von *Godart*, *Nombel*, *Dyrion*, *G. Gerono* in Nouv. Ann. (2) 4 (1865). Die fragliche Fläche wird von *E. Greve spirische Oberfläche* genannt, Inaug. Dissert. Göttingen (1875), wo die Schnitte der Fläche mit Ebenen untersucht sind.

102) J. de math. (1) 12 (1847), p. 282.

103) Nouv. Ann. (1) 19 (1860), p. 67. Vgl. *G. Darboux*, Sur une classe remarquable etc., Paris 1873, p. 242.

104) Paris, C. R. 53 (1861), p. 799. Vgl. die *Laguerre*'sche Erzeugung der Cyklide, Par. Soc. Philomat. Bull. 7 (1870), p. 209.

Cyklide. Man nehme in einer Ebene (E) zwei sich schneidende Kreise K_1 und K_2 mit demselben Halbmesser (r) und den Mittelpunkten C_1 und C_2. Vom Mittelpunkt der Strecke $C_1 C_2$ aus ziehe man eine Gerade (L), welche K_1 und K_2 in den auf derselben Seite der Strecke $C_1 C_2$ gelegenen Punkten P_1 und P_2 schneiden möge. Über der Strecke $P_1 P_2$ als Durchmesser beschreibe man den Kreis K, dessen Ebene senkrecht zur Ebene der Kreise K_1, K_2 ist. Der Ort der Kreise K für alle Richtungen der Geraden (L) ist die fragliche Cyklide. Die Darstellung der Koordinaten dieser Fläche mit Hülfe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser als Parametern ist von *Strebor* gegeben[105]). Die von den Normalen der Fläche getroffene Fokalellipse wird im betrachteten Fall von dem Schnittpunkt (M) der Geraden $C_1 P_1$ und $C_2 P_2$ beschrieben. Um eine Parallelfläche unserer Fläche zu erhalten, trage man von P_1 und P_2 aus nach (M) hin eine willkürlich gewählte Strecke h ab. Gelangt man so zu den Punkten P_1' und P_2' und beschreibt über $P_1' P_2'$ als Durchmesser wie vorhin einen zur Ebene der Kreise K_1, K_2 senkrechten Kreis, so ist der Ort des letzteren die verlangte Fläche. Die Punkte P_1' und P_2' bewegen sich auf Kreisen K_1' und K_2', die mit $r + h$ und $r - h$ als Radien um die Punkte P_1 und P_2 beschrieben sind. Die Bemerkung, dass die Linie $P_1' P_2'$ stets durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_1' und K_2' geht, führt zu der folgenden von *A. Cayley*[106]) und *E. Catalan*[107]) angegebenen Erzeugung der *Dupin*'schen Cyklide. Man nehme in derselben Ebene zwei Kreise und lege durch einen Ähnlichkeitspunkt derselben eine Gerade, die den einen Kreis im Punkte P_1', den anderen im Punkte P_2' schneide, wobei die Punkte P_1' und P_2' so gewählt werden müssen, dass in ihnen die Kreistangenten nicht parallel sind. Der über $P_1' P_2'$ als Durchmesser beschriebene und senkrecht zur Ebene der Grundkreise stehende Kreis erzeugt die verlangte Fläche. Sie ist von der vierten Ordnung. Ersetzt man den zweiten der beiden Kreise durch eine Gerade (L), so geht der innere Ähnlichkeitspunkt in den Punkt (O) über, in dem die vom Mittelpunkt des ersten Kreises aus auf die Gerade (L) gefällte Senkrechte diesen Kreis schneidet. Jede durch (O) gelegte Gerade trifft den Kreis in einem Punkt P_1 und die Gerade (L) in einem Punkt P_2. Der über der Strecke $P_1 P_2$ als Durchmesser beschriebene, senkrecht zur Zeichenebene stehende, Kreis erzeugt eine Fläche dritter Ordnung,

105) Nouv. Ann. (2) 1 (1862), p. 170; (2) 4 (1865), p. 169. *Strebor* ist Pseudonym für *W. Roberts*.

106) Quarterly Journ. of Math. 12 (1873), p. 148 = Papers 9, p. 64.

107) Nouv. Corresp. Math. 6 (1880), p. 439.

die sogenannte *parabolische Cyklide*, deren Krümmungsmittelpunksfläche durch zwei Fokalparabeln vertreten wird[108]). Je nachdem bei der *Cayley*'schen Konstruktion der eine Kreis innerhalb oder ausserhalb des anderen liegt, oder den letzteren schneidet, hat man es mit der *Ring-*, der *Spindel-* oder der *Horncyklide* zu thun. Ebenso ergibt sich die *parabolische Horncyklide* oder die *parabolische Spindelcyklide*, je nachdem die Gerade (L) den zu Grunde gelegten Kreis schneidet oder nicht. Die unter [100]) zitierten Modelle bringen diese Fälle zur Anschauung.

In einer Arbeit von *J. C. Maxwell*[109]) befindet sich die folgende Konstruktion der *Dupin*'schen Cyklide. Man stelle eine Ellipse durch die Gleichungen dar:

$$x_1 = a \cos \alpha, \quad y_1 = \sqrt{a^2 - e^2} \sin \alpha, \quad z_1 = 0,$$

dann sind die Gleichungen ihrer Fokalhyperbel:

$$x_2 = \frac{e}{\cos \beta}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \sqrt{a^2 - e^2} \operatorname{tg} \beta.$$

Ist P ein Punkt der Ellipse, Q ein Punkt der Hyperbel, so hat die Strecke $\overline{PQ}$ die Masszahl $\frac{a}{\cos \beta} - e \cos \alpha$. Bezeichnet $\varkappa$ eine Konstante, und trägt man auf $\overline{PQ}$ von P aus die Strecke $PR = \varkappa - e \cos \alpha$ oder von Q aus die Strecke $\frac{a}{\cos \beta} - \varkappa$ ab, so beschreibt der Punkt R eine *Dupin*'sche Cyklide. Letztere erscheint hier als Einhüllende jeder der beiden durch die Gleichungen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = \left(\varkappa - \frac{e}{a} x_1\right)^2$$

$$(x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2 = \left(\varkappa - \frac{a}{e} x_2\right)^2$$

dargestellten Kugelscharen[110]).

11. Allgemeine Krümmungsmittelpunktsfläche. Sehen wir von dem Fall ab, in dem die betrachtete Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Kurve ausartet, so gelten die folgenden allgemeinen Sätze, bei deren Mitteilung wir die Krümmungslinien der Ausgangsfläche in eine *erste, zu R_1 gehörende* und eine *zweite, zu R_2 gehörende* Schar teilen und die durch die erste Schar bestimmte Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche ins Auge fassen. 1) Die Normalen der Schale sind den Tangenten der ersten Schar von Krümmungslinien der Ausgangsfläche parallel. Infolge dessen scheinen sich die beiden Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche, von einem Punkt einer

108) *A. Cayley*, [106]) Papers 9, p. 73.

109) Quarterly Journ. of Math. 34 (1867) = Papers 2, p. 144.

110) *„Darboux“* 2, p. 268. *Dupin*, Développements, p. 18.

gemeinsamen Tangente aus gesehen, senkrecht zu schneiden[111]). 2) Den Krümmungslinien der ersten Schar auf der Ausgangsfläche entsprechen auf der Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche geodätische Linien[112]), deren Tangenten die Normalen der Ausgangsfläche sind. Den Krümmungslinien der zweiten Schar entsprechen auf der Schale die jenen geodätischen Linien konjugierten Kurven, und ihre Tangenten[113]) sind die Krümmungsachsen [III D 1, 2, p. 74] der Krümmungslinien der ersten Schar auf der Ausgangsfläche. 3) Die orthogonalen Trajektorien jener geodätischen Linien entsprechen den Kurven $R_1 = \text{const.}$ auf der Ausgangsfläche[114]). Die geodätische Krümmung dieser orthogonalen Trajektorien ist $\frac{1}{R_2 - R_1}$.[115]) Der geodätische Krümmungsmittelpunkt ist also der dem betrachteten Punkt auf der ersten Schale entsprechende Punkt der zweiten Schale. Bei den abwickelbaren Flächen besteht die Krümmungsmittelpunktsfläche nur aus einer Schale, die wiederum abwickelbar ist. Hier sind die fraglichen Trajektorien geodätische Linien. 4) Es sei P der betrachtete Punkt der Ausgangsfläche, S_1 die betrachtete Schale, und auf ihr M_1 der P entsprechende Punkt. Die Krümmungsachse der P durchziehenden Krümmungslinie der zweiten Schar schneidet die zu M_1 gehörende Normale von S_1 in einem Punkt, dessen Abstand von M_1 gleich $K_2\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$ ist, wo K_2 den geodätischen Krümmungsradius der gedachten Krümmungslinie bedeutet. Bestimmt man die Kurve, längs derer S_1 von dem Zylinder berührt wird, dessen Erzeugende parallel der Normalen der Ausgangsfläche in P sind, und projiziert diese Kurve senkrecht auf die in P berührende Tangentialebene, so erweist sich jener Abstand als dem Krümmungshalbmesser der Projektionskurve in P gleich[116]). 5) Die Fläche S_1 besitzt ihrerseits eine Krümmungsmittelpunktsfläche, deren beide Schalen mit S_1' und S_1'' bezeichnet seien. Die durch M_1 gehende Normale von S_1 berühre S_1' in M'_1 und S_1'' in M_1''. Die zweite Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche der Ausgangsfläche werde mit S_2, der auf ihr dem Punkte P entsprechende Punkt mit M_2 bezeichnet. Ihre durch M_2 gehende Normale wird von den in M_1' und M_1'' berührenden Tangentialebenen der Flächen

111) Das unter 36) zitierte Werk von *G. Monge,* p. 136.

112) ibid. p. 137. 113) *A. Mannheim,* Paris, C. R. 74 (1872), p. 460.

114) *J. Weingarten,* J. f. Math. 59 (1861), p. 382.

115) *U. Dini,* Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (2) 2 (1869), p. 12. Vgl. „*Bianchi*“, p. 239.

116) *A. Mannheim,* Paris, C. R. 79 (1874), p. 1328. Vgl. *G. H. Halphen,* ibid. 80 (1875), p. 116.

S_1' und S_1'' in zwei Punkten N_2' und N_2'' geschnitten. Eine die Ausgangsfläche im Punkte P und zwar in der zweiten Ordnung berührende Fläche besitzt eine Krümmungsmittelpunktsfläche, deren Schalen die Flächen S_1 und S_2 in den Punkten M_1 und M_2 in der ersten Ordnung berühren, sodass für sie die Strecken $M_1 M_1'$, $M_1 M_1''$ neue Längen, und die Geraden $M_1' N_2'$ und $M_1'' N_2''$ neue Lagen erhalten. *A. Mannheim*[117]) zeigte synthetisch und nach ihm *A. Ribaucour*[118]) analytisch, dass für alle die Ausgangsfläche in P in der zweiten Ordnung berührenden Flächen die Geraden $M_1' N_2'$ und $M_1'' N_2''$, sowie die analog zu erhaltenden Geraden $M_2' N_1'$ und $M_2'' N_1''$ auf einem Paraboloid — dem sogenannten *Paraboloid der acht Geraden* — liegen, welchem ausserdem die Normalen der Flächen S_1 und S_2 in M_1 und M_2 und die dem Punkte entsprechenden Krümmungsachsen der Krümmungslinien der Ausgangsfläche angehören. Bezeichnen K_1 und K_2 die geodätischen Krümmungsradien dieser Krümmungslinien, und betrachtet man P als den Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen u-Achse mit der Tangente der zu R_1, dessen v-Achse mit der Tangente der zu R_2 gehörenden Krümmungslinie, und dessen w-Achse mit der Normalen der Ausgangsfläche zusammenfällt, so erhält die Gleichung jenes Paraboloids die Form:

$$w\left(\frac{u}{K_2 R_1} + \frac{v}{K_1 R_2} + \frac{w}{R_1 R_2}\right) - \frac{u}{K_2} - \frac{v}{K_1} - w\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + 1 = 0.$$

Sie zeigt, dass auch die Verbindungslinie der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien der Ausgangsfläche auf dem Paraboloid liegt[119]). Eine andere, von kinematischen Gesichtspunkten ausgehende Herleitung des fraglichen Paraboloids gab *Mannheim* in dem Werk „Principes et développements de géométrie cinématique", p. 224. (Vgl. *R. v. Lilienthal*, Jahresb. der deutschen Mathem.-Ver. 11 (1902), p. 44.)

Des weiteren sind anzuführen die *Ribaucour*'schen Sätze[120]): 1) Damit sich die Krümmungslinien auf beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche entsprechen, muss $R_1 - R_2$ konstant sein. *E. Beltrami*[121]) zeigte, dass, wenn man diese Konstante mit k bezeichnet, hier beide Schalen dasselbe konstante Krümmungsmass $\frac{-1}{k^2}$ besitzen. 2) Sollen auf beiden Schalen die Krümmungslinien je einem konjugierten System auf der Ausgangsfläche entsprechen, so muss $\frac{R_1}{R_2}$ konstant sein. 3) Sollen konjugierten Systemen auf der einen Schale

117) Paris, C. R. 74 (1872), p. 458.
118) ibid. p. 1399.
119) *A. Mannheim*, Paris, C. R. 84 (1877), p. 646.
120) Paris, C. R. 74 (1872), p. 1399.
121) Giorn. di Mat. 3 (1865), p. 40.

stets konjugierte Systeme auf der anderen entsprechen, so muss zwischen R_1 und R_2 eine Relation bestehen (Nr. **17**). Insbesondere entsprechen sich alsdann auf beiden Schalen die Haupttangentenkurven, und, falls das Produkt $R_1 R_2$ konstant ist, entsprechen diesen Haupttangentenkurven auf der Ausgangsfläche ebenfalls Haupttangentenkurven.

Sind φ und ψ die Winkel, welche zwei durch einen Punkt der Ausgangsfläche gehende Tangenten mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie bilden, so entsprechen ihnen, falls zwischen R_1 und R_2 eine Relation besteht, auf beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche konjugierte Tangenten, wenn:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi \frac{dR_2}{dR_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

Diese Gleichung rührt von *A. Mannheim* her, der aus ihr auch Folgerungen für die einfacheren Gestalten der zwischen R_1 und R_2 bestehenden Gleichung ableitete[122]). Wird letztere in der Form $R_2 = f(R_1)$ angenommen, so erhält das Krümmungsmass $\varkappa_1$ der zu R_1 gehörenden Schale den Wert $\frac{-f'(R_1)}{(R_1 - R_2)^2}$ und das Krümmungsmass $\varkappa_2$ der anderen Schale den Wert $\frac{-1}{f'(R_1)(R_1 - R_2)^2}$, sodass sich der *G. H. Halphen*'sche Satz ergibt[123]):

$$\varkappa_1 \varkappa_2 = \frac{1}{(R_1 - R_2)^4}.$$

12. Bestimmung einer Fläche, für die eine oder beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche vorgeschrieben sind. Die Lösung der Frage nach denjenigen Flächen, für welche eine Schale (S_1) ihrer Krümmungsmittelpunktsfläche vorgeschrieben ist, kommt hinaus auf die Auffindung einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Linien auf (S_1) und derjenigen Schar von Parallelflächen, deren Normalen mit den Tangenten jener geodätischen Linien zusammenfallen[124]). Zwei hierhergehörende Aufgaben, bei denen die Fläche (S_1) abwickelbar ist, oder eine Kugel vorstellt, sind von *G. Monge* gelöst[125]). Ist (S_1) abwickelbar, so nennt *Monge* die Ausgangsfläche eine *surface moulure générale*[125a]) [Nr. **13**; III D 6a, Nr. **24**]. Wir führen zwei Erzeugungsarten derselben an.

---

122) Paris, C. R. 84 (1877), p. 934.

123) Par. soc. math. Bull. 4 (1876), p. 94.

124) Siehe die Arbeiten von *R. Hoppe* und *F. August,* Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 256 und 315.

125) Applic. § 25 u. 18. Vgl. *A. Enneper,* Gött. Nachr. (1871), p. 227 und (1872), p. 577.

125a) *G. Monge,* J. éc. polyt. 6 (1806), p. 1; *L. Raffy,* Leçons sur les applic. géométr. de l'analyse, Paris 1897, p. 163; *L. Raffy,* Par. soc. math. Bull. 19 (1891), p. 54.

1) Man zeichne in einer Ebene eine beliebige Kurve (c) und lasse die Ebene auf (S_1) rollen, ohne zu gleiten. Die Kurve (c) beschreibt dann eine Fläche (S), deren Krümmungsmittelpunktsfläche aus (S_1) und der Fläche (S_2) besteht, die durch die Evolute von (c) erzeugt wird. Die Kurve (c) ist in jeder ihrer Lagen Krümmungs- und geodätische Linie von (S). 2) Man nehme in einer Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem (u, v-Achse) und eine beliebige Kurve (c) mit der Gleichung $v = f(u)$. Bewegt sich nun die Ebene so, dass die u-Achse auf eine Raumkurve aufgewickelt wird, indem ihr geradliniger Teil stets Tangente dieser Kurve bleibt, während die v-Achse stets der Binormale der Kurve parallel bleibt, so beschreibt (c) eine Fläche der verlangten Art. Man erhält die Gleichungen der Fläche in der Form:

$$x = x_0 + (u - s) \cos \alpha + f(u) \cos \lambda,$$
$$y = y_0 + (u - s) \cos \beta + f(u) \cos \mu,$$
$$z = z_0 + (u - s) \cos \gamma + f(u) \cos \nu,$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der Raumkurve bedeuten, s ihre Bogenlänge vorstellt, und $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ bez. $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ die Richtungskosinus der Tangente bez. Binormale der Raumkurve bezeichnen[125b]). — Eine weitere bemerkenswerte Erzeugungsart der betrachteten Flächen gab *G. Pirondini*[126]). Wir erwähnen eine hierher gehörende, von *J. Binet*[127]) gefundene Fläche. Man nehme an Stelle der Kurve (c) die in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = e^{\frac{\varphi}{m}}$ festgelegte logarithmische Spirale, bei der die Konstante m durch die Gleichung $m^m = e^{(4\varkappa - 1)\frac{\pi}{2}}$ bestimmt ist, für $\varkappa$ als ganze, positive Zahl. Die fragliche Spirale erzeugt eine Fläche, welche die Eigentümlichkeit darbietet, dass sie mit der Schale (S_2) ihrer Krümmungsmittelpunktsfläche zusammenfällt.

Die Flächen, bei denen eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche eine Kugel ist, haben die Eigenschaft, dass die andere Schale ein Kegel ist, dessen Spitze sich im Mittelpunkt der Kugel befindet. Sie werden durch die Bewegung einer Kreisevolvente (III D 4, Nr. 6) erzeugt, deren Ebene so auf einem Kegel rollt, dass der Mittelpunkt des Kreises stets mit der Spitze des Kegels zusammenfällt[128]).

125b) *G. Pirondini,* J. de math. (5) 3 (1897), p. 403.

126) Giorn. di mat. 30 (1892), p. 188.

127) J. de math. (1) 6 (1841), p. 61.

128) *G. Monge,* J. éc. polyt. 4 (an 10 = 1801), p. 28. Vgl. *J. Vályi,* Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 217; *V. de Tannenberg,* Leç. nouv. sur les applic. géom. du calc. diff., Paris 1899, p. 165.

Zwei gegebene Flächen können nur dann die beiden Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche sein, wenn das System ihrer gemeinsamen Tangenten ein Normalensystem ist. Der Umstand, dass, von einem beliebigen Punkt des Raumes aus gesehen, die Umrisse zweier konfokaler Flächen zweiter Ordnung (III C 4), aber verschiedener Art, sich rechtwinklig zu schneiden scheinen, führte *M. Chasles*[129]) auf die Bemerkung, dass zwei solche Flächen die Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche sind.

IV. Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

13. Die Monge'schen Gesimsflächen. Die umfangreiche Litteratur[129a]) über Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien nimmt ihren Ausgang in der von *Monge* beantworteten Frage nach denjenigen Flächen, bei denen die Einzelkurven einer Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen liegen[130]) (III D 6 a, Nr. 24). Diese Flächen, von *Monge surfaces moulures* (*Gesimsflächen*) genannt, entstehen auf folgende Weise. Man zeichne in einer Tangentialebene eines Zylinders eine Kurve (c) und lasse die Ebene auf dem Zylinder rollen, ohne zu gleiten. Die Kurve (c) erzeugt die verlangte Fläche und ist in jeder ihrer Lagen eine Krümmungslinie derselben, während ihre Punkte die Krümmungslinien in parallelen Ebenen beschreiben. Die fraglichen Flächen sind durch das Vorhandensein einer Kreispunktslinie (III D 3, Nr. 4) ausgezeichnet[131]).

14. Untersuchungen von Bonnet, Serret, Enneper, Rouquet. Im Jahre 1853 veröffentlichte *O. Bonnet*[132]) seine grosse Arbeit über

129) Aperçu historique, Paris 1875, 2. Aufl., p. 392. Die weitere analytische Ausführung siehe bei *J. Liouville,* J. de math. (1) 16 (1851), p. 6; *Chasles* dasselbe Journal (2) 5 (1860), p. 442; *Enneper,* Gött. Nachr. (1871), p. 310; *F. Rudio,* Dissert. Berlin (1880) und J. f. Math. 95 (1883), p. 240; *H. R. G. Opitz,* Studie über die *Rudio*'schen Flächen, Wissensch. Beilage zum Jahresber. des Königstädtischen Realgymnasiums zu Berlin (1901). Vgl. namentlich *„Darboux"* 2, chap. 14.

129a) Vgl. die Litteraturübersicht bei *Salmon-Fiedler,* Anal. Geom. des Raumes 2, dritte Aufl., Leipzig 1880, Anmerk. 21, p. XXIX.

130) Applic. § 17. Vgl. *Serret-Harnack,* Lehrbuch der Diff.- u. Int.-Rechn. 2^2, p. 319, Leipzig 1885. Das *Monge*'sche Integrationsverfahren wurde von *O. Rodrigues,* Corresp. sur l'École polyt. 3 (1814), p. 169 vereinfacht. Geometrisch behandelt *J. Bertrand* die fraglichen Flächen im J. de math. (1) 13 (1848), p. 76. Vgl. *E. Bour,* J. éc. polyt. 22 (1862), p. 85.

131) *Serret-Harnack,* a. a. O. 1, p. 480 (2. Aufl. p. 467).

132) J. éc. polyt. 20 (1853), p. 117. Vgl. die vorangegangenen Mitteilungen in Paris, C. R. 36 (1853), p. 81 u. 219.

Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien. Hier handelt es sich zunächst um die nicht abwickelbaren Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien eben sind[132a]). Nach einem Satz von *F. Joachimsthal* (III D 3, Nr. 6, p. 118) bilden die Normalen einer Fläche längs einer ebenen Krümmungslinie mit der Ebene derselben einen konstanten Winkel. Das sphärische Bild einer solchen Linie ist somit ein Kreis, und man steht vor der Aufgabe, das allgemeinste aus Kreisen bestehende Orthogonalsystem auf einer Kugel zu bestimmen. *O. Bonnet* findet auf mühsame Weise die heute leicht ableitbare Thatsache, dass die fraglichen Kreisscharen durch zwei Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, deren Achsen reziproke Polaren der Kugel sind[133]). Da diese Polaren auf einander senkrecht stehen, müssen die Ebenen der Krümmungslinien die Tangentialebenen zweier Zylinder sein, deren Erzeugende sich senkrecht kreuzen[134]). *Bonnet* leitet für die fraglichen Flächen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ab[134a]) und integriert sie sowohl mit Hülfe einer geometrischen Erwägung, als mit Anwendung des *Monge*'schen Verfahrens. Die dem Resultat gegebene geometrische Deutung ist nicht anschaulich.

An zweiter Stelle werden von *Bonnet* analytisch die Flächen behandelt, von denen nur vorausgesetzt wird, dass sie *ein* System ebener Krümmungslinien besitzen. Es ergeben sich zwei geometrisch wichtige Fälle. 1) Gehen die Ebenen der fraglichen Krümmungslinien alle durch dieselbe Gerade, so liegen die Krümmungslinien des anderen Systems auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, während ihre Mittelpunkte in jener Geraden liegen. Die Halbmesser dieser Kugeln sind die — längs jeder Einzelkurve konstanten — geodätischen Krümmungsradien der letztgenannten Krümmungslinien. *Bonnet* leitet die endlichen Gleichungen der Fläche her (p. 199), die *F. Joachimsthal* bereits früher gefunden hatte[135]). Die Fläche ist ausführlich behandelt von *P. V. Rouquet*[136]). 2) Umhüllen die Ebenen (p. 201) der

132a) Die einzige abwickelbare Fläche mit ebenen Krümmungslinien ist die Tangentenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie. *H. Résal*, Exposition de la théorie des surfaces, Paris 1891, p. 52.

133) Vgl. *P. Serret*, Théorie des courbes, p. 177.

134) ibid. p. 137.

134a) Vgl. *S. Lie*, Math. Ann. 4 (1872), p. 224; *H. Résal* in dem unter 132a) zitierten Werk, p. 45.

135) J. f. Math. 23 (1842), p. 350. Daselbst sind die Gleichungen ohne Beweis veröffentlicht, die Herleitung siehe im selben Journal 54 (1857), p. 183. Vgl. „*Darboux*“ 1, p. 112; *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 222; *L. Raffy*, Par. soc. math. Bull. 24 (1896), p. 52. Eine besondere hierher gehörende Flächenart bei *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1902, p. 366.

136) Étude géométrique des surfaces, dont les lignes de courbure d'un système sont planes, Thèse Toulouse 1882, p. 142.

Krümmungslinien der ersten Schar einen Kegel und schneiden sie die Fläche unter einem Winkel, dessen Kosinus proportional ist dem Kosinus des Winkels, den sie mit einer festen Ebene bilden, so liegen die Krümmungslinien der zweiten Schar auf Kugeln, deren Mittelpunkte sich in einer Geraden befinden. — Im dritten Teil (p. 235) seiner Arbeit behandelt *Bonnet* die Flächen, bei denen eine Schar der Krümmungslinien aus ebenen, die andere aus sphärischen Kurven besteht. Die Kugeln, auf denen die letzteren liegen, können 1) konzentrisch sein. Dann kommt man auf die von *Monge*[137]) betrachteten Flächen, bei denen die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche ein Kegel ist; 2) können die Mittelpunkte der fraglichen Kugeln auf einer Geraden liegen. Hier kommt man auf die vorhin mitgeteilten beiden Fälle; 3) können die Mittelpunkte der Kugeln eine gekrümmte, ebene Kurve bilden. Dann treten Kanalflächen (Nr. 4) auf mit ebener Leitkurve. — Weiterhin (p. 248) werden die Flächen mit lauter sphärischen Krümmungslinien betrachtet und gezeigt, dass sie entweder mit den früher erhaltenen zusammenfallen oder sich durch eine Transformation mittelst reziproker Radien aus ihnen herleiten lassen. Im vierten Teil seiner Arbeit behandelt *Bonnet* die Flächen, von denen nur angenommen wird, dass eine Schar ihrer Krümmungslinien aus sphärischen Kurven bestehe und erledigt die beiden Sonderfälle, in denen die Trägerkugeln konzentrisch sind, oder die Fläche rechtwinklig schneiden[138]).

Nach den ersten Veröffentlichungen *Bonnet*'s behandelte *J. A. Serret*[139]) ebenfalls die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien und zwar nach einer Methode, welche die Zuhülfenahme der sphärischen Abbildung nicht verlangt und die von *Bonnet* im dritten Teil seiner Arbeit ebenfalls benutzt wurde. Eine Vereinfachung der *Bonnet*'schen und *Serret*'schen Rechnungen erzielte *A. Cayley*[140]) durch einen Ansatz, der die Unterscheidung von ebenen und sphärischen Krümmungslinien unnötig macht. — Während in den erwähnten Arbeiten die Gleichung der zu bestimmenden Flächen stets in der Form $z = f(x, y)$ gedacht wird, fasst *A. Enneper*[141]) in zwei

137) Applic. § 24. Vgl. *U. Dini,* Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869), p. 140; *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 26 (1888), p. 352.

138) Vgl. *M. Picart,* Paris, C. R. 46 (1858), p. 356; *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 227.

139) J. de math. (1) 18 (1853), p. 113.

140) Amer. J. of math. 11 (1889), p. 71, 293 = Papers 12, p. 601. Daselbst Litteratur.

141) Gött. Abh. 23 (1878), 26 (1880).

grossen Abhandlungen von vornherein die Koordinaten der gesuchten Flächen als Funktionen von zwei Veränderlichen auf und benutzt als Grundlage die Theorie der Raumkurven, wodurch statt partieller Differentialgleichungen gewöhnliche auftreten. Dabei wird die Frage nach den Flächen, bei denen nur eine Schar der Krümmungslinien als aus sphärischen Kurven bestehend angenommen wird, allgemein gelöst. Anlässlich einer Arbeit von *H. Dobriner*[142]) über dieselbe Frage veröffentlichte *Enneper* einen Auszug aus seinen Abhandlungen[143]).

Hinsichtlich der Flächen mit nur ebenen Krümmungslinien, von denen die eine Schar aus Kreisen besteht, gilt der *M. Picart*'sche Satz[144]), dass sie die Einhüllenden einer Schar von Kugeln sind, deren Mittelpunkte sich in einer ebenen Kurve befinden, während sich ihre Halbmesser proportional dem senkrechten Abstand des jeweiligen Mittelpunkts von einer festen, in der Ebene der Kurve gelegenen Geraden ändern. In letzterer schneiden sich die Ebenen der zweiten Schar der Krümmungslinien.

Die erwähnte Studie von *Rouquet* über Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien enthält zahlreiche Einzelheiten über den Gegenstand. Als von allgemeinerem Interesse heben wir den folgenden Umstand hervor. Wickelt man die von den Ebenen der Krümmungslinien berührte Fläche auf eine Ebene ab, so gehen die Krümmungslinien in eine ebene Kurvenschar über. Längs jeder Einzelkurve derselben liegen die Krümmungsmittelpunkte der orthogonalen Trajektorien der Schar in einer Geraden. Nimmt man die Gleichung der Schar in der Form $f(x, y, a) = 0$, so genügt die Funktion f einer Beziehung von der Gestalt[145]):

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\varphi_1(a)x + \varphi_2(a)y + \varphi_3(a)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Dabei ist $\varphi_1(a)x + \varphi_2(a)y + \varphi_3(a) = 0$ die Gleichung der eben erwähnten Geraden. Die Schnittpunkte der Einzelkurven der Schar mit dieser Geraden, sowie ihre isotropen Tangenten (Nr. **30**) bilden somit die Einhüllende der Schar.

15. Untersuchungen von Dini, Darboux. Die Frage nach den Flächen mit lauter ebenen Krümmungslinien — sofern nicht die Ebenen einer Schar von solchen Linien parallel sind — behandelt *U. Dini*[146]) nach folgender Methode. Da die sphärischen Bilder der

---

142) J. f. Math. 94 (1883), p. 116. 143) ibid. p. 329.

144) Nouv. ann. (2) 4 (1865), p. 99. Vgl. *P. Serret,* Théorie des courbes, p. 264; *Rouquet,* Thèse, [136]), p. 20. 145) ibid. p. 91 und 104.

146) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 1^2 (1868), p. 71.

Krümmungslinien auf der Einheitskugel ein aus geodätischen Kreisen [III D 3, Nr. 38] bestehendes Orthogonalsystem bilden, kann man dem Quadrat des Linienelements der Einheitskugel hier die Form geben:

$$d\sigma^2 = \frac{f^2(u)\,du^2 + \varphi^2(v)\,dv^2}{(u+v)^2}.$$

Mit Hülfe der Fundamentalgleichungen findet *Dini* die Darstellungen:

$$R_1 = U - V - U'(u+v), \quad R_2 = U - V + V'(u+v),$$

$$X = \frac{U_1 + V_1}{u+v}, \quad Y = \frac{U_2 + V_2}{u+v}, \quad Z = \frac{U_3 + V_3}{u+v},$$

wo die Funktionen $U \ldots U_3$ nur von u, die Funktionen $V \ldots V_3$ nur von v abhängen. Es zeigt sich, dass die Funktionen U_1, U_2, U_3 bezw. V_1, V_2, V_3 die Form haben:

$$mu + n + \alpha\sqrt{hu^2 + h'u + h''}, \quad \mu v + \nu + \beta\sqrt{kv^2 + k'v + k''}.$$

Die Koordinaten der Fläche ergeben sich aus der Integration der vollständigen Differentiale:

$$dx = -R_1 \frac{\partial X}{\partial u}du - R_2 \frac{\partial X}{\partial v}dv, \text{ etc.}$$

Aus den *Dini*'schen Formeln folgt leicht, dass auch der Ausdruck: $Xx + Yy + Zz$ von der Form $\frac{F(u) + F_1(v)}{u+v}$ sein muss. Dies führt auf eine Untersuchung von *G. Darboux* [147]), bei der die zu bestimmenden Flächen als die Schar ihrer Tangentialebenen einhüllend betrachtet werden. *Darboux* leitet zunächst den folgenden Satz ab: Genügen die Funktionen A_1, A_2, A_3, A_4 des Parameters α und die Funktionen B_1, B_2, B_3, B_4 des Parameters β der Beziehung:

$$(A_1 + B_1)^2 + (A_2 + B_2)^2 + (A_3 + B_3)^2 = (A_4 + B_4)^2,$$

so werden die Tangentialebenen der fraglichen Flächen durch die Gleichung

$$(A_1 + B_1)x + (A_2 + B_2)y + (A_3 + B_3)z = A + B$$

dargestellt, wo A wiederum nur von α, B nur von β abhängt. Die Bestimmung der Funktionen $A_1 \ldots A_4$, $B_1 \ldots B_4$ führt auf die *Dupin*'sche Cyklide (Nr. **10**), und so wird folgende Erzeugung obiger Flächen gefunden: Man nehme zwei einfach unendliche Scharen von Kugeln, deren Mittelpunkte auf zwei Fokalkegelschnitten liegen, während sich ihre Radien nach einem beliebigen Gesetz ändern. Die Radikalebenen je zweier Einzelkugeln, die nicht derselben Schar angehören, werden von einer der gesuchten Flächen eingehüllt.

---

147) „*Darboux*" 1, p. 127; 4, p. 180.

Die oben skizzierte Methode benutzt *Dini* auch zur Bestimmung der Flächen, auf denen nur eine Schar der Krümmungslinien als eben angenommen wird. Es kommt hier alles darauf an, das Quadrat des Linienelements der Einheitskugel aufzufinden, falls die eine Schar der als orthogonal vorausgesetzten Parameterlinien aus Kreisen besteht. Dies führt auf eine *Riccati*'sche Differentialgleichung[148]). Nach Integration derselben ergeben sich die Werte von R_1 und R_2 und weiter die von x, y, z durch Quadraturen. Jene Bestimmung des Linearelements der Einheitskugel führte *Dini* in einer späteren Arbeit[149]) weiter aus und betrachtete im besonderen den Fall, in dem die Ebenen der Krümmungslinien mit einer Geraden denselben Winkel bilden. — Erwähnt sei noch eine Arbeit von *G. Pirondini*[150]) über Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien, sowie die Untersuchung von *Darboux* über das Verhältnis der Flächen mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien zu den isotropen, abwickelbaren Flächen[151]) (Nr. **40**). Besonders hingewiesen sei ferner auf die in Ebenenkoordinaten durchgeführte *Darboux*'sche Bestimmung der Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien[152]). Diese Methode führt auch für Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien zum Ziel mit Hülfe der Bemerkung, dass die Tangentialebenen einer Fläche längs einer sphärischen Krümmungslinie eine Kugel berühren, die mit der Trägerkugel der Krümmungslinie konzentrisch ist[153]).

16. Untersuchungen von Brioschi, Dini, Dobriner, Blutel, Darboux. *F. Brioschi* fand folgende Eigenschaft sphärischer Krümmungslinien[154]). Fallen die Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien zusammen, und ist $\frac{1}{R_1}$ die Normal-, $\frac{1}{K_1}$ die geodätische Krümmung der sphärischen Kurven $v = \text{const.}$, so hat man:

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{r \sin V} + \frac{\operatorname{cotg} V}{R_1},$$

wo r den Halbmesser der Trägerkugel, V den Winkel bedeutet, den dieser Halbmesser mit der Flächennormalen bildet. *Dini*[155]) betrachtet die Koordinaten X, Y, Z der Einheitskugel so als Funktionen von u und v, dass das Quadrat des Linienelements die Form hat: $d\sigma^2 = E'du^2 + G'dv^2$. Die Gleichungen:

---

148) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869), p. 23.
149) Pisa, Ann. delle Università Toscane 11 (1869).
150) Giorn. di mat. 22 (1884), p. 118.
151) „*Darboux*" 4, p. 203, 254. 152) „*Darboux*" 4, p. 200.
153) „*Darboux*" 4, p. 240. 154) Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 301.
155) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869), p. 135.

$$x = V_1 + \frac{r \sin V}{\sqrt{G'}} \frac{\partial X}{\partial v} + r \cos V \cdot X, \quad y = V_2 + \frac{r \sin V}{\sqrt{G'}} \frac{\partial Y}{\partial v} + r \cos V \cdot Y,$$
$$z = V_3 + \frac{r \sin V}{\sqrt{G'}} \frac{\partial Z}{\partial v} + r \cos V \cdot Z,$$

in denen V_1, V_2, V_3, r, V Funktionen von v allein bedeuten, stellen nun, falls:

$$X \frac{dV_1}{dv} + Y \frac{dV_2}{dv} + Z \frac{dV_3}{dv} + \frac{dr \cos V}{dv} = r \sin V \sqrt{G'},$$

eine Fläche dar, für die 1) X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen sind, 2) u, v die Parameter der Krümmungslinien bedeuten, 3) die Kurven $v = \text{const.}$ auf Kugeln liegen, deren Mittelpunkte die Koordinaten V_1, V_2, V_3 besitzen.

Hinsichtlich der Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien bemerkt *H. Dobriner*[156]), dass es zu jeder von ihnen noch unendlich viele andere mit derselben Eigenschaft gibt, die mit ihr das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein haben, und dass unter diesen auch solche vorhanden sind, bei denen die Trägerkugeln der Krümmungslinien alle durch einen Punkt gehen. Betrachten wir zwei solche Flächen, so besitzen die Mittelpunktskurven der beiden Scharen der Kugeln, auf denen ihre sphärischen Krümmungslinien liegen, in entsprechenden Punkten C und C' parallele Tangenten. *E. Blutel*[157]) fand, dass die abwickelbaren Normalenflächen längs zweier sich entsprechender Krümmungslinien auf beiden Flächen durch eine Ähnlichkeitstransformation aus einander hervorgehen. Die durch sich entsprechende Punkte jener Mittelpunktskurven gelegten Geraden erzeugen eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie von der Geraden $\overline{CC'}$ im Punkte C_0 berührt werde. Dann ist C_0 der Pol jener Transformation, und das Ähnlichkeitsverhältnis ist gleich dem Verhältnis der Strecke CC_0 zu CC'. Auf Grund dieser Sätze lässt sich schliessen, dass die Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien aus denen mit einer Schar ebener erhalten werden, wenn man letztere der Transformation mittelst reziproker Radien unterwirft und zu den so gewonnenen Flächen diejenigen bestimmt, die sowohl mit ihnen das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein haben, als mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien ausgestattet sind[158]).

Hingewiesen sei noch auf die Behandlung des Problems der ebenen und sphärischen Krümmungslinien bei *E. Wälsch*, Festschrift der technischen Hochschule Brünn 1899, wo die Koordinaten eines

156) J. f. Math. 94 (1883), p. 118, 125.

157) Paris, C. R. 116 (1893), p. 249.

158) „*Darboux*" 4, p. 245.

Punktes der fraglichen Flächen als explizite Funktionen zweier Parameter ausgedrückt werden, sowie auf eine besondere Art hierhergehörender Flächen bei *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1902, p. 367.

V. Weingarten'sche Flächen.

17. Die beiden Weingarten'sche Sätze. Auf die Eigenschaften der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des anderen ist, wies zuerst *J. Weingarten* hin, weshalb man heute jene Flächen *Weingarten*'sche oder kurz *W-Flächen*[158a]) nennt. (Vgl. auch III D 6 a, Nr. **31**.) Jede Umdrehungs- und jede Schraubenfläche ist eine W-Fläche. Die kennzeichnende geometrische Eigenschaft der W-Flächen besteht darin, dass die Kurvenscharen $R_1 = \text{const.}$, $R_2 = \text{const.}$ zusammenfallen, sodass es nicht möglich ist, die Grössen R_1 und R_2 zu Parametern zu wählen. — Die zu R_1 gehörenden Krümmungslinien mögen als Kurven $v = \text{const.}$ in Rechnung gesetzt werden. Nehmen wir ausser diesen die Kurven $R_1 = \text{const.}$ zu Parameterlinien, so nimmt nach *Weingarten*[159]) das Quadrat des Linienelements der zu R_1 gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche die Gestalt an:

$$ds^2 = (dR_1)^2 + e^{2\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}} dv^2.$$

Danach sind die Krümmungsmittelpunktsflächen aller Flächen, bei denen R_2 dieselbe Funktion von R_1 ist, auf einander und im besonderen auf eine unter ihnen befindliche Rotationsfläche abwickelbar[160]). Umgekehrt lässt sich mit Hülfe jeder auf eine Umdrehungsfläche abwickelbaren Fläche eine W-Fläche finden. Es bilden nämlich die Tangenten derjenigen geodätischen Linien der ersten Fläche, die bei der Abwicklung in die Meridiane der Umdrehungsfläche übergehen, das Normalensystem einer Parallelschar von W-Flächen[161]). — Ein zweiter Satz[162]) bezieht sich auf den Zusammenhang der W-Flächen mit einer gewissen Form des Quadrats des Linienelements der Einheitskugel. Sind die Koordinaten X, Y, Z der letzteren in der Art als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen u und v ausgedrückt, dass:

$$\sum dX^2 = E' du^2 + \Phi(E') dv^2,$$

so nehme man: $E' = \frac{1}{\varkappa^2}$, $\Phi(E') = \frac{1}{\vartheta'(\varkappa)^2}$. Alsdann stellen die Ausdrücke:

158a) Man verwechsle diese nicht mit den *Klein-Lie*'schen W-Flächen (Nr. **6**).

159) J. f. Math. 59 (1861), p. 382.

160) Vgl. „*Bianchi*", p. 246 u. 248.

161) „*Darboux*" 3, p. 328.

162) J. f. Math. 62 (1863), p. 160.

$$x = \int \left\{ \vartheta(\varkappa) \frac{\partial X}{\partial u} du + (\vartheta(\varkappa) - \varkappa\vartheta'(\varkappa)) \frac{\partial X}{\partial v} dv \right\}, \text{ etc.}$$

die Koordinaten einer Fläche dar, für welche die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Krümmungslinien sind, die Grössen X, Y, Z die Bedeutung der Richtungskosinus der Normalen besitzen, und die Hauptkrümmungshalbmesser durch $-\vartheta(\varkappa)$ und $-\vartheta(\varkappa) + \varkappa\vartheta'(\varkappa)$ gegeben werden, sodass zwischen diesen die durch Elimination von $\varkappa$ zu erhaltende Beziehung besteht. Das Quadrat des Linienelements der zu $R_1 = -\vartheta(\varkappa)$ gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche nimmt dabei die Form an:

$$\vartheta'(\varkappa)^2 d\varkappa^2 + \varkappa^2 dv^2.$$

Die Voraussetzung $\vartheta(\varkappa) = \varkappa + a$ führt auf die Röhrenflächen[162a]) (Nr. 4), die Voraussetzung $\vartheta(\varkappa) = \frac{\varkappa^2}{2}$ auf die Minimalflächen (Nr. 19 ff.), d. h. Flächen, bei denen $R_1 + R_2 = 0$. Zu diesen Fällen fügte *Weingarten* noch einen dritten hinzu, indem er nachwies, dass die Voraussetzung $\vartheta(\varkappa) = \frac{1}{2}\left(\arcsin \varkappa + \varkappa\sqrt{1 - \varkappa^2}\right)$ auf die Flächen mit der Eigenschaft:

$$2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$$

führt[163]). *Darboux* fand die folgende Erzeugung dieser Flächen. Man betrachte zwei Kurven mit absolut gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Torsionen. Ist P ein beliebiger Punkt der einen, P_1 ein beliebiger Punkt der anderen Kurve, so ist der Ort des Mittelpunkts (M) der Strecke $\overline{PP_1}$ eine Translationsfläche (Nr. 6). Zieht man durch jeden Punkt M dieser Fläche eine Gerade, die der Schnittlinie der Schmiegungsebenen der gegebenen Kurven in P und P_1 parallel ist, so bilden diese Geraden das Normalensystem der fraglichen W-Fläche[164]).

U. Dini[165]) gründet seinen Beweis des letzten *Weingarten*'schen Satzes auf die Fundamentalgleichungen, wie sie für den Fall gelten, dass die Krümmungslinien mit den Parameterlinien zusammenfallen. Dabei ergibt sich, dass auch das Quadrat des Linienelements der W-Fläche selbst die Form enthält:

$$\frac{du^2}{h^2} + \frac{dv^2}{\vartheta'(h)^2},$$

wo nun $\frac{1}{R_1} = \vartheta(h)$, $\frac{1}{R_2} = \vartheta(h) - h\vartheta'(h)$.

162a) Vgl. *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 357.

163) Vgl. *„Bianchi“*, p. 251.

164) *„Darboux“* 3, p. 372.

165) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 1. Teil 2 (1868), p. 51.

Aus der letzteren Form des Linienelements kann man aber auf eine *W*-Fläche nur dann schliessen, wenn zugleich das Krümmungsmass der Fläche den Wert $\vartheta(h)(\vartheta(h) - h\vartheta'(h))$ besitzt.

18. Weitere Sätze. Die *W*-Flächen mit lauter ebenen Krümmungslinien betrachtet *Dini*[165]) p. 70. Er zeigt, dass die Flächen mit der Eigenschaft $R_1 R_2 = \text{const.}$ oder $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.}$ $(\gtrless 0)$, nur wenn sie Rotationsflächen sind, lauter ebene Krümmungslinien besitzen können. Die *W*-Flächen mit nur einer Schar ebener Krümmungslinien behandelt *Dini* in einer weiteren Arbeit[166]), doch ist das Ergebnis nicht einfach. *S. Lie*[167]) und später *Weingarten*[168]) zeigten auf verschiedenen Wegen, dass sich die Krümmungslinien der *W*-Flächen durch Quadraturen bestimmen lassen.

Beltrami[169]) und *Dini*[170]) fanden, dass die einzigen geradlinigen *W*-Flächen die geradlinigen Schraubenflächen sind[171]). Über parallele *W*-Flächen handelt eine Arbeit von *H. Thompson,* Americ. J. of Math. 24 (1902), p. 303. *L. Raffy* zeigte, dass die Schraubenflächen die einzigen *W*-Flächen sind, auf denen jede Kurve $R_1 = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien einen konstanten Winkel bildet (Par. soc. math. Bull. 25 (1897), p. 124).

Hinsichtlich der hyperoskulierten Normalschnitte (III D 1, 2 Nr. 38), die durch einen Punkt einer *W*-Fläche gelegt werden können, gilt der Satz, dass es drei derartige Schnitte, oder nur einen solchen gibt, je nachdem $\frac{dR_2}{dR_1}$ negativ oder positiv ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass im ersten Fall die Schnitte gegen einander gleich geneigt sind, besteht in der Unveränderlichkeit des Ausdrucks $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (III D 1, 2, Nr. 35), d. h. nur die Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung (Nr. 36) besitzen die fragliche Eigenschaft[172]).

VI. Minimalflächen.

19. Historisches. Sätze von Meusnier. Integral von Monge. Ausführliche Darstellungen der geschichtlichen Entwicklung der Lehre

166) Pisa, Ann. 11 (1869) Teil 2, p. 42.

167) Archiv math. og naturv. 4 (1879), pag. 507; Bull. sci. math. (2) 4 (1880), p. 301.

168) J. f. Math. 103 (1888), p. 184.

169) Ann. di mat. 7 (1865), p. 148. 170) ibid. p. 208.

171) „*Darboux*" 3, p. 314.

172) *R. v. Lilienthal,* J. f. Math. 104 (1889), p. 343. Der letzte Satz bei *A. Ribaucour,* Paris, Bull. Soc. Philomat. 7 (1879), p. 112.

von den Minimalflächen gaben *E. Beltrami*[173]), *B. Riemann-K. Hattendorff*[174]), *H. A. Schwarz*[174a]), *G. Darboux*[175]). Die Lehre von den Minimalflächen (vgl. auch III D 6a, Nr. 27) beginnt mit der *J. L. Lagrange*'schen[176]) Aufstellung der Differentialgleichung der Fläche, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Flächeninhalt besitzt. Betrachtet man z als eine Funktion von x und y, so findet *Lagrange* zwischen den ersten Ableitungen p, q und den zweiten r, s, t von z die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0$$

oder:

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche bedeuten, der Ausdruck $-Ydx+Xdy$ das Differential einer Funktion (etwa r) von x und y ist. Dies besagt aber, dass die mit den Richtungskosinus Y, $-X$, Z durch die Punkte der xy-Ebene gelegten Geraden ein Normalensystem bilden, und r kann als die auf den Strahlen des Systems zu messende Entfernung der Punkte einer das Normalensystem senkrecht durchsetzenden Fläche von den Punkten der xy-Ebene betrachtet werden.

Ch. Meusnier[177]) zeigte, dass diese Differentialgleichung das Verschwinden der Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche nach sich zieht. Obgleich nun eine Fläche mit der Eigenschaft $R_1+R_2=0$ keineswegs in ihrer ganzen Ausdehnung auch jene Minimaleigenschaft besitzen muss, hat man doch für diese Flächen — um die es sich im folgenden handelt — den Namen *Minimalflächen* beibehalten. Der von *A. Ribaucour* (Nr. **30**) benutzte Name *Elassoid*

173) Bologna, Mem. (2) 7 (1868), p. 3.

174) Posthume Abhandlung von *B. Riemann,* bearbeitet von *K. Hattendorff,* Göttinger Abhandlungen 13 (1867).

174a) J. f. Math. 80 (1875), p. 280; Gesammelte math. Abhndlgn. 1, Berlin 1890, p. 168.

175) „*Darboux*" 1, livre III.

176) Miscellanea Taurinensia 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 335. Über diese Frage der Variationsrechnung (II A 8) vgl. *B. Riemann,* Gesammelte math. Werke hrsg. von *H. Weber,* Leipzig 1876, p. 287; *H. A. Schwarz,* Gesammelte math. Abhndlgn. 1, Berlin 1890, p. 223, 270; *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 231. Für die Anwendung der *O. Bonnet*'schen Methode vgl. *H. Résal* das unter 132a) zitierte Werk p. 123; für die Anwendung der *Grassmann*'schen Methode vgl. *H. Grassmann,* Inaug. Dissert. Halle a/S. 1893, p. 84.

177) Paris, Mém. sav. [étr.] 10 (1785) (lu 1776), p. 504.

ist nicht gebräuchlich geworden. *Meusnier* fand, dass jede geradlinige Minimalfläche mit einer Leitebene eine gewöhnliche Schraubenfläche, und jede Rotations-Minimalfläche die Umdrehungsfläche der Kettenlinie (*Catenoid*)[178]) ist (l. c. p. 507, 508). *G. Monge*[179]) und *A. Legendre*[180]) stellten, der erste unter Benutzung seiner Theorie der Charakteristiken (II A 5, Nr. 43), der zweite unter Anwendung der nach ihm benannten Transformation (ib.) als allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung die Ausdrücke auf[181]):

$$x = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{d\psi(\beta)}{d\beta}, \quad y = \varphi(\alpha) - \alpha\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \psi(\beta) - \beta\frac{d\psi(\beta)}{d\beta},$$

$$z = \int\sqrt{-1-\alpha^2}\,\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\,d\alpha + \int\sqrt{-1-\beta^2}\,\frac{d^2\psi(\beta)}{d\beta^2}\,d\beta.$$

Hier bedeuten α und β zwei Parameter, $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ willkührliche Funktionen.

Da der Ausdruck für z, falls α und β reelle Veränderliche bedeuten, rein imaginär wird, so musste der geometrische Wert der *Monge*'schen Integration dunkel bleiben, bis die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen genügend ausgebildet war. Es würde hier zu weit führen, auf die Versuche einzugehen, die namentlich von *H. F. Scherk*[182]), *E. Björling*[183]), *E. Catalan*[184]), *O. Bonnet*[185]) unternommen wurden, um die im *Monge*'schen Integral auftretende Schwierigkeit zu überwinden. Wir erwähnen nur die bei dieser Gelegenheit gefundenen Minimalflächen selbst.

20. Die von Scherk, Catalan, Enneper gefundenen Minimalflächen. *Scherk* zeigte, dass die Gleichung:

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

eine Minimalfläche darstellt und fand ausserdem die Gleichung der

178) *M. Schilling,* Halle a/S., Modelle von *G. Herting,* Nr. 220—223. Über die Kettenlinie vgl. *G. Loria*, Spezielle algebr. u. transscend. ebene Kurven, deutsch von *F. Schütte,* Leipzig. 1902, p. 574 (III D 4, Nr. 27).

179) Applic. § 20.

180) Paris, Mém. sav. [étr.] (1789) (lu 1787), p. 309; ibid., p. 314 Ausdrücke für x, y, z ohne Quadraturen.

181) Vgl. *Serret-Harnack,* Lehrb. der Diff.- u. Integr.-Rechnung 2, zweite Hälfte (1885), p. 321; *A. Enneper,* Zeitschr. Math. Phys. 7 (1862), p. 15.

182) Lipsia, Societatis Jablonovianae nova Acta 4 Fasc. 2 (1831); J. f. Math. 13 (1835), p. 185.

183) Archiv Math. Phys. 4 (1843), p. 301.

184) J. éc. polyt. 21 (1858), p. 129.

185) Par., C. R. 37 (1853), p. 531; 40 (1855), p. 1108 und ausführlich J. de math. (2) 5 (1860), p. 222.

Minimalflächen, die zugleich Schraubenflächen[185a]) sind. Auf die erstere Fläche kam *A. Enneper*[186]) bei der Beantwortung der Frage nach solchen Minimalflächen, die eine Schar ebener Meridiankurven (III D 3, Nr. **41**) besitzen, und auf die Schraubenflächen bei der Frage nach Minimalflächen, die eine Schar geodätischer Meridiankurven besitzen[187]) *Catalan*[188]) fand die Minimalfläche, deren Gleichung sich durch Elimination von ϑ aus den Beziehungen ergibt:

$$(x - \vartheta)\cos\vartheta = (y - 1)\sin\vartheta,$$
$$z^2\cos\vartheta + 4y(1 - \cos\vartheta) - 4(1 - \cos\vartheta)^2 = 0.$$

Dieselben stellen für jeden bestimmten Wert von ϑ eine Parabel dar, deren Ebene auf der xy-Ebene senkrecht ist, und deren Scheitel bei sich änderndem ϑ die Cykloide (III D 4, Nr. **6**) mit den Gleichungen $x = \vartheta - \sin\vartheta$, $y = 1 - \cos\vartheta$ durchläuft. Ist C der Mittelpunkt des Rollkreises, und CP der zum zugehörigen Cykloidenpunkt führende Halbmesser, so werden die Radien CP von einer neuen Cykloide eingehüllt, die den Radius CP im Punkte mit den Koordinaten $x = \frac{1}{2}(2\vartheta - \sin 2\vartheta)$, $y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta)$ berührt. Durch diesen Punkt geht die Direktrix der zu ϑ gehörenden Parabel. Die Fläche ist enthalten unter den von *Enneper*[189]) bestimmten Minimalflächen, die eine Schar von Parabeln und eine Schar ebener Meridiankurven besitzen. Diese Flächen entstehen durch geometrische Zusammensetzung (vgl. Nr. **31**) der *Catalan*'schen Fläche und der Schraubenfläche, wobei die Punkte der Parabeln und die der Erzeugenden der Schraubenfläche einander zugeordnet sind.

21. Analytische Darstellungen der Minimalflächen von Weingarten, Enneper, Weierstrass, Riemann, Peterson, Beltrami. Die *Weingarten*'sche Darstellung der Minimalflächen[189a]) wurde bereits in Nr. **17** erwähnt. Die für Minimalflächen geltende Bedingung $\vartheta(k) = \frac{k^2}{2}$ ergibt für das Quadrat des Linienelementes des sphärischen Bildes dieser Flächen die Form $\frac{dp^2 + dq^2}{k^2}$. Jeder konformen

185a) Vgl. *M. Falchi,* Giorn. di mat. 34 (1896), pag. 89.

186) Gött. Abh. 29 (1882), p. 41. Ausführlich wird die *Scherk*'sche Minimalfläche behandelt von *G. Scheffers* in dem im Zitat 176) genannten Werke p. 252. Vgl. *R. Kummer,* Inaug. Dissert. Leipzig 1894.

187) Gött. Abh. 29 (1882), p. 68.

188) Zitat 184), p. 160 und Paris, C. R. 41 (1855), p. 1019. Modell von *Laine,* bei *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 225.

189) Gött. Abh. 29 (1882), p. 49. Modell von *Tallqvist,* bei *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 226.

189a) J. f. Math. 62 (1863), p. 164; vgl. *E. Beltrami,* die unter [200]) zitierte Arbeit, p. 59.

Abbildung der Kugel auf die Ebene (III D 6 a, Nrr. **11, 33**) entspricht somit eine durch die *Weingarten*'schen Formeln darstellbare Minimalfläche.

A. Enneper[190]) geht von den drei Fundamentalgleichungen aus, wie sie unter der Annahme gelten, dass die Parameterlinien mit den Krümmungslinien zusammenfallen (III D 3, Nr. **9**), und findet für die Koordinaten der Punkte der Minimalflächen die Gleichungen:

$$x = \int \frac{\varphi^2(p) - 1}{4\varphi'(p)} dp + \int \frac{\psi^2(q) - 1}{4\psi'(q)} dq,$$
$$y = i\int \frac{\varphi^2(p) + 1}{4\varphi'(p)} dp - i\int \frac{\psi^2(q) + 1}{4\psi'(q)} dq,$$
$$z = \int \frac{\varphi(p)}{2\varphi'(p)} dp + \int \frac{\psi(q)}{2\psi'(q)} dq.$$

Hier sind p und q konjugiert komplexe Veränderliche, während $\varphi(p)$ und $\psi(q)$ in den Formen $\Phi(p) + i\Psi(p)$, $\Phi(q) - i\Psi(q)$ angenommen werden, wo Φ und Ψ für reelle Werte von p reell sein sollen. Die Krümmungslinien fallen mit den Kurven $p + q = \text{const.}$ und $p - q = \text{const.}$ zusammen. Einfache Voraussetzungen hinsichtlich der Funktion $\varphi(p)$ führen *Enneper* einerseits zu einer algebraischen Minimalfläche neunter Ordnung[191]), andererseits zum Nachweis, dass die von *Scherk* gefundenen Schraubenflächen zugleich die allgemeinsten Schraubenflächen mit der Eigenschaft $R_1 + R_2 = 0$ sind[192]).

K. Weierstrass[193]) fasst auf einer Minimalfläche ein beliebiges isothermes Kurvensystem (III D 3, Nr. **19**) ins Auge, dessen Parameter mit p und q bezeichnet werden. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = 0,$$

und so folgt der Satz, dass x, y, z die reellen Teile dreier analytischer Funktionen f, g, h der komplexen Veränderlichen $u = p + qi$ sind, wobei die Funktionen f, g, h der Bedingung unterliegen:

$$\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2 + \left(\frac{dh}{du}\right)^2 = 0.$$ [194])

Diese Gleichung löst *Weierstrass*, unter G und H zwei willkürliche Funktionen verstehend, in folgender Weise auf:

$$\frac{df}{du} = G^2 - H^2, \quad \frac{dg}{du} = i(G^2 + H^2), \quad \frac{dh}{du} = 2GH.$$

190) Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 107.

191) Zitat 190), p. 108. *M. Schilling*, Halle a/S., Modell von *G. Herting*, Nr. 224.

192) Zitat 190), p. 110. Vgl. *„Darboux"* 1, p. 276; *„Bianchi"*, p. 273; *E. Lamarle*, J. de math. (2) 4 (1859), p. 241.

193) Berlin. Monatsberichte 1866, p. 612. Vgl. auch III D 6 a, Nr. **21**.

194) Vgl. *Lacroix*, Traité du calcul diff. et int. 2, Paris 1814, 2. Aufl., p. 627; *„Darboux"* 1, p. 274.

Das betrachtete Kurvensystem vermittelt die konforme Abbildung (II B 1, Nrr. 5, 18) eines gehörig begrenzten Stückes der Minimalfläche auf ein Stück (E) der p, q-Ebene. Bezeichnen wir mit p_0, q_0 die Koordinaten eines beliebig innerhalb des letzteren gewählten Punktes, mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Minimalfläche und setzen $u_0 = p_0 + q_0 i$, so entsteht:

$$x = x_0 + \Re\int_{u_0}^{u} (G^2(u) - H^2(u))\,du,$$

$$y = y_0 + \Re\int_{u_0}^{u} i\,(G^2(u) + H^2(u))\,du, \quad z = z_0 + \Re\int_{u_0}^{u} 2\,G(u)\,H(u)\,du.$$

Das Zeichen $\Re$ bedeutet, dass der reelle Teil des jeweiligen Integrals in Rechnung gesetzt werden soll. Die Grösse $\frac{H(u)}{G(u)} = s$ besitzt folgende geometrische Bedeutung. Werden die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche mit X, Y, Z bezeichnet, so projiziere man den dem Punkt (x, y, z) der Minimalfläche entsprechenden Punkt (X, Y, Z) der Einheitskugel vom Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ derselben aus auf die Ebene $z = 0$. Wird dadurch der Punkt $x = x'$, $y = y'$ erhalten, so ist $s = x' + y'i$. Führt man an Stelle der unabhängigen Veränderlichen u die Veränderliche s ein und setzt: $G^2(u)\,du = \mathfrak{F}(s)\,ds$, so ergibt sich[195]):

$$x = \Re\int (1 - s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad y = \Re\int i\,(1 + s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds,$$
$$z = 2\Re\int s\,\mathfrak{F}(s)\,ds.$$

Um x, y, z ohne Verwendung von Integralzeichen darzustellen, bezeichnet *Weierstrass* mit $F(s)$ eine Funktion, deren dritte Ableitung $\mathfrak{F}(s)$ ist und erhält:

$$x = \Re\{(1 - s^2)\,F''(s) + 2s\,F'(s) - 2F(s)\},$$
$$y = \Re\{i(1 + s^2)\,F''(s) - 2is\,F'(s) + 2i\,F(s)\},$$
$$z = \Re\{2s\,F''(s) - 2\,F'(s)\}.$$

Hiermit ist gezeigt, dass zu jeder analytischen Funktion eine Minimalfläche gehört und umgekehrt. Ferner bewies *Weierstrass* den umkehrbaren Satz, dass zu jeder algebraischen Funktion $F(s)$ auch eine algebraische Minimalfläche gehört. Die zweiten *Weierstrass*'schen Ausdrücke gehen aus den *Enneper*'schen hervor, wenn $p = \int \sqrt{2\,\mathfrak{F}(s)}\,ds$ genommen, und die Umkehrungsfunktion dieses Integrals mit $\varphi(p)$ be-

195) Vgl. die Arbeiten von *L. Kiepert,* J. f. Math. 81 (1876), p. 337 und 85 (1878), p. 171; *J. Weingarten,* Zeitschr. Math. Phys. 3 (1858), p. 43.

zeichnet wird. Daher erhält man bei der *Weierstrass*'schen Darstellung die Gleichungen der Krümmungslinien, wenn man den reellen und den imaginären Bestandteil des Integrals $\int\sqrt{2\mathfrak{F}(s)}\,ds$ je einer Konstanten gleich setzt[196]).

Dass überhaupt die Krümmungslinien und ebenso die Haupttangentenkurven einer Minimalfläche sich durch Quadraturen bestimmen lassen, zeigte zuerst *M. Roberts*[197]) und dann *O. Bonnet*[198]). — Auch die Darstellung der Minimalflächen in Ebenenkoordinaten[198a]) ist von *Weierstrass* in der genannten Arbeit ausgeführt. Eine eingehende Behandlung der Theorie der Minimalflächen in diesen Koordinaten findet man bei „*Darboux*" 1, p. 296 ff. Daselbst (p. 303) sind auch die Veränderungen untersucht, welche die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ und die entsprechende bei Anwendung von Ebenenkoordinaten auftretende Funktion erleidet, falls man die Minimalfläche aus einer Lage irgendwie in eine neue Lage bringt[198b]).

Neben der *Weierstrass*'schen Darstellung der Koordinaten einer Minimalfläche erwähnen wir die *B. Riemann*'sche[199]) (1860/61).

Hier wird um den Koordinatenanfangspunkt eine Kugel mit dem Halbmesser Eins beschrieben, und die sphärischen Bilder (III D 3, Nr. 7) der Punkte der Minimalfläche werden vom Punkte ($x = -1$, $y = 0$, $z = 0$) aus auf die im Punkte ($x = 1$, $y = 0$, $z = 0$) berührende Tangentialebene der Kugel projiziert. In dieser Ebene legt *B. Riemann* durch ihren Berührungspunkt mit der Kugel die y'- und z'-Achse bezw. parallel der y- und z-Achse und ordnet jenem Projektionspunkte die komplexe Zahl $\eta = y' + z'i$ zu. Wird in der Gleichung der Minimalfläche x als eine Funktion von y und z betrachtet, so ist nach dem Obigen die Differentialform $-Zdy + Ydz$ gleich dem Differential einer Funktion von y und z, die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet wird. Es zeigt sich, dass die Funktion $x + i\mathfrak{x} = 2U$ nur von η abhängt, und weiter, dass die Funktion

$$u = \int\sqrt{i\,\frac{dU}{d\log\eta}}\,d\log\eta$$

durch eine Drehung des x-y-z-Systems um seinen Anfangspunkt nicht beeinflusst wird. Mit Hilfe dieser Funktion u drückt *Riemann* die Koordinaten der Punkte der Minimalfläche durch die Gleichungen aus:

---

196) Vgl. „*Bianchi*", p. 358; „*Darboux*" 1, p. 312.

197) J. de math. (1) 11 (1846), p. 300.

198) ibid. (2) 5 (1860), p. 228.

198a) Vgl. *J. Franz*, Arch. Math. Phys. 55 (1873), p. 111.

198b) Vgl. die unter [200]) zitierte Arbeit von *E. Beltrami*, p. 63.

199) Die unter [176]) zitierten gesammelten Werke p. 292.

$$x = 2\,\Re\int -i\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta,\quad y = \Re\int -i\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right) d\log\eta,$$

$$z = \Re\int -\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right) d\log\eta.$$

Nach einer Spiegelung der Fläche an der Ebene $x = 0$ stimmen die *Riemann*'schen Formeln mit den zweiten *Weierstrass*'schen bis auf die Bezeichnung der Achsen überein, wenn $\eta = s$, $\mathfrak{F}(s) = i\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2$ gesetzt wird. Ist u' die komplex konjugierte von u, so werden hier die Krümmungslinien durch die Gleichung $u \pm i u' =$ const., die Haupttangentenlinien durch die Gleichung $u \pm u' =$ const. bestimmt. Das in dem Ausdruck für x auftretende Integral ist gleich U; ebenso mögen die in den Ausdrücken für y und z auftretenden Integrale mit V und W bezeichnet werden. *Riemann* zeigt, dass durch die Gleichungen für x, y und z die Minimalfläche auf jede der die komplexen Grössen U, V, W geometrisch darstellenden Ebenen konform abgebildet wird, und, dass der Inhalt eines Minimalflächenstücks gleich ist der halben Summe der Inhalte seiner Bilder in diesen Ebenen[199a]).

K. Peterson[199b]) findet im Verlauf von Untersuchungen über die Biegung der Flächen für die Koordinaten einer Minimalfläche eine Darstellung, die einen willkürlichen Parameter α enthält, nämlich:

$$x = \Re\left(ie^{\alpha i}\int f(l)\cos l\,dl\right),\quad y = \Re\left(ie^{\alpha i}\int f(l)\sin l\,dl\right),\quad z = \Re\left(e^{\alpha i}\int f(l)\,dl\right),$$

wo $f(l)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen l ist. Die den einzelnen Werten von α entsprechenden Minimalflächen bilden eine Schar assoziierter Minimalflächen (Nr. 23). Die *Peterson*'sche Darstellung geht in die zweite *Weierstrass*'sche über vermöge der Substitution:

$$\alpha = 0,\quad e^{li} = is,\quad f(s) = 2is^2\mathfrak{F}(s).$$

E. Beltrami[200]) geht aus von dem Umstand, dass für die zweiten Differentialparameter (III D 3, Nr. 8, p. 124) der Koordinaten einer beliebigen Fläche die Gleichungen gelten:

199a) Bei *Riemann*, [176]) p. 291 steht irrtümlich „doppelte" Summe statt „halbe"; richtig bei *H. A. Schwarz* in den unter [174a]) zitierten ges. Abhandlg. p. 177, 178, wo auch der *Riemann*'sche Ausdruck für den Inhalt eines Minimalflächenstücks eine geometrische Veranschaulichung findet.

199b) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 67. Herrn *P. Stäckel* verdankt der Verfasser die Mitteilung, dass sich die obigen Formeln schon in einer russisch geschriebenen Arbeit *Peterson*'s aus dem Jahre 1866 befinden. Vgl. die Mitteilungen über *Peterson* von *P. Stäckel*, Biblioth. Mathem. (3) 2 (1901), p. 128.

200) Bologna, Mem. (2) 7 (1868), p. 3.

$$\varDelta_2(x) = -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)X, \qquad \varDelta_2(y) = -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)Y,$$
$$\varDelta_2(z) = -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)Z.$$

Hieraus folgt, dass eine Minimalfläche von jeder Schar paralleler Ebenen in isothermen Linien geschnitten wird. Sind u und v die Parameter zweier zu einander senkrechter Isothermenscharen auf einer Minimalfläche, und setzt man $u + vi = w$, so folgt wie vorhin, dass x, y, z die reellen Teile dreier Funktionen φ, ψ, χ von w sind, die der Beziehung:

$$\varphi'(w)^2 + \psi'(w)^2 + \chi'(w)^2 = 0$$

genügen. Diese Gleichung wird nun in ähnlicher Weise befriedigt, wie *Lagrange* die Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ohne Integralzeichen löste (III D 1, 2, Nr. **13**; vgl. die Entwicklungen und historischen Angaben bei *P. Stäckel*, Leipz. Ber. 1902, p. 101). So erhält *Beltrami*, unter f eine willkürliche Funktion verstehend:

$$\varphi(w) = \frac{df}{dw}\sin w + \frac{d^2f}{dw^2}\cos w, \qquad \psi(w) = \frac{df}{dw}\cos w - \frac{d^2f}{dw^2}\sin w,$$
$$\chi(w) = if(w) + i\frac{d^2f}{dw^2}.$$

Für die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche ergeben sich die Gleichungen:

$$X = \frac{\sin u}{\cos \text{hyp.}\, v}, \quad Y = \frac{\cos u}{\cos \text{hyp.}\, v}, \quad Z = \text{tg hyp.}\, v.$$

Die Kurven $u = \text{const.}$ auf der Einheitskugel sind somit die durch die z-Achse gehenden Meridiane, die Kurven $v = \text{const.}$ die zugehörigen Parallelkreise. Der Übergang von den dritten *Weierstrass*schen Formeln zu den *Beltrami*'schen vollzieht sich mit Hülfe der Substitutionen:

$$s = ie^{-iw}, \quad F(s) = \frac{e^{-iw}f(w)}{2}\text{ [201]}.$$

22. Bestimmung einer Minimalfläche bei gegebener Begrenzung. (Vgl. Nr. 24). Von Bedeutung ist die Aufgabe, eine Minimalfläche durch eine vorgeschriebene Begrenzung zu legen. Obgleich *J. A. Serret*[202]) und *O. Bonnet*[203]) sich schon mit der Aufgabe beschäftigt hatten, Minimalflächen zu bestimmen, auf denen gegebene Gerade liegen, wurde die Aufgabe bei vollständiger geradliniger Begrenzung

201) Über die *Weierstrass*'sche und *Beltrami*'sche Darstellung der Minimalflächen vgl. *S. Pincherle*, Giorn. di mat. 14 (1876), p. 75.

202) Paris, C. R. 40 (1855), p. 1078.

203) J. de Math. (2) 5 (1860), p. 245.

der Fläche erst von *Riemann*[176]) und *Weierstrass*[204]) auf das analytische Problem der konformen Abbildung eines ebenen Flächenstückes auf ein zweites zurückgeführt (II B 1, Nr. **18**).

Bereits *Bonnet*[203]) fand, dass in den nach ihm benannten Veränderlichen (III D 3, Nr. 7, p. 121) das Quadrat des Linienelements einer Minimalfläche die Gestalt besitzt:

$$ds^2 = (v^2 + w^2)(dx^2 + dy^2),$$

während das entsprechende Linienelement der Einheitskugel durch die Gleichung:

$$ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\cos^2 iy}$$

gegeben ist. Daraus folgt 1) dass die Meridiane und Parallelen (III D 3, Nr. **41**) auf den Minimalflächen nicht nur, wie schon *Minding*[205]) zeigte, ein orthogonales, sondern auch ein isothermes System bilden; 2) dass die Minimalflächen durch die *Gauss*'sche Abbildungsart (III D 6a, Nrr. **11**, **33**) konform auf die Einheitskugel abgebildet werden. Die letztere Eigenschaft kommt, wie *E. B. Christoffel*[206]) nachwies, wenn man von dem trivialen Fall der Kugel absieht, ausschliesslich den Minimalflächen zu. Ferner stellte *Bonnet*[207]) den Satz auf, dass auch die Krümmungslinien einer Minimalfläche isotherm sind, woraus sich dann ergibt, dass die Haupttangentenkurven ebenfalls isotherm sind, da sie, wie *Ch. Dupin*[208]) zeigte, den Winkel der Krümmungslinien halbieren[209]). Denkt man sich nun ein reguläres Stück einer Minimalfläche zuerst durch parallele Normalen auf die Einheitskugel abgebildet und das hier gewonnene Stück durch stereographische Projektion auf die s-Ebene abgebildet, so möge der Ebenenteil T_1 erhalten werden. Wird dasselbe Stück der Fläche konform auf die p-Ebene abgebildet, so möge der Ebenenteil T_2 erhalten werden. Eine *Weierstrass*'sche Funktion $\mathfrak{F}(s)$ vermittelt die konforme Abbildung von T_2 auf T_1. Ist umgekehrt die Gestalt von T_2 und T_1, sowie die konforme Abbildung von T_2 auf T_1 bekannt, so ergibt sich $\mathfrak{F}(s)$, und damit sind die Koordinaten der Minimalfläche durch Quadraturen zu erhalten. Die Art der Begrenzung von T_1 und T_2 ist bekannt in dem von *Riemann* und *Weierstrass* betrachteten Falle der geradlinigen Begrenzung des Minimalflächenstücks.

---

204) Berlin, Monatsberichte (1866), p. 855.

205) J. f. Math. 44 (1852), p. 71.

206) J. f. Math. 67 (1867), p. 218; „*Darboux*“ 1, p. 309.

207) Paris, C. R. 37 (1853), p. 529.

208) Développements, p. 187 (III D 3, Nr. **3**).

209) Vgl. die Beweisführung bei *H. A. Schwarz*, Abhandl. 1, p. 172 u. *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 185.

Eine auf einer Fläche gelegene Gerade ist stets eine Haupttangentenkurve derselben, ihr sphärisches Bild der Bogen eines grössten Kreises, dessen Ebene senkrecht zur Geraden ist. Das durch stereographische Projektion (III D 6a, Nr. 4) erhaltene Bild eines Kugelkreises in der s-Ebene ist geradlinig oder kreisförmig. Ebenso ist das Bild einer auf der Minimalfläche liegenden Geraden in der p-Ebene wieder eine Gerade, die unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ oder $-\frac{\pi}{4}$ gegen die reelle Achse geneigt ist. Man steht also vor der Aufgabe, ein von Kreisbögen begrenztes Vieleck auf ein geradliniges Vieleck konform so abzubilden, dass die Begrenzungen sich entsprechen. Der Fall, in dem die Begrenzung der Minimalfläche aus vier paarweise einander gegenüberliegenden Kanten eines regelmässigen Tetraeders gebildet wird, ist ausführlich von *H. A. Schwarz*[210]) und *A. Schorndorf*[211]) behandelt. *Schwarz* verallgemeinerte die Art der Begrenzung der Minimalfläche zur sogenannten „*Schwarz*'schen Kette", indem er neben geradlinigen Stücken Ebenen hinzunahm, gegen welche die Minimalfläche senkrecht geneigt sein soll[212]). Das in einer solchen Ebene liegende Begrenzungsstück ist dann eine geodätische Krümmungslinie der Minimalfläche, besitzt also als sphärisches Bild den Bogen eines grössten Kreises. Den besonderen Fall zweier von einem Punkt ausgehender Strecken und einer Ebene als *Schwarz'sche Kette* behandelte *E. K. Neovius*[213]). Die Annahme, dass die Minimalfläche gegen die auftretenden Ebenen nicht senkrecht, aber konstant geneigt sei, untersuchte *G. Tenius*[214]).

23. Die einer Minimalfläche assoziierten Minimalflächen. Bevor wir auf ein zweites Verfahren zur Lösung der in Rede stehenden Aufgabe übergehen, ist der Begriff der einer Minimalfläche *assoziierten* Minimalflächen zu erläutern. Ersetzt man in der zweiten *Weierstrass*schen Darstellung der Koordinaten einer Minimalfläche die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ durch $e^{i\alpha}\mathfrak{F}(s)$, wo α eine reelle Konstante bedeutet, so erhält

---

210) Abhandl. 1, p. 6; Preisschrift Akad. Berlin 1867.

211) Preisschrift philos. Fak. Göttingen 1868. Man vgl. die Darstellung bei „*Bianchi*", p. 382 und „*Darboux*", p. 424. Dazu *A. Schönflies*, Paris, C. R. 112 (1891), p. 478 u. 515.

212) Abhandl. 1, p. 130. Einen weiteren besonderen Fall behandelt die Inaug.-Dissert. von *F. Bohnert*, Göttingen 1888.

213) Helsingfors Akadem. Abhandl. 1883. Eine Arbeit desselben Verfassers in den Helsingfors Soc. Sc. Fenn. Acta 1888, p. 1 erörtert Singularitäten, die im Innern und auf der Begrenzung eines geradlinig begrenzten Minimalflächenstücks auftreten können.

214) Marburg, Inaug.-Dissert. 1888.

man eine Minimalfläche, die der ursprünglichen *assoziiert* heisst[215]). Hier gelten die Sätze:

1) In entsprechenden, d. h. zu demselben Wert von s gehörenden Punkten der Minimalfläche und einer assoziierten Fläche sind die Normalen der Fläche parallel (III D 6 a, Nr. 12).

2) Die Krümmungslinien der associierten Fläche bilden mit den Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, ihre geodätische Krümmung ist gleich der geodätischen Krümmung derjenigen Kurven auf der ursprünglichen Fläche, welche die Krümmungslinien unter dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ schneiden.

3) Entsprechende Linienelemente beider Flächen bilden mit einander den Winkel α.

4) Die Assoziierte ist eine Biegungsfläche der ursprünglichen Fläche (III D 6 a, Nr. 27).

5) Die Punkte der Minimalfläche beschreiben während der Biegungen, die zu den assoziierten Flächen führen, eine aus lauter Ellipsen bestehende doppelt unendliche Kurvenschar. Nimmt man den Winkel α gleich $-\frac{\pi}{2}$, so nennt man die entsprechende assoziierte die *adjungierte* Fläche. Sie ist wohl der Form nach, aber nicht hinsichtlich ihrer Lage im Raume völlig bestimmt[216]). *Bonnet* wies zuerst auf die adjungierte Fläche hin unter Aufstellung des Satzes[217]), dass die Haupttangentenkurven der Adjungierten den Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche entsprechen. Hinsichtlich der Biegung, durch die eine Minimalfläche in ihre adjungierte übergeht, zeigte *Bianchi*[218]), dass jede geodätische Linie in der Weise gebogen wird, dass die erste bezw. zweite Krümmung (III D 1, 2, Nrr. 29, 30) der gebogenen Kurve gleich ist der zweiten bezw. ersten Krümmung der ursprünglichen Kurve. Wir erwähnen noch die *Darboux*'schen Sätze[219]): Sind zwei Flächen in der Weise auf einander abwickelbar, dass entsprechende Linienelemente einen konstanten Winkel mit einander bilden, so sind sie assoziierte Minimalflächen (III D 6 a, Nr. 27). Ist jener Winkel gleich einem Rechten, so hat man es mit einer Minimalfläche und ihrer adjungierten zu thun.

Die einer Minimalfläche assoziierten Flächen brauchen der Gestalt nach nicht von ihr verschieden zu sein. So sind z. B. die auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Minimalflächen dadurch gekennzeichnet,

---

215) *K. Peterson,* Über Kurven u. Flächen, Leipzig 1868, p. 67; *Schwarz,* Abhandl. 1, p. 175.

216) „*Darboux*" 1, p. 323.

217) Par., C. R. 1853, p. 532.

218) Giorn. di mat. 22 (1884), p. 374.

219) „*Darboux*" 1, p. 331.

dass die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ den Ausdruck $Cs^{\varkappa}$ besitzt (III D 6 a, Nr. 27). Aus diesem Umstande folgt[220]), dass, wenn $\varkappa$ von -2 verschieden, die assoziierten Flächen durch Drehung um eine Gerade aus der ursprünglichen hervorgehen. Zu den fraglichen Flächen gehört auch die von *Enneper*[221]) gefundene, bei der $\varkappa$ gleich Null ist.

24. Methode von Darboux. Das oben erwähnte zweite Verfahren zur Bestimmung eines Minimalflächenstückes, dessen Begrenzung in der Form einer *Schwarz*'schen Kette gegeben ist, hat *Darboux* angegeben[222]). Es beruht auf der Anwendung der ersten *Weierstrass*schen Darstellung (Nr. 21) der Minimalflächen, die in der Gestalt:

$$x = \Re\int i(G(t)^2 - H(t)^2)dt, \qquad y = \Re\int (G(t)^2 + H(t)^2)dt,$$
$$z = \Re\int 2\,G(t)H(t)\,dt$$

benutzt wird. Ist:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + p\,\frac{d\vartheta}{dt} + q\vartheta = 0$$

die Differentialgleichung, der $G(t)$ und $H(t)$ als partikuläre Integrale genügen, so wird durch jedes Paar von einander unabhängiger partikulärer Lösungen derselben eine Minimalfläche bestimmt, und die sämtlichen so erhaltenen Minimalflächen betrachtet *Darboux* als zur selben *Familie* gehörig. Die einer Minimalfläche assoziierten Flächen, also auch ihre adjungierte Fläche, gehören mit ihr in dieselbe Familie. Denkt man sich das fragliche Minimalflächenstück derart auf die t-Ebene abgebildet, dass den inneren Punkten des Stückes die Werte von t mit positivem imaginären Teil, den Punkten der Begrenzung die reellen t-Werte entsprechen, so gelingt die Bestimmung von p und q[223]) bis auf die Festlegung numerischer Konstanten mit Hülfe der Bemerkung, dass die Begrenzung der adjungierten Fläche ebenfalls aus einer *Schwarz*'schen Kette besteht, deren Ebenen den Strecken und deren Strecken den Ebenen der ersten Kette entsprechen. Die Funktionen p und q sind in der ganzen t-Ebene eindeutig, und reell für reelle Werte von t. Der Gesamtheit der letzteren entspricht auf jeder zur fraglichen Familie gehörenden Minimalfläche eine Begrenzungslinie, von der sich zeigen lässt[224]), dass sie aus ebenen Krümmungslinien, die aber nicht geodätisch zu sein brauchen, und aus Haupttangentenkurven besteht, die nicht geradlinig zu sein brauchen, nämlich auch auf einem beliebigen Zylinder gezogene Schrauben-

220) „*Bianchi*", p. 373, 374.
221) Gött. Abh. 29 (1882), p. 73.
222) „*Darboux*" 1, p. 456.
223) „*Darboux*" 1, p. 472.
224) ibid. p. 475.

linien sein können. Das sphärische Bild einer solchen Begrenzung besteht aus Bögen von kleinen Kreisen. Man hat daher zwei solche partikuläre Integrale aufzufinden, die eine Begrenzung liefern, welche 1) nur aus geodätischen Krümmungslinien und geradlinigen Haupttangentenkurven besteht und 2) mit der gegebenen *Schwarz*'schen Kette zusammenfällt. Ist umgekehrt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von obiger Form mit bestimmbarer Gruppe[224a]) (II A 4b, Nr. 18) gegeben, so kann man nach den mit ihr verträglichen Begrenzungen von Minimalflächenstücken fragen. *Darboux* hat von diesem Gesichtspunkte aus namentlich die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (I A 3, Nr. 55; II B 7) untersucht[225]).

Hinsichtlich der Bestimmung einer Minimalfläche mittels vorgeschriebener Begrenzung ist noch der von *Riemann*[226]) betrachtete Fall zu erwähnen, in dem die Begrenzung aus zwei parallelen Kreisen besteht. Hier gelangt *Riemann* durch die Annahme zum Ziel, dass die den Kreisen parallelen Ebenen die Minimalfläche ebenfalls in Kreisen schneiden. (Vgl. Nr. 26).

25. **Bestimmung einer Minimalfläche durch einen analytischen Streifen.** Anstatt durch eine vorgeschriebene Begrenzung, lässt sich eine Minimalfläche, wie schon *Björling*[183]) und *Bonnet*[227]) erkannten, auch durch die Forderung bestimmen, dass sie eine gegebene Kurve enthalten und längs der Kurve vorgeschriebene Normalen besitzen soll. Dabei müssen die Koordinaten der Kurve und die Richtungskosinus der Normalen als analytische Funktionen einer Veränderlichen gegeben sein, sodass sie auch für komplexe Werte dieser Veränderlichen bestimmt sind. Man drückt daher die in Rede stehende Forderung auch so aus, dass man sagt, die Minimalfläche solle durch einen gegebenen *analytischen Streifen* hindurchgelegt werden[228]). Betrachten wir die Koordinaten der gegebenen Kurve (x_0, y_0, z_0) und die gegebenen Richtungskosinus der Normalen (X_0, Y_0, Z_0) als Funktionen von t, so erhält man für die Koordinaten x, y, z der verlangten Minimalfläche nach *Schwarz*[229]) die Gleichungen:

$$x = \Re\left\{x_0 + i\int(Z_0 dy_0 - Y_0 dz_0)\right\},\ y = \Re\left\{y_0 + i\int(X_0 dz_0 - Z_0 dx_0)\right\},$$
$$z_0 = \Re\left\{z_0 + i\int(Y_0 dx_0 - X_0 dy_0)\right\},$$

wo in den rechtsstehenden Klammern der Veränderlichen t komplexe

224a) *C. Jordan*, Cours d'Analyse 3, zweite Aufl., Paris 1896, p. 193.

225) ibid. p. 478.

226) Werke, p. 311.

227) Paris, C. R. 40 (1855), p. 1107.

228) „*Bianchi*", p. 378.

229) Abhandl. 1, p. 179.

Werte beizulegen sind. *Schwarz* knüpft an diese Formeln die Folgerungen:

1) Jede auf einer Minimalfläche gelegene Gerade ist eine Symmetrieachse der Fläche.

2) Schneidet eine Ebene eine Minimalfläche überall senkrecht, so ist sie eine Symmetrieebene der Fläche[230]).

Nach dem Vorigen ist eine Minimalfläche durch die Forderung bestimmt, dass eine gegebene Kurve eine auf ihr liegende geodätische Linie oder eine Haupttangentenkurve sein soll. Im ersteren Fall ist längs der Kurve ihre Hauptnormale, im zweiten ihre Binormale zugleich Normale der Fläche. Mit der Berechnung der Minimalfläche, die eine gegebene ebene Linie als geodätische Linie besitzen soll, beschäftigt sich die Inaug.-Dissertation von *L. Henneberg*[231]), und zwar wird hier von dem oben erklärten Abbildungsverfahren Gebrauch gemacht. *Henneberg* untersucht die Minimalflächen, bei denen eine Ellipse oder Hyperbel als geodätische Linie auftritt, ebenso die betreffenden adjungierten Flächen. Die Minimalfläche, für welche eine Parabel eine geodätische Linie[232]) ist, fällt mit der oben erwähnten *Catalan*'schen Minimalfläche zusammen. Auch die Minimalflächen, für welche die Evolute eines Kegelschnittes eine geodätische Linie ist, sind von *Henneberg* a. a. O. berechnet. Man vergleiche zu der in Rede stehenden Frage die Preisarbeit von *A. Ribaucour*[233]), wo auch die Fälle, in denen eine Epi- oder Hypocykloide oder eine *Ribaucour*'sche Kurve als geodätische Linie einer Minimalfläche betrachtet wird, erörtert werden. Für die Lemniskate (III C 3) wurde unsere Aufgabe von *O. v. Lichtenfels*[234]), für die Cykloide von *O. Niewenglowski*[235]) behandelt. Auf Scharen von Minimalflächen, die durch elliptische Integrale darstellbar sind, und bei denen Kurven mit konstanter erster Krümmung als Haupttangentenkurven auftreten, hat *R. v. Lilienthal* aufmerksam gemacht[236]).

---

230) „*Bianchi*", p. 379. 231) Heidelberg 1875.

232) Vgl. *A. Herzog*, Bestimmung einiger spezieller Minimalflächen, Zürich, Naturf. Ges. Viert.-Schrift 1875.

233) Étude des élassoides, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1880), § 110, § 123. Unter einer *Ribaucour*'schen Kurve versteht man eine ebene Kurve, bei der die auf den Kurvennormalen gemessenen Entfernungen der Kurvenpunkte von den Punkten einer festen, in der Ebene der Kurve liegenden, Geraden in konstantem Verhältnis zu den entsprechenden Krümmungshalbmessern der Kurve stehen. Vgl. *G. Loria*, das unter 178) zitierte Werk, p. 521 (III D 4, Nr. **26**).

234) Wien, Berichte (1886), p. 41.

235) Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 391.

236) Inaug.-Dissertation Berlin 1882; J. f. Math. 93 (1882), p. 248.

26. Weitere besondere Minimalflächen. Von weiteren besonderen Arten von Minimalflächen führen wir an:

1) Die geradlinigen Minimalflächen. *E. Catalan* zeigte[237]), dass die einzigen derartigen Minimalflächen die gewöhnlichen Schraubenflächen sind. Wohl den einfachsten Beweis dieses Satzes gab *Schwarz*[238]). (Vgl. Nr. **40.**)

2) Unter den Flächen mit einer Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen ist nur das Catenoid (Nr. **19**) eine Minimalfläche[239]). Man erkennt leicht, dass, wenn eine Schar von Krümmungslinien einer Minimalfläche aus ebenen Kurven besteht, auch die andere aus solchen bestehen muss, sodass die sphärischen Bilder der Krümmungslinien von zwei Ebenenbüscheln aus der Einheitskugel ausgeschnitten werden, deren Achsen reziproke Polaren der Kugel sind (Nr. **14**). Für den Fall der allgemeinen Lage dieser Polaren wurden die fraglichen Minimalflächen von *Bonnet*[240]) bestimmt. Nimmt man aber zwei zu einander senkrechte Tangenten der Kugel zu den Achsen jener Ebenenbüschel, so ergibt sich die oben (Nr. **21**) erwähnte, von *Enneper* gefundene Fläche neunter Ordnung und sechster Klasse. Die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ ist hier einer reellen Konstanten gleich[241]). *Darboux* zeigte, dass die fragliche Fläche die Schar der Ebenen einhüllt, welche durch die Mittelpunkte der die Punkte einer Parabel mit den Punkten ihrer Fokalparabel (III C 4) verbindenden Strecken senkrecht zu den Strecken gelegt werden können[242]). *Ribaucour* fand, dass die *Enneper*'sche Fläche die erste negative Fusspunktskurve (III D 1, 2, Nr. 7) einer Parabel hinsichtlich ihres Brennpunkts als geodätische Linie besitzt[243]). Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien untersuchte *H. Dobriner*[244]).

3) Bei den Minimalflächen, die zugleich Schraubenflächen sind, hat man[244a]):

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{a e^{i\alpha}}{s^2},$$

---

237) J. de math. (1) 7 (1842), p. 203. Vgl. das unter [176]) zitierte Werk von *G. Scheffers*, p. 242.

238) Abhandl. 1, p. 181.

239) *Bonnet*, J. de math. (2) 5 (1860), p. 223.

240) Paris, C. R. 41 (1855), p. 1057 und ausführliche Herleitung J. de math. (2) 5 (1860), p. 238; *„Bianchi"*, p. 371. Vgl. *A. Demoulin*, Bruxelles Mém. cour. 58 (1899).

241) *Schwarz*, Abhandl. 1, p. 184; *„Darboux"* 1, p. 369.

242) ibid. p. 318. 243) Étude sur les élassoides § 114.

244) Acta math. 10 (1887), p. 145.

244a) *„Bianchi"*, p 374.

wo a und α reelle Konstanten bedeuten. Für die Minimalflächen, die zugleich Spiralflächen (Nr. 7) sind, ist[245]):

$$\mathfrak{F}(s) = (A + Bi)\, s^{-2+ai}.$$

4) Cyklische und weitere Minimalflächen. Die Frage nach den Minimalflächen, auf denen eine Schar von Kreisen liegt, ist von *Enneper* gelöst worden[246]). Die Ebenen der Kreise können hier nur parallel sein. Längs jedes Kreises wird die Fläche von einem Kegel zweiten Grades berührt, und diese Kegel sind koncyklisch, d. h. sie werden von denselben beiden Scharen von Ebenen in Kreisen geschnitten. Die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ hat hier die Gestalt:

$$\frac{C}{s\sqrt{(s-\operatorname{cotg}\varepsilon)\, s\, (s+\operatorname{tg}\varepsilon)}},$$

wo C und ε reelle Konstante bedeuten[247]). — Die Minimalflächen, welche überhaupt von einer Schar koncyklischer Kegel zweiten Grades berührt werden, sind von *H. A. Schwarz* bestimmt worden[248]). Hier gilt zunächst der Satz: Jede Minimalfläche, die von einem Kegel zweiten Grades längs der Schnittlinie desselben mit einer durch seinen Mittelpunkt hindurchgehenden Kugel berührt wird, wird von einer einfach unendlichen Schar koncyklischer Kegel zweiten Grades eingehüllt; ferner der folgende: Wenn eine Minimalfläche einen Kegel oder Zylinder zweiten Grades längs eines Kreisschnitts berührt, so enthält sie auch eine Schar von Kreisen in parallelen Ebenen. *Schwarz* schloss an diese Untersuchungen eine solche über die transcendenten Minimalflächen, auf denen eine Schar algebraischer Kurven liegt[249]), und bestimmte die fraglichen Flächen für einen ausgedehnten Fall. Eine besondere von *Schwarz* bei dieser Gelegenheit gefundene Fläche, auf der eine Schar von Raumkurven vierter Ordnung liegt, ist genauer untersucht von *W. Thienemann* (Inaug.-Dissert. Giessen 1890). Weitere Fälle sind behandelt von *R. v. Lilienthal* (J. f. Math. 99 (1886), p. 188) und *E. Götting* (Inaug.-Dissert. Göttingen 1887). *M. Peche* (Inaug.-Dissert. Göttingen 1891) bestimmte die Minimalflächen, auf denen eine Schar von Parabeln liegt, und zeigte (Wissensch. Beilage Prog. Oberrealsch. Breslau 1903), dass auf einer Minimalfläche keine Schar von Hyperbeln

245) *„Darboux"* 1, p. 307.

246) Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 403; Gött. Nachr. 1866, p. 243. Vgl. *X. Stouff,* Toulouse Ann. 6 (1892), p. 5; *G. Juga,* Math. Ann. 52 (1899), p. 167.

247) *Schwarz,* Abhandl. 1, p. 187.

248) ibid. p. 190. Vgl. *E. Blutel,* Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 203.

249) Abhandl. 1, p. 205; vgl. ibid. p. 330, 331.

liegen kann. Dasselbe gilt nach einer Notiz von *H. A. Schwarz* (Berlin. Ber. 22. Januar 1903) von einer Schar von Ellipsen.

5) *J. Weingarten* bestimmte die Minimalflächen, deren Gleichung sich in der Gestalt:

$$f(x) + \varphi(y) + \psi(z) = 0$$

darstellen lässt[250]), und zeigte, dass die *Schwarz*'schen Minimalflächen mit dieser Eigenschaft[251]) die sämtlichen derartigen Flächen umfassen.

27. Methode von Lie. Hinsichtlich des weiteren Ausbaues der allgemeinen Theorie der Minimalflächen sind zunächst zu erwähnen die Arbeiten von *S. Lie.* Unter Übertragung der für reelle geometrische Gebilde geltenden Benennungen auf rein analytische Gebilde werden die Gleichungen[252]):

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

auch dann als die Gleichungen einer *Kurve* betrachtet, wenn A, B, C komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind. Nimmt man:

$$A(t) = a_0(t) + ia_1(t), \quad B(t) = b_0(t) + ib_1(t), \quad C(t) = c_0(t) + ic_1(t),$$

wo die Funktionen $a_0 \dots c_1$ für reelle Werte von t reell sein sollen, so sind

$$x = a_0(\tau) - ia_1(\tau), \quad y = b_0(\tau) - ib_1(\tau), \quad z = c_0(\tau) - ic_1(\tau)$$

die Gleichungen der der ersteren *konjugierten* Kurve. Eine Zuordnung der Punkte beider Kurven zu einander besteht in der Herstellung einer Beziehung zwischen t und τ, wodurch τ als eine Funktion der Veränderlichen t oder ihrer komplex konjugierten erscheint. Die Gleichungen:

$$x = A(t) + A_1(\tau), \quad y = B(t) + B_1(\tau), \quad z = C(t) + C_1(\tau)$$

bestimmen eine *Fläche*, und zwar eine *Translationsfläche* (Nr. 6). Von Wichtigkeit ist hier die Auffassung der Fläche als des Ortes der Mittelpunkte aller Sehnen, die je einen Punkt der durch:

$$x = 2A(t), \quad y = 2B(t), \quad z = 2C(t)$$

gegebenen Kurve mit je einem Punkt der durch:

$$x = 2A_1(\tau), \quad y = 2B_1(\tau), \quad z = 2C_1(\tau)$$

bestimmten Kurve verbinden. Wir belegen die fraglichen beiden Kurven mit dem Namen *Grundkurven* und erhalten eine Minimal-

250) Gött. Nachr. 1887, p. 28. 251) Abhandl. 1, p. 137.

252) Math. Ann. 14 (1878), p. 332; Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 170. Vgl. *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geom., autogr. Vorl. 1. Göttingen 1893, p. 369.

fläche, wenn die Grundkurven *Linien von der Länge Null*, oder, wie man auch sagt, *Minimallinien* oder *Linien mit isotropen Tangenten*[252a]) sind (III D 1, 2, Nr. **12**; III D 4, Nr. **35**), d. h. wenn die Funktionen $A(t), \ldots C_1(\tau)$ den Bedingungen genügen:

$$A'(t)^2 + B'(t)^2 + C'(t)^2 = 0, \quad A_1'(\tau)^2 + B_1'(\tau)^2 + C_1'(\tau)^2 = 0.$$

Dann sind auch die Parameterlinien $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ auf der Fläche Minimallinien, und umgekehrt kann nach Nr. **21** jede Minimalfläche als durch Translation einer Minimallinie entstanden angesehen werden. Die so bestimmte Minimalfläche besitzt eine doppelt unendliche Anzahl reeller Punkte, wenn eine der beiden Grundkurven durch eine reelle Parallelverschiebung in die konjugierte der anderen übergeht.

Die bei *S. Lie* auftretende Minimalfläche, bei der die beiden Grundkurven in eine zusammenfallen, ist eine *Doppelfläche*[253]) (III A 4), sodass hier:

$$x = A(t) + A(\tau), \quad y = B(t) + B(\tau), \quad z = C(t) + C(\tau).$$

Die Fläche besitzt jetzt nur eine Schar von Parameterlinien und ist der Ort der Mittelpunkte der Sehnen der einen vorhandenen Grundkurve, die nun selbst auf der Fläche liegt und von der Schar der Parameterlinen eingehüllt wird. Bezeichnen wir mit $A_0(t)$, $B_0(t)$, $C_0(t)$ die konjugierten Funktionen von $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, mit t' den zu t konjugierten Wert, so ist die Doppelfläche reell, wenn sich τ so als Funktion — $f(t')$ — von t' bestimmen lässt, dass:

$$A(f(t')) = A_0(t') + a, \quad B(f(t')) = B_0(t') + b, \quad C(f(t')) = C_0(t') + c,$$

wo a, b, c reelle Konstante bedeuten. Es gehört so zu jedem Wert von t ein reeller Punkt der Fläche. Zu dem Werte $t_1 = f(t')$ von t gehört ein zweiter Punkt der Fläche, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 seien. Dann hat man:

$$x_1 = x + 2a, \quad y_1 = y + 2b, \quad z_1 = z + 2c.$$

Legt man eine positive Richtung der Flächennormalen fest, so zeigt sich, dass in den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) diese positiven Richtungen parallel, aber entgegengesetzt sind.

252a) *P. Stäckel*, Leipz. Ber. 1902, p. 101.

253) Math. Ann. 14 (1878), p. 346. Die ibid. p. 347 angegebene Bedingung für die Reellität einer Doppelfläche ist ungenau. Von den auf der Fläche gelegenen Minimalkurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ lässt sich nur sagen, dass eine jede derselben in ihre konjugierte durch eine Parallelverschiebung übergeht, deren Komponenten reelle Teile besitzen, die in der ganzen Fläche konstant sind, während die rein imaginären Teile von dem die Einzelkurve bestimmenden Parameterwert abhängen. Vgl. die Darstellung bei „*Darboux*“ 1, p. 348; *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 258.

Bei der zweiten *Weierstrass*'schen Darstellung einer Minimalfläche (Nr. 21) gilt allgemein der Satz, dass, wenn $\mathfrak{F}_1(s)$ die konjugierte Funktion von $\mathfrak{F}(s)$ bezeichnet, die beiden Funktionen $\mathfrak{F}(s)$ und $-\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right)$ stets dieselbe Minimalfläche liefern[254]). Hier besteht eine notwendige Bedingung für eine reelle Doppelfläche in der Gleichung:

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Betrachtet man eine Minimalfläche als umhüllt von der Ebenenschar mit der Gleichung:

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0,$$

so besteht die entsprechende Bedingung in der Gleichung:

$$\frac{f(u)}{u} = -uf_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

wo f_1 die konjugierte Funktion von f bezeichnet[255]).

Sind die Grössen a, b, c nicht sämtlich gleich Null, so liegt eine *periodische* Doppelfläche vor. Als Beispiel einer solchen führen wir die gewöhnliche Schraubenfläche an (Nr. 5). Nimmt man hier für die Grundkurve, unter m eine reelle Konstante verstehend:

$$A(t) = \frac{-im\sin t}{2},\quad B(t) = \frac{im\cos t}{2},\quad C(t) = \frac{m\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{2},$$

und setzt $\tau = t' + \pi$, so wird:

$$A(\tau) = \frac{im\sin t'}{2},\quad B(\tau) = \frac{-im\cos t'}{2},\quad C(\tau) = \frac{m\left(t'-\frac{\pi}{2}\right)}{2} + m\frac{\pi}{2};$$

die Fläche geht also durch eine Verschiebung mit den Komponenten $a = 0$, $b = 0$, $c = m\pi$ in sich selbst über. Die Veränderliche t ist hier mit der *Weierstrass*'schen Veränderlichen s durch die Gleichung verbunden:

$$s = ie^{it},$$

und ausserdem hat man:

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{-im}{2s^2} = -\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Sind die Grössen a, b, c sämtlich gleich Null, so hat man es mit einer *einseitigen* Fläche zu thun[255a]). Hier gehört zu den Werten t und t_1 ein und derselbe Punkt, und die zu t gehörende positive Normalenrichtung ist entgegengesetzt parallel der zu t_1 gehörenden.

---

254) „*Darboux*" 1, p. 295. 255) „*Darboux*" 1, p. 354.

255a) Über die Entdeckung der einseitigen Flächen siehe *P. Stäckel*, Math. Ann. 52 (1899), p. 598 (III A 4).

Als Beispiele von einseitigen Flächen führen wir an die von *Henneberg*[231]) berechneten Minimalflächen, bei denen die Evolute eines Kegelschnitts als ebene geodätische Linie auftritt. Der besonders interessante Fall, in dem die Evolute der Parabel zur geodätischen Linie genommen wird, ist ausführlich von *C. Schilling*[256]) untersucht. Die fragliche Fläche ist von der fünften Klasse und fünfzehnten Ordnung. Die Gleichungen ihrer Grundkurve lassen sich so schreiben:

$$x = \frac{(1-s^2)^3}{s^3}, \quad y = \frac{i(1+s^2)^3}{s^3}, \quad z = \frac{3(1+s^4)}{s^2},$$

und man hat:

$$\mathfrak{F}(s) = -3\left(\frac{1}{s^4} - 1\right);$$

die Substitution $s = -\frac{1}{\tau}$ zeigt, dass hier die Grundkurve mit ihrer konjugierten zusammenfällt. Den von *Darboux* aufgestellten Fall[257]):

$$\mathfrak{F}(s) = \left(\frac{1}{s} - s\right)^\alpha \left(\frac{1}{s} + s\right)^\beta \frac{1}{s^2},$$

wo β ungerade, hat *J. Vivanti* untersucht[258]).

Auf Grund der Bemerkung, dass die einer Minimalfläche längs einer Minimallinie umschriebene abwickelbare Fläche ein Zylinder ist, dessen Erzeugende durch einen Punkt des unendlich fernen imaginären Kugelkreises gehen, gelingt *Lie* die Bestimmung der Klasse einer algebraischen Minimalfläche; im besonderen ist fünf die niedrigste Klassenzahl[259]). Komplizierter sind die ganz der Theorie der algebraischen Flächen angehörenden Untersuchungen *Lie*'s über die Ordnung einer algebraischen Minimalfläche[260]).

28. Die Goursat'sche Transformation der Minimalkurven (III D 6 a, Nr. 12). Von den Transformationen, vermöge derer eine Minimalkurve wieder in eine Minimalkurve übergeht, führt die von *E. Goursat*[261]) betrachtete zu neuen Minimalflächen, die aus einer gegebenen mit bekannten Grundkurven ableitbar sind. Es handelt sich um eine imaginäre Rotation um eine reelle Achse. Nimmt man letztere zur z-Achse, und führt die Transformation den Punkt (X, Y, Z) der Einheitskugel in den Punkt (X_1, Y_1, Z_1) derselben über, so ist:

---

256) Götting. Inaug.-Dissert. 1882.

257) „*Darboux*" 1, p. 364.

258) Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 137.

259) Vgl. *Henneberg*, Ann. di mat. (2) 9 (1878—79), p. 54; *R. Sturm*, J. f. Math. 105 (1889), p. 117; *R. Glaser*, Tübingen, Inaug.-Dissert. 1891.

260) Vgl. „*Darboux*" 1, Chap. 7; *H. Richmond*, Math. Ann. 54 (1900), p. 323.

261) Acta math. 11 (1888), p. 135; vgl. ibid. p. 257.

$$\frac{X+iY}{1-Z}=\varkappa\frac{X_1+iY_1}{1-Z_1},$$

wo $\varkappa$ eine reelle positive Konstante bedeutet. Sind x, y, z die Koordinaten der gegebenen, x_0, y_0, z_0 die ihrer adjungierten Minimalfläche, so sind die Koordinaten der dieser Transformation entsprechenden Minimalfläche:

$$x_1=\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa}x-\frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa}y_0,\quad y_1=\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa}y+\frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa}x_0,\quad z_1=z.$$

Durch diese Gleichungen wird die Fläche (x, y, z) auf die Fläche (x_1, y_1, z_1) konform abgebildet. Zwei sich entsprechende Punkte beider Flächen liegen in derselben zur xy-Ebene parallelen Ebene, und die in diesen Punkten berührenden und zugleich dieser Ebene angehörenden beiden Tangenten der Flächen sind parallel. Die Abbildung führt Krümmungslinien in Krümmungslinien, Haupttangentenkurven in Haupttangentenkurven über; ferner werden ebene Krümmungslinien in ebensolche, und Haupttangentenkurven, die zugleich Schraubenlinien sind, auch in ebensolche übergeführt. Wenn $\varkappa$ sich ändert, während x, y, z; x_0, y_0, z_0 fest bleiben, beschreibt der Punkt (x_1, y_1, z_1) einen Zweig einer Hyperbel, deren Mittelpunkt sich in der z-Achse befindet.

29. Einer Abwickelbaren eingeschriebene Minimalflächen. In einer weiteren Arbeit über Minimalflächen[262]) stellt sich *Lie* die Aufgabe, zu untersuchen, ob in eine gegebene algebraische abwickelbare Fläche algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden können, und wie sie bejahenden Falls zu konstruieren seien. Hinsichtlich der Zylinderflächen gilt der im wesentlichen von *Henneberg*[263]) gefundene Satz, dass man in einen algebraischen Zylinder nur dann eine algebraische Minimalfläche einschreiben kann, wenn der Normalquerschnitt des Zylinders die Evolute einer algebraischen Kurve ist[264]). *Lie* erledigt die gestellte Aufgabe für einen Kegel und für eine algebraische Abwickelbare, hinsichtlich derer man bereits eine eingeschriebene algebraische Minimalfläche kennt. Die Lösung kommt in letzter Linie auf die ohne Zuhülfenahme von Integrationen bewirkte Auffindung von Minimallinien hinaus[265]). Der von *Lie* benutzte Weg ist im wesentlichen der folgende. Die Koordinaten der Punkte einer Raumkurve seien x_0, y_0, z_0, ferner seien α, β, γ; a, b, c; λ, μ, ν die Winkel,

262) Math. Ann. 15 (1879), p. 465. Vgl. *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 166, 224, 340.

263) Dissertation, p. 47.

264) Vgl. *Lie,* a. a. O. p. 466, 473; „*Darboux*" 1, p. 406.

265) „*Darboux*" 1, p. 417.

die ihre Tangente, Hauptnormale und Binormale mit den Achsen bildet, ϱ und r seien die Halbmesser ihrer ersten und zweiten Krümmung. Bestimmt man nun die Gratlinie (Nr. 2) der Abwickelbaren, die der Kurve und dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis umschrieben ist, so ist sie offenbar eine Minimallinie und ihre Koordinaten sind:

$$u = x_0 + \varrho \cos \alpha \pm i\varrho \cos \lambda, \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hülfe der *Schwarz*'schen Formeln sieht man, dass die zugehörige Minimalfläche den Ort der Krümmungsachsen (III D 1, 2, Nr. 29) der (x_0, y_0, z_0) (bei *Lie Evolute* der Kurve) in den Mittelpunkten der Kurve ersten Krümmung der Kurve berührt. Dieser Mittelpunktslinie entspricht auf der adjungierten Fläche eine Linie auf einem Kegel, dessen Erzeugende den Binormalen der Kurve (x_0, y_0, z_0) parallel sind, während die Entfernung des dem Punkte (x_0, y_0, z_0) entsprechenden Punktes dieser Linie von der Kegelspitze gleich ϱ ist. Liegt umgekehrt der Kegel vor, so liefert jede Kurve (x_0, y_0, z_0), deren Binormalen den Erzeugenden des Kegels parallel sind, eine Funktion ϱ und damit eine Kurve auf dem Kegel so, dass die längs derselben berührende Minimalfläche ohne Integration bestimmbar ist. Dabei wird diese Fläche, falls der Kegel und die Kurve (x_0, y_0, z_0) algebraisch sind, ebenfalls algebraisch. *Lie* zeigt, dass jede algebraische Minimalfläche in eine vierfache Mannigfaltigkeit von Evoluten algebraischer Raumkurven eingeschrieben ist, jedoch eine dreifache derartige Mannigfaltigkeit von Evoluten je längs einer Mittelpunktslinie berührt.

Die in Rede stehende *Lie*'sche Aufgabe ist von *Darboux* allgemein gelöst. Für einen Zylinder, dessen Normalschnitt die Evolute (S) einer algebraischen Kurve ist, ergibt sich folgende Lösung[266]. Man ordne den Punkten P von (S) die Punkte Q einer zweiten Kurve, die ebenfalls die Evolute einer algebraischen Kurve sein muss, mittelst des Parallelismus der Tangenten zu. Trägt man nun von den Punkten P aus auf den Erzeugenden des Zylinders die zu den entsprechenden Punkten Q gehörenden und negativ genommenen Bogenlängen der zweiten Kurve auf, so ergibt sich die allgemeinste Kurve, längs derer der Zylinder von einer algebraischen Minimalfläche berührt wird. — Für eine von einem Zylinder verschiedene algebraische Abwickelbare lässt sich die Lösung so aussprechen. Es mögen die Koordinaten der Gratlinie mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet und die sonstigen obigen Benennungen beibehalten werden. Sind nun x_1, y_1, z_1 die Koordinaten

266) ibid. p. 407.

einer algebraischen Kurve, deren Tangente im Punkte (x_1, y_1, z_1) der Binormalen der Gratlinie im Punkte (x_0, y_0, z_0) parallel ist, und deren Bogenlänge mit σ bezeichnet sei, so trage man vom Punkte x_0, y_0, z_0 aus auf der Tangente der Gratlinie die Strecke $r\frac{d(\sigma+r)}{ds}$ ab, wodurch man die allgemeinste Kurve, längs derer die Abwickelbare von einer algebraischen Minimalfläche berührt wird, erhält. Die Gleichungen der letzteren sind:

$$x = \Re\left\{x_0 + r\frac{d(\sigma+r)}{ds}\cos\alpha - i\left(x_1 + r\cos\lambda + r\frac{d(\sigma+r)}{ds}\cos a\right)\right\}, \text{ u. s. w.}$$

Die Grösse $r\frac{d(\sigma+r)}{ds}$ hat folgende geometrische Bedeutung. Man trage auf den Tangenten der Kurve (x_1, y_1, z_1) die entsprechenden Werte r auf und lege durch die so erhaltenen Punkte (P) Ebenen, die zu den Tangenten senkrecht sind. Diese Ebenen umhüllen eine Abwickelbare (A), deren Erzeugende den Erzeugenden der ursprünglich gegebenen Abwickelbaren parallel liegen. Jene Grösse ist der senkrechte Abstand des Punktes (P) von der ihm entsprechenden Erzeugenden der Fläche (A)[267].

30. Methode von Ribaucour. Einen weiteren wesentlichen Beitrag zur Theorie der Minimalflächen stellt die Preisarbeit von *A. Ribaucour* aus dem Jahre 1880 dar[268]). Hier wird, wie in den Untersuchungen von *Lie*, die sogenannte imaginäre Geometrie in ausgedehnter Weise benutzt, aber zudem die Theorie der Strahlensysteme (III C 9; III D 6a, Nr. **13**; III D 9) mit der Lehre von den Minimalflächen in Verbindung gebracht. *Ribaucour* gibt zunächst einen Satz über das *harmonische* Strahlensystem, dessen Geraden je zwei solche Punkte zweier Minimalflächen treffen, in denen die Tangentialebenen der Flächen parallel sind. Teilt man die zwischen beiden Flächen liegenden Strecken auf diesen Geraden sämtlich in demselben Verhältnis, so erhält man wiederum eine Minimalfläche[269]). Sodann werden die Beziehungen der Minimalflächen zu den *isotropen* Strahlensystemen dargethan. Auf letztere kommt *Ribaucour* folgendermassen. Man beziehe irgendwie die Punkte (A) einer Fläche auf die Punkte (B) einer zweiten Fläche, sodass einem (A) nur ein (B) entspricht, und lege dann durch die Punkte A, B gerade Linien. In dem erhaltenen Strahlensystem ent-

267) *„Darboux"* 1, p. 415.

268) Étude des élassoides, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1880).

269) Über das betreffende Strahlensystem für zwei adjungierte Minimalflächen vgl. *R. v. Lilienthal,* Untersuchungen zur allgem. Theorie der krummen Oberfl. u. geradl. Strahlensysteme, Bonn 1886, p. 88.

spricht jeder Kurve auf der ersten Fläche eine geradlinige Fläche, *Elementarfläche.* Man kann nun eine durch (A) gehende Kurve (C) auf der ersten Fläche aufsuchen derart, dass die Tangentialebenen der entsprechenden Elementarfläche in den Punkten (A) und (B) zu einander senkrecht sind. Im allgemeinen finden sich auf der ersten Fläche zwei Scharen von Kurven (C). Es können aber auch unendlich viele solcher Scharen vorhanden sein. Liegt dann nicht ein Normalensystem vor, so heisst das betreffende Strahlensystem *isotrop.* Es hat die kennzeichnende Eigenschaft, dass die kürzesten Abstände eines Strahls von seinen benachbarten Strahlen sämtlich durch denselben Punkt, den *Mittelpunkt* des Strahls, gehen, sodass die Gleichung zur Bestimmung der Grenzpunkte der kürzesten Abstände illusorisch wird. Ferner werden die Brennflächen von zwei konjugierten, *isotropen,* d. h. den unendlich fernen imaginären Kugelkreis enthaltenden Abwickelbaren gebildet. Es besteht nun der Satz: Legt man durch die Mittelpunkte der Strahlen zu den Strahlen senkrechte Ebenen, so umhüllen sie stets eine Minimalfläche[270]). — Die isotropen Strahlensysteme hängen innig mit den isothermen Kurvenscharen auf der Einheitskugel zusammen. Hat man nämlich das Quadrat des Linienelements der letzteren auf die Form gebracht: $\lambda^2(du^2 + dv^2)$, so fasse man eine Schar der Parameterlinien ins Auge und trage auf den Tangenten der Einzelkurven vom Berührungspunkte aus die Strecke λ auf. Durch die so erhaltenen Punkte lege man Gerade, die denjenigen Kugelradien parallel sind, welche in den entsprechenden Berührungspunkten enden. Es ergibt sich ein isotropes Strahlensystem. Ebenso erzeugt eine Gerade ein solches System, wenn die Endpunkte einer in ihr gelegenen Strecke von unveränderlicher Länge zwei auf einander abwickelbare Flächen beschreiben. Verschiebt man ein isotropes Strahlensystem parallel zu sich selbst und nimmt mit jedem Strahl in der neuen Lage eine Drehung von der Grösse $\frac{\pi}{2}$ um den entsprechenden Strahl in der ursprünglichen Lage vor, so entsteht ein neues isotropes System, dessen Mittelebenen dieselbe Fläche umhüllen, wie die des alten Systems. Die beiden Brennflächen eines isotropen Systems schneiden sich in einer reellen Kurve. Die zugehörige Minimalfläche berührt den Ort der Krümmungsachsen der letzteren längs der Kurve der Mittelpunkte ihrer ersten Krümmung. Ersetzt man in der obigen Konstruktion die isotherme Schar durch sämtliche Scharen ihrer isogonalen Trajektorien, so ergeben sich iso-

270) „*Bianchi*" p. 273. Vgl. *Darboux,* Paris, C. R. 104 (1887), p. 728; „*Darboux*" 1, p. 419. *J. Weingarten,* Gött. Nachr. 1890, p. 320.

trope Strahlensysteme, welche die assoziierten Flächen der der ursprünglichen Schar entsprechenden Minimalfläche liefern, und im besonderen entspricht der Schar der orthogonalen Trajektorien die adjungierte Fläche. *Ribaucour* legt auch die Transformationen dar, denen ein isotropes System mit der zugehörigen Minimalfläche (S) unterworfen werden muss, damit man zu solchen Systemen gelange, die die zu (S) associierten Flächen liefern.

31. Sätze von Schwarz, Weingarten, Dini.

1) Bezieht man mehrere Flächen (x_ν, y_ν, z_ν) so auf einander, dass in entsprechenden Punkten die Normalen der Flächen parallel sind, so nennt man, wenn die Grössen m_ν als konstant angesehen werden, die Ausdrücke

$$x = \sum m_\nu x_\nu, \qquad y = \sum m_\nu y_\nu, \qquad z = \sum m_\nu z_\nu$$

die Koordinaten der aus den gegebenen *zusammengesetzten Fläche.* Ihre Normale ist parallel der Normalenrichtung in den entsprechenden Punkten der Flächen (x_ν, y_ν, z_ν). Für die Minimalflächen besteht der Satz, dass jede aus lauter Minimalflächen zusammengesetzte Fläche wieder eine Minimalfläche ist[271]).

2) Bestimmt man die Punkte einer Minimalfläche durch ihren Abstand q vom Koordinatenanfangspunkt und durch den senkrechten Abstand p der zugehörigen Tangentialebenen von demselben Punkt — wobei, falls man das Katenoid nimmt, der Koordinatenanfangspunkt nicht auf der Rotationsachse liegen darf — und bezeichnet man mit X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche, so sind die Ausdrücke[272]):

$$x\,dp + qX dq, \quad y\,dp + qY dq, \quad z\,dp + qZ dq$$

exakte Differentiale. Ihre Integrale ξ, η, ζ sind die Koordinaten einer Fläche, bei der das Quadrat des Linienelements durch die Gleichung:

$$ds^2 = \left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

dargestellt werden kann, also die *Liouville*'sche Form besitzt (III D 3, Nr. 18). Umgekehrt ist jede Fläche mit diesem Linienelement auf die geschilderte Art aus einer Minimalfläche ableitbar.

3) Wenn zwischen den ersten partiellen Ableitungen einer Potentialfunktion (II A 7 b, Nr. 1) eine nicht lineare Gleichung besteht, so kann man diese Ableitungen als die Koordinaten der Punkte einer

271) *H. A. Schwarz,* Abhandl. 1, p. 174.
272) *J. Weingarten,* Gött. Nachr. 1887, p. 28.

Fläche auffassen. *J. Weingarten* zeigte in einer Untersuchung über gewisse Flüssigkeitsbewegungen (IV 16, Nr. 1f., Anm. 50), dass die fragliche Fläche stets eine Minimalfläche ist[272a]).

4) Die Flächen mit der Eigenschaft $R_1 + R_2 = \text{const.}$ $(\gtrless 0)$, d. h. die Parallelflächen der Minimalflächen, wurden von *Dini* mit Benutzung der *Bonnet*'schen Veränderlichen (III D 3, Nr. 7) untersucht und die hierhergehörenden Schraubenflächen bestimmt[273]).

5) *Dini*[274]) betrachtete die Eigenschaften eines Flächenpaares mit den Gleichungen:

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y),$$

wenn:

$$z_1 + iz_2 = f(x + iy).$$

Allgemeiner kann man nach den Eigenschaften zweier Flächen fragen[275]), bei denen die Koordinaten der einen die reellen, die Koordinaten der anderen die durch i dividierten imaginären Teile dreier analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind. In entsprechenden Punkten sind die Normalen parallel, die Krümmungsmasse gleich und stets negativ; entsprechende Stücke haben denselben Flächeninhalt, und die Winkel der Parameterlinien in entsprechenden Punkten sind supplementär.

VII. Flächen von konstanter Krümmung.

32. Untersuchungen von Minding, Dini, Enneper, Beltrami, Hilbert. Die Flächen, deren *Gauss*'sches Krümmungsmass (III D 1, 2, Nr. 36; III D 3, Nrr. 7, 33) konstant ist, pflegt man *Flächen von konstanter Krümmung* zu nennen[276]). Die ersten Untersuchungen über sie rühren von *F. Minding* her. Er fand[277]), dass die orthogonalen Trajektorien der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien einer solchen Fläche geodätische Kreise, also Kurven mit konstanter geodätischer Krümmung sind (III D 3, Nr. 38). Man kann diesen Satz leicht zu dem umkehrbaren Satze ergänzen, dass auf einer Fläche von konstanter Krümmung die orthogonalen Trajektorien einer Schar von solchen geodätischen Linien, die einen geodätischen Kreis senkrecht schneiden,

---

272a) ibid. 1890, p. 318; vgl. *G. Frobenius,* ibid. 1891, p. 323.

273) Ann. di mat. 7 (1865), p. 5.

274) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

275) *R. v. Lilienthal,* J. f. Math. 98 (1885), p. 131.

276) Die Litteratur über die fraglichen Flächen bis 1896 findet sich angeführt in der Dissertation von *F. Busse,* Göttingen 1896. Vgl. auch III D 6 a, Nrr. 28—30.

277) J. f. Math. 6 (1830), p. 161.

sämtlich geodätische Kreise sind und eine Isothermenschar (III D 3, Nr. 19) bilden[278]). *Minding* zeigte ausserdem, dass alle Flächen mit demselben konstanten Krümmungsmass auf einander und auf sich selbst abwickelbar sind[279]), ferner, dass für ein geodätisches Dreieck auf einer Fläche von positiver konstanter Krümmung die Formeln der sphärischen Trigonometrie gelten, und für eine Fläche von negativer konstanter Krümmung ähnliche Formeln, in denen an die Stelle trigonometrischer Funktionen hyperbolische treten[280]). Endlich verdankt man *Minding* die erste Auffindung von Flächen konstanter Krümmung, die weder abwickelbar noch sphärisch sind, nämlich die Bestimmung der hierher gehörenden Schraubenflächen[281]). *Minding* transformiert die Differentialgleichung der Flächen mit dem konstanten Krümmungsmass $\varkappa$, nämlich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2=\varkappa\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

durch die Substitution $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ und betrachtet nun $\frac{\partial z}{\partial \psi}$ als konstant und gleich h. Dann ergibt sich:

$$dz = h\,d\psi + \sqrt{\frac{1}{a^2 - r^2\varkappa} - 1 - \frac{h^2}{r^2}}\,dr,$$

wo a eine Integrationskonstante bedeutet. Unabhängig von *Minding* fand *U. Dini* die Schraubenflächen von konstanter negativer Krümmung und zeigte, dass sich unter ihnen eine befindet, deren Profil eine *Tractrix* (III D 4, Nr. 27) (siehe Nr. 33) ist[282]); er behandelte ferner eingehend die Rotationsflächen von konstanter Krümmung[283]). Die Flächen mit konstanter Krümmung und ebenen Krümmungslinien berechnete *Enneper*[284]). Die hierher gehörenden Flächen mit positivem

---

278) „*Darboux*“, 3, p. 388; „*Bianchi*“, p. 426.

279) J. f. Math. 19 (1839), p. 378; *J. Liouville,* Note IV zu *G. Monge,* Applic., Paris (1850), p. 598; *D. Codazzi,* Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 346; *Beltrami,* Giorn. di mat. 6 (1868), p. 311.

280) J. f. Math. 20 (1840), p. 324; *Codazzi,* a. a. O. p. 353; „*Bianchi*“, p. 431; *v. Escherich*, Wien. Berichte (69) 2 (1874), p. 497. Vgl. *C. F. Gauss,* Werke 8, p. 264.

281) J. f. Math. 19 (1839), p. 376.

282) Paris, C. R. 60 (1865), p. 340; Ann. di mat. 7 (1865), p. 28; Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869—70), p. 43; „*Bianchi*“, p. 468; *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *P. Vogel,* Nr. 211.

283) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 241.

284) Gött. Nachr. 1868, p. 258; 1876, p. 599; vgl. „*Bianchi*“, p. 470; „*Darboux*“ 3, p. 447; *M. Schilling,* Halle a/S., Modelle von *Th. Kuen,* Nr. 206, 207; *Bianchi,* Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 202; *Th. Kuen,* Münch. Ber. 14 (1884), p. 194.

Krümmungsmass wurden von *A. Bockholt*[285]), die mit negativem Krümmungsmass von *E. Lenz*[286]) eingehend untersucht. Es gilt hier der *Enneper*'sche Satz, dass die Ebenen der Krümmungslinien alle durch eine Gerade gehen, während die Krümmungslinien der anderen Schar auf Kugeln liegen, die die Fläche senkrecht schneiden, und deren Mittelpunkte sich auf jener Geraden befinden[287]). Die Flächen von konstanter Krümmung mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien behandelte *Enneper* ebenfalls a. a. O., und später *H. Dobriner*[288]). Hier liegen die Mittelpunkte der Trägerkugeln auf einer Geraden. — Einen Zusammenhang zwischen den Umdrehungsflächen mit positivem und denen mit negativem konstantem Krümmungsmass zeigte *Beltrami*[289]) auf Grund des folgenden Satzes: Erteilt man einer Rotationsfläche alle Translationen längs der Rotationsachse und betrachtet eine die sämtlichen Einzelflächen (A) der so erhaltenen Schar senkrecht schneidende Rotationsfläche (B), so fällt jeder Parallelkreis der letzteren mit je einem Parallelkreis auf einer Fläche (A) zusammen, und längs dieses Kreises ist das Krümmungsmass der Fläche (B) gleich dem mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Krümmungsmass der Fläche (A). Besitzt also die letztere Fläche das konstante Krümmungsmass $\varkappa$, so besitzt jede Fläche (B) das konstante Krümmungsmass $-\varkappa$. Ist (A) eine Kugel, so wird (B) die Rotationsfläche der *Tractrix*.

Hinsichtlich der Flächen von konstantem positivem Krümmungsmass mit Ausnahme der Kugel erwähnen wir den *D. Hilbert*'schen Satz[289a]), nach welchem, wenn man die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche für die Punkte im Innern und auf der Begrenzung eines singuläritenfreien, regulären Bereichs betrachtet, für keinen Punkt im Innern des Bereichs ein Maximum des einen oder ein Minimum des anderen Halbmessers erreicht wird.

33. Die Rotationsflächen von konstanter Krümmung und Linienelemente der pseudosphärischen Flächen. Zu den Rotationsflächen von konstanter Krümmung gelangt man auf verschiedenen Wegen. Man kann die ebenen Kurven aufsuchen, bei denen das Produkt aus dem zu einem beliebigen Kurvenpunkt (P) gehörenden Krümmungshalbmesser und der auf der Kurvennormalen gemessenen

285) Gött. Diss. 1878. 286) Gött. Diss. 1879.

287) „*Darboux*", 3, p. 457. 288) Acta math. 9 (1886), p. 73.

289) Ann. di mat. 6 (1864), p. 272. Vgl. *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 123.

289a) Amer. Math. Soc. Transact. 2 (1901), p. 97.

Entfernung des Punktes (P) von einer festen Geraden einen konstanten Wert besitzt (III D 4, Nr. 27). Dieser Weg wurde von *U. Dini* in der unter [283]) zitierten Arbeit eingeschlagen[290]). Ferner kann man, von dem *Gauss*'schen Ausdruck für das Krümmungsmass einer Fläche ausgehend, eine Form des Linienelementes unserer Flächen aufsuchen und nun die Rotationsflächen mit demselben Linienelement bestimmen. Diesen Weg benutzten *J. Liouville*[291]), *D. Codazzi*[291a]), *E. Bour*[291b]). Die Meridiankurve der fraglichen Rotationsflächen ergibt sich aus dem oben angeführten *Minding*'schen Ausdruck für $h = 0$. Zu einem Wert von $\varkappa$ gehören, den verschiedenen Werten von a entsprechend, unendlich viele Rotationsflächen, und je nach der Art des auftretenden elliptischen Integrals ergeben sich bei veränderlichem $\varkappa$ im Ganzen sechs Typen von Flächen. Für ein positives $\varkappa$ findet man ausser der Kugel den sogenannten *Spindeltypus*[292]), bei dem die Meridiankurve die Rotationsachse schneidet, und den *Wulsttypus*[292a]), bei dem jene Kurve die Rotationsachse nicht schneidet. Für ein negatives $\varkappa$ ergibt sich zunächst die *Pseudosphäre,* auch *pseudosphärische Rotationsfläche vom parabolischen Typus* genannt[293]). Sie entsteht durch Umdrehung der *Tractrix* genannten Kurve um ihre Asymptote. Diese Kurve hat die Eigenschaft, dass auf jeder ihrer Tangenten das zwischen dem Berührungspunkt und der Asymptote gelegene Stück konstant ist. Versteht man unter φ den Winkel der Tangente der Tractrix mit der Asymptote, so wird die Pseudosphäre, falls wir die Asymptote zur z-Achse wählen und die Halbmesser der Parallelkreise mit r bezeichnen, durch die Gleichungen gegeben:

$$r = R \sin \varphi, \quad z = R \left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi\right).$$

Ausser der Pseudosphäre tritt hier noch die Rotationsfläche vom *elliptischen*[293a]) und die vom *hyperbolischen* Typus[293b]) auf.

290) Vgl. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 98; Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 123.

291) Fünfte Auflage von *G. Monge,* Applic., p. 597, Note 4.

291a) Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 346.

291b) J. éc. polyt. 22 (1862), p. 85.

292) *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *P. Vogel,* Nr. 200.

292a) ibid. Modell von *P. Vogel,* Nr. 201.

293) Ausführliche Behandlung der Traktrix und ihrer Rotationsfläche bei *E. Beltrami,* Ann. di mat. 6 (1864), p. 273; Giorn. di mat. 10 (1872), p. 147; vgl. „*Darboux*" 3, p. 394; „*Bianchi*", p. 191; *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *J. Bacharach,* Nr. 208; *G. Loria,* das unter 178) zitierte Werk, p. 562 (III D 4, Nr. 27).

293a) „*Bianchi*", p. 192; *M. Schilling,* Halle a. S., Modell von *J. Bacharach,* Nr. 208.

293b) „*Bianchi*", p. 193; *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *W. Dyck,* Nr. 209.

Hinsichtlich der Linienelemente[294]) der pseudosphärischen Flächen mit dem Krümmungsmass $\frac{-1}{R^2}$ erwähnen wir zunächst den *hyperbolischen* Typus. Betrachtet man auf einer der fraglichen Flächen eine Schar geodätischer Linien, die eine geodätische Linie (L) senkrecht schneiden, und nennt v die Bogenlänge von (L) und u die von (L) aus gerechnete Bogenlänge jener geodätischen Linien, so ergibt sich:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \text{hyp.} \frac{u}{R} dv^2.$$

Wählt man als Parameterlinien die von einem Punkt (P) ausgehenden geodätischen Linien nebst ihren orthogonalen Trajektorien und bezeichnet mit u die von (P) aus gerechnete Bogenlänge der Geodätischen, mit v den Winkel, den ihre Tangenten in (P) mit einer festen, durch (P) gehenden Flächentangente bilden, so erhält man das Linienelement vom *elliptischen* Typus mit der Gleichung:

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \text{hyp.} \frac{u}{R} dv^2.$$

Nimmt man endlich zu Parameterlinien die, eine Kurve mit der konstanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{R}$ senkrecht schneidenden, geodätischen Linien samt ihren orthogonalen Trajektorien, so ergibt sich bei entsprechender Bezeichnung wie im ersten Fall der *parabolische* Typus mit der Gleichung:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Die aufgestellten Formen des Linienelements geben Aufschluss über die geodätische Krümmung der in diesen drei Fällen auftretenden Kurven $u = \text{const.}$ Die fragliche Krümmung — absolut genommen — ist im hyperbolischen Fall stets kleiner als $\frac{1}{R}$, die entsprechenden Kurven nennt man geodätische Kreise *mit imaginären Mittelpunkten.* Im elliptischen Fall ist die fragliche Krümmung stets grösser als $\frac{1}{R}$. Man spricht hier von geodätischen Kreisen *mit im Endlichen liegenden Mittelpunkten.* Im parabolischen Fall wird die fragliche Krümmung gleich $\frac{1}{R}$. Die entsprechenden Kurven heissen hier *Grenzkreise* oder auch geodätische Kreise *mit unendlich fernen Mittelpunkten.*

Für eine Fläche von konstanter Krümmung und nur für eine solche lassen sich die Parameter so wählen, dass die endliche Gleichung der geodätischen Kreise die Form: $(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^2$ erhält[294a]).

294) „*Bianchi*", p. 187, 189.

294a) *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 9 (1884), p. 40; *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 149.

34. Die geodätischen Linien auf den Flächen konstanter Krümmung. Die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien einer Fläche von konstanter Krümmung wurde von *J. Weingarten* auf die Auffindung einer Funktion zurückgeführt, die einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer mit ihr verträglichen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt[295]). *Beltrami* zeigte[296]), dass die Flächen von konstanter Krümmung die einzigen Flächen sind, auf denen sich die Parameterlinien so wählen lassen, dass die endliche Gleichung der geodätischen Linien die Form $mu + nv + l = 0$ erhält, wo die Grössen m, n, l willkürliche Konstanten sind, d. h. mit anderen Worten: nur für die Flächen von konstanter Krümmung gibt es eine solche Abbildung auf eine Ebene, bei der die geodätischen Linien durch gerade Linien abgebildet werden (III D 6 a, Nr. 9).

Die Bestimmung der geodätischen Linien einer pseudosphärischen Fläche, für die das Quadrat des Linienelements bereits auf die Form $du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2$ gebracht ist, führt auf eine lineare Differentialgleichung und ergibt[297]):

$$v = R\sqrt{c - e^{-\frac{2u}{R}}} + c'.$$

Um aber das Quadrat des Linienelements auf die fragliche Form zu bringen, hat man eine totale[297a]) *Riccati*'sche Gleichung zu integrieren[298]). Es ist daher auf einfach unendlich viele Arten möglich, jene Form herzustellen, und zwar werden diese Arten aus einer einzigen, bekannten, durch die Substitution bestimmt[299]):

$$v' = \frac{\left(\frac{v}{R} - a\right)R}{\left(\frac{v}{R} - a\right)^2 + e^{-\frac{2u}{R}}}, \quad e^{-\frac{u'}{R}} = \frac{e^{-\frac{u}{R}}}{\left(\frac{v}{R} - a\right)^2 + e^{-\frac{2u}{R}}},$$

wo a eine willkürliche Konstante ist.

---

295) J. f. Math. 94 (1883), p. 181; 95 (1883), p. 325. In der ersten dieser Arbeiten wird gezeigt, dass das Quadrat des Linienelements einer Fläche mit dem konstanten Krümmungsmass k auf die Form $\frac{du\,dv}{\left(\frac{k}{4} + uv\right)^2}$ gebracht werden kann, die ihrerseits eine lineare, gebrochene Transformation in sich selbst zulässt.

296) Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 185. Vgl. *R. Liouville,* Amer. J. of math. 10 (1888), p. 283; „*Darboux*" 3, p. 41.

297) „*Bianchi*", p. 419.

297a) *G. Scheffers,* das unter 253) zitierte Werk, p. 330.

298) *A. Bäcklund,* Lunds Universitets Årsskrift 19 (1882—83), p. 26; „*Bianchi*", p. 438; „*Darboux*" 3, p. 222.

299) „*Darboux*" 3, p. 413.

Die endliche Gleichung der geodätischen Linien der weiter unten erwähnten *Bianchi*'schen Ergänzungsfläche der Pseudosphäre hat *A. Wangerin* gefunden[299a]).

Hinsichtlich der geodätischen Linien einer pseudosphärischen Fläche ist ferner zu erwähnen eine Untersuchung von *Beltrami*[300]), die auf der vorhin erwähnten Abbildung der geodätischen Linien durch gerade Linien beruht. Betrachtet man auf einer pseudosphärischen Fläche eine geodätische Linie (L) und einen Punkt (P), so gehen durch (P) gerade zwei geodätische Linien g_1 und g_2, deren Schnittpunkte mit (L) als unendlich fern betrachtet werden müssen. Zieht man jetzt auf der Fläche durch (P) eine geodätische Linie g_3, die (L) senkrecht schneidet, so bilden in (P) die Linien g_1 und g_2 mit g_3 denselben Winkel α, den man den *Parallelitätswinkel* nennt. Je nachdem eine von (P) ausgehende geodätische Linie mit g_3 einen Winkel bildet, der kleiner oder grösser als α ist, schneidet sie die Linie (L) oder sie schneidet (L) nicht. Dabei ist die Bogenlänge δ der Linie g_3, von (P) bis zu (L) gerechnet, mit dem Winkel α durch die Beziehung verbunden[301]):

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{\delta}{R}}.$$

Die Tangenten jeder der oben (Nr. **33**) betrachteten Scharen von geodätischen Linien einer pseudosphärischen Fläche müssen das Normalensystem einer W-Fläche (Nr. **17**) bilden, weil sie bei der Abwicklung der Fläche auf eine Rotationsfläche in die Meridiane der letzteren übergehen (III D 6 a, Nr. **31**). *Beltrami* bestimmte die Beziehungen, welche in jedem Fall zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 der W-Fläche bestehen[302]). Für die Flächen mit dem positiven Krümmungsmass $\frac{1}{R^2}$ ergibt sich:

$$R_1 - R_2 = R \operatorname{tg}\left(c - \frac{R_1}{R}\right),$$

wo c eine Konstante bedeutet. Für die pseudosphärischen Flächen folgt im parabolischen Fall:

$$R_1 - R_2 = R,$$

im elliptischen:

$$R_1 - R_2 = R \operatorname{tg\,hyp.} \frac{R_1 + c}{R},$$

im hyperbolischen:

$$R_1 - R_2 = R \operatorname{cotg\,hyp.} \frac{R_1 + c}{R}.$$

299a) Festschrift, Halle a/S. 1894, p. 200.

300) Giorn. di mat. 6 (1868), p. 284. 301) „*Bianchi*“, p. 428.

302) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 34.

Die Fläche konstanter Krümmung ist hier jedesmal die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche der W-Fläche. Die jedesmal auftretende zweite Schale — *Ergänzungsfläche* — wurde für die pseudosphärischen Flächen von *Bianchi* betrachtet[303]). Hier findet sich, dass die Ergänzungsfläche jedesmal auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Im parabolischen Fall ist diese Rotationsfläche die Umdrehungsfläche der Tractrix. Im elliptischen bez. hyperbolischen Fall wird die Meridiankurve durch die Gleichungen:

$$r = \frac{R}{\sqrt{R^2\varkappa^2+1}} \sin\psi, \quad z = R\left(\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right),$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{1-R^2\varkappa^2}} \sin\psi, \quad z = R\left(\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right)$$

dargestellt, wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Man nennt diese Meridiankurve die *verkürzte* oder *verlängerte* Traktrix.

35. Transformationen und Haupttangentenkurven der Flächen konstanter Krümmung. Die Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung zu integrieren, ist noch nicht gelungen[304]). Doch lässt sich zeigen, dass eine solche Fläche durch die Forderung bestimmt ist, dass eine gegebene Kurve auf ihr liegen, und die Fläche längs derselben eine vorgeschriebene Tangentialebene besitzen soll, die aber nicht mit der Schmiegungsebene der Kurve zusammenfallen darf. Soll aber eine gegebene Kurve Haupttangentenkurve einer pseudosphärischen Fläche sein, so muss sie eine konstante zweite Krümmung besitzen. Hier findet sich, dass eine Fläche mit dem Krümmungsmass $\frac{-1}{R^2}$ eindeutig bestimmt ist, wenn zwei von demselben Punkt ausgehende Kurven, die 1) die konstanten Torsionen $\frac{1}{R}$ und $-\frac{1}{R}$ besitzen und 2) in jenem Punkte dieselbe Schmiegungsebene, aber verschiedene Tangenten besitzen, die Haupttangentenkurven der Fläche sein sollen[305]). — Angesichts der Schwierigkeiten, die sich der Auffindung des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung unserer Flächen entgegenstellen, hat man mit Erfolg versucht, Methoden zu entwickeln, mit Hülfe derer man aus einer gegebenen Fläche konstanter Krümmung andere derartige ableiten kann, und zwar haben sich bis vor kurzem mit einer Ausnahme diese Transformations-

303) Math. Ann. 16 (1880), p. 577; „*Bianchi*", p. 253. Vgl. *G. Bolke,* Inaug.-Dissert. Halle a/S. 1901.

304) Vgl. *J. A. Serret,* J. de Math. (1) 13 (1848), p. 361; *O. Bonnet,* J. de math. (2) 5 (1860), p. 256; *J. Weingarten,* J. f. Math. 62 (1863), p. 172; *C. Guichard,* Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 233; *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 5 (1881), p. 518.

305) *Bianchi,* Roma Linc. Rend. (5) 3 (1894), p. 143; „*Bianchi*", p. 446.

methoden ausschliesslich auf pseudophärische Flächen bezogen. Wir erwähnen zunächst einen Satz von *A. Ribaucour*[306]). Beschreibt man in den Tangentialebenen einer Fläche, deren Krümmungsmass den konstanten Wert $\frac{-1}{R^2}$ besitzt, um die Berührungspunkte Kreise mit dem Halbmesser R, so sind sie die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar, die einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört und in der jede Einzelfläche wieder das konstante Krümmungsmass $-\frac{1}{R^2}$ besitzt (III D 6 a, Nr. 29). Eine nicht wesentlich von dieser Transformation verschiedene Transformation liefert der *Bianchi*'sche Satz[307]): Ist das Quadrat des Linienelements einer pseudosphärischen Fläche (x, y, z) mit dem Krümmungsmass $\frac{-1}{R^2}$ auf die Form gebracht: $du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2$, so sind:

$$x' = x - R\frac{\partial x}{\partial u}, \quad y' = y - R\frac{\partial y}{\partial u}, \quad z' = z - R\frac{\partial z}{\partial u}$$

die Koordinaten der Punkte einer pseudosphärischen Fläche mit demselben Krümmungsmass. So gehört zu jeder pseudosphärischen Fläche eine einfach unendliche Anzahl solcher abgeleiteter Flächen; ihre orthogonalen Trajektorien sind die im *Ribaucour*'schen Satze auftretenden Kreise. *Lie* bemerkte, dass man auf den abgeleiteten Flächen die geodätischen Linien durch Quadraturen bestimmen kann, falls man diese Linien auf der ursprünglichen Fläche kennt[308]). Diese Quadraturen sind ausführlich untersucht von *Darboux*[309]). — Eine weitere Transformation rührt von *A. Bäcklund* her[310]). Sie wurde zuerst in der folgenden, rein analytischen Form veröffentlicht. Sind x, y, z die Koordinaten einer Fläche, ist ausserdem $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ und beziehen sich die entsprechenden mit einem Strich versehenen Buchstaben auf eine zweite Fläche, so sei:

$$(x' - x)p + (y' - y)q - (z' - z) = 0,$$
$$(x' - x)p' + (y' - y)q' - (z' - z) = 0,$$
$$1 + pp' + qq' - K\sqrt{1 + p^2 + q^2}\sqrt{1 + p'^2 + q'^2} = 0,$$
$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 - a^2 = 0,$$

306) Paris, C. R. 70 (1870), p. 330; *„Darboux"*, 3, p. 426.

307) Giorn. di mat. 17 (1879), p. 39; Math. Ann. 16 (1880), p. 577. Über die *Bianchi*'sche Transformation vgl. die Arbeiten von *S. Lie,* Archiv Math. og Naturv. 4 (1879), p. 507; 5 (1881), p. 282, 350.

308) Bull. sci. math. (2) 4 (1880), p. 302; Arch. Math. og Naturv. 5 (1881), p. 518.

309) Paris, C. R. 97 (1883), p. 848, 892, 946; auch Ann. éc. norm. 3 (7) (1890), p. 9; *„Darboux"*, 3, p. 422.

310) Lunds Universitets Årsskrift 19 (1882—83), p. 7. Vgl. hierzu *„Darboux"* 3,

wo a und K Konstante bedeuten. Diese Transformation führt eine Fläche mit dem Krümmungsmass $\frac{-1+K^2}{a^2}$ in eine einfach unendliche Anzahl von Flächen mit demselben Krümmungsmass über und fällt für $K=0$ mit der *Bianchi*'schen Transformation zusammen. Ausserdem führt sie Krümmungslinien und Haupttangentenkurven in ebensolche über und die letzteren so, dass die Länge des transformierten Kurvenbogens gleich der des ursprünglichen ist. Der geometrische Inhalt des *Bäcklund*'schen Satzes besteht darin, dass die beiden Schalen der Brennfläche eines Strahlensystems, in dem sowohl die Entfernung der Brennpunkte auf jedem Strahl, als der Winkel zwischen den beiden durch einen Strahl gehenden Brennebenen konstant ist, pseudosphärische Flächen mit demselben Krümmungsmass sind[311]). Man nennt derartige Strahlensysteme *„pseudosphärische"* Strahlensysteme[312]).

Bei der geometrischen Formulierung der *Bäcklund*'schen Transformation spielen die Eigenschaften der Haupttangentenkurven einer pseudosphärischen Fläche eine wesentliche Rolle[313]). *Dini*[314]) und *Enneper*[315]) zeigten, dass das Quadrat des Linienelementes einer solchen Fläche für die Haupttangentenkurven als Parameterlinien die Form erhält:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

wo ω der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \sin\omega.$$

In einem krummlinigen, auf der Fläche gezeichneten Viereck, dessen Seiten Haupttangentenkurven sind, haben demnach die gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen und der Flächeninhalt des Vierecks ist gleich der Summe seiner Winkel vermindert um 2π. *D. Hilbert*[315a]) folgerte aus der letzten Gleichung, dass es eine singularitätenfreie und überall regulär analytische pseudosphärische Fläche nicht gibt; *G. Lütkemeyer*, dass eine pseudosphärische Fläche nicht analytisch zu sein braucht[315b]).

chap. 12, und über die im Text nicht erwähnte *Lie*'sche Transformation *„Darboux"* 3, p. 381; *„Bianchi"*, p. 459 (III D 6 a, Nr. 29).

311) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 250; *E. Genty*, Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 106.

312) *„Bianchi"*, p. 282. 313) *„Bianchi"*, p. 129.

314) Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 184.

315) Gött. Nachr. 1870, p. 496. Vgl. *S. Lie*, Arch. Math. og Naturv. 4 (1879), p. 345.

315a) Amer. Math. Soc. Transact. 2 (1901), p. 87 (III D 6 a, Nr. 14).

315b) Inaug.-Dissert. Göttingen 1902; ibid. p. 18 der Nachweis, dass eine Fläche von positiver konstanter Krümmung stets analytisch ist.

Nimmt man auf der Einheitskugel die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven zu Parameterlinien (III D 6 a, Nr. **33**), so wird das Quadrat des Linienelements der Kugel durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{1}{R^2}(du^2 - 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2),$$

sodass die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven dieselben Eigenschaften haben, wie die Kurven selbst. *S. Lie* zeigte[316]), dass die Haupttangentenkurven einer pseudosphärischen Fläche sich durch Quadraturen bestimmen lassen. — Betrachtet man das Tangentensystem einer Kurvenschar auf einer pseudosphärischen Fläche, in dem der Winkel jeder Tangente mit der durch den Berührungspunkt gehenden, zu R_1 gehörenden, Krümmungslinie mit ω_1 bezeichnet wird, und verlangt, dass es ein pseudosphärisches Strahlensystem mit der konstanten Entfernung $R\cos\sigma$ der Brennpunkte sei, so zeigt sich, dass $2\omega_1$ der Winkel der Haupttangenten auf der zweiten Schale der Brennfläche ist. Es genügt daher ω_1 derselben Differentialgleichung wie ω, wird aber durch eine *Riccati*'sche Gleichung bestimmt, sodass ω_1 ausser σ noch eine willkürliche Konstante enthält. *Bianchi*[317]) zeigte, dass, wenn man aus einer pseudosphärischen Fläche durch zwei zu den Konstanten σ_1 und σ_2 gehörende *Bäcklund*'sche Transformationen zwei neue pseudosphärische Flächen S_1 und S_2 herleitet, sich dieselbe Fläche ergibt, sei es, dass man mit S_1 die zu σ_2, oder mit S_2 die zu σ_1 gehörende Transformation ausführt. Kennt man sämtliche ∞^2 zu einer pseudosphärischen Fläche gehörenden *Bäcklund*'schen Transformationen, so erfordert die Bestimmung dieser Transformationen für die abgeleiteten Flächen nur Differentiationen und abgebraische Rechnungen, zudem lassen sich die Gleichungen der geodätischen Linien auf den abgeleiteten Flächen ohne Integration in endlicher Form angeben[318]).

Hinsichtlich der Flächen mit dem positiven Krümmungsmass $\frac{1}{R^2}$ bemerkt *O. Bonnet*[319]), dass zu jeder von ihnen zwei im Abstande $\pm R$ befindliche Parallelflächen gehören, deren mittlere Krümmung $\pm\frac{1}{R}$ ist. Umgekehrt besitzt jede Fläche von konstanter mittlerer Krümmung unter ihren Parallelflächen auch eine solche von konstanter positiver Krümmung (III D 6 a, Nr. **30**). Es lassen sich aber, wie *Bonnet*[320]) zeigte, die Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung so biegen, dass die Haupt-

316) Bull. sci. math. (2) 4 (1880), p. 304; Arch. Math. og Naturv. 4 (1879), p. 345.
317) Roma, Linc. Rend. (5) 1 (1892²), p. 3.
318) „*Bianchi*", p. 465.
319) Nouv. ann. (1) 2 (1853), p. 437.
320) J. éc. polyt. 25 (1867), p. 77; „*Darboux*" 3, p. 384.

krümmungsradien ungeändert bleiben. Damit ist eine Transformation der Flächen mit konstanter positiver Krümmung gegeben. — Eine zweite Transformation stellte *J. H. Hazzidakis* auf[321]). Bei ihr entsprechen den geodätischen Linien der ursprünglichen Fläche auf der transformierten Fläche Schattenlinien bei parallel einfallenden Lichtstrahlen (III A 6). — In neuester Zeit ist es auf Grund eines *Guichard'*schen[322]) Satzes gelungen, für unsere Flächen eine ähnliche Transformationstheorie zu entwickeln, wie sie für die pseudosphärischen Flächen besteht[323]). Man denke sich eine durch das Normalensystem einer Fläche (S) mit der konstanten Krümmung $\frac{1}{R^2}$ hindurchgelegte Fläche (Σ) und betrachte die Normalen als fest mit Σ verbunden, so dass sie bei einer Biegung von Σ ihre Lagen gegen die zugehörigen Flächenelemente nicht ändern. Es ist auf ∞^3 Arten möglich, die Fläche Σ so zu wählen, dass sie 1) auf ein verlängertes Rotationsellipsoid mit der grossen Achse $2R$, oder auf ein zweischaliges Rotationshyperboloid mit der Hauptachse $2R$ abwickelbar ist, und dass 2) jene Strahlen bei den Verbiegungen von Σ die Normalen einer Fläche von der Krümmung $\frac{1}{R^2}$ bleiben. Reflektiert man nun die Normalen von (S) an einer Fläche Σ und fasst auf den reflektierten Strahlen die Punkte (P) ins Auge, die hinsichtlich der Tangentialebenen von Σ symmetrisch zu den entsprechenden Punkten von (S) liegen, so bilden die Punkte (P) eine Fläche mit der Krümmung $\frac{1}{R^2}$, deren Normalen die reflektierten Strahlen sind.

VIII. Weitere besondere Flächen.

36. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Hauptkrümmungshalbmesser. a) Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung[324]). Die Krümmungslinien dieser Flächen sind isotherm[325]), ihre Minimalkurven lassen sich durch Quadraturen bestimmen[325a]). Die Meridiankurve der Rotationsflächen mit der konstanten mittleren Krümmung $\frac{1}{R}$ wird von einem Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel, deren grosse Achse bezw. Hauptachse gleich R ist, beschrieben, falls die betreffende

321) J. f. Math. 88 (1879), p. 68.

322) Paris, C. R. 128 (1899), p. 232.

323) *Bianchi,* Ann. di mat. (3a) 3 (1899), p. 185; „*Bianchi*“, p. 641. Vgl. *Darboux,* Ann. éc. norm. (3) 16 (1899), p. 465.

324) Vgl. *M. Chini,* Giorn. di mat. 27 (1889), p. 107.

325) *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 25 (1867), p. 77; „*Darboux*“, 2, p. 245; 3, p. 383.

325a) *S. Lie,* die unter 167) zitierten Arbeiten.

Kurve auf einer Geraden rollt ohne zu gleiten; diese Gerade ist zur Rotationsachse zu nehmen. Für $R = \infty$ hat man eine Parabel rollen zu lassen, wo dann ihr Brennpunkt eine Kettenlinie beschreibt[326]). Im Anschluss an diesen *Delaunay*'schen Satz zeigte *M. Sturm*[327]), dass sich dieselbe Meridiankurve ergibt, wenn man die Rotationsfläche aufsucht, die bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzt. *Darboux*[329]) gab den folgenden Satz: Wenn zwei im Abstand h von einander parallele Flächen die Strecken zwischen den Mittelpunkten ihrer Hauptnormalkrümmungen auf jeder Normale harmonisch teilen, so besitzen sie beide dieselbe konstante mittlere Krümmung $\frac{1}{h}$.

b) *Appell*'sche Flächen. *P. Appell*[329]) betrachtete die Flächen, bei denen die senkrechte Projektion eines festen Punktes auf jede Normale den Mittelpunkt der Strecke zwischen den Endpunkten der Hauptkrümmungshalbmesser trifft, d. h. der Abstand des festen Punktes von der Tangentialebene gleich $\frac{R_1 + R_2}{2}$ ist. Zu jeder Funktion einer komplexen Veränderlichen gehört eine derartige Fläche. Jedes unendlich dünne Normalenbündel einer solchen Fläche schneidet aus einer festen Kugel beim Eintritt und beim Austritt gleiche unendlich kleine Flächenteilchen aus. Fällt der feste Punkt mit dem Koordinatenanfangspunkt (O) zusammen, und ist (P) ein Punkt einer Minimalfläche, so konstruiere man eine Ebene (E), die parallel der in (P) berührenden Tangentialebene der Minimalfläche liegt, und deren Abstand von (O) gleich dem Abstand des Punktes (P) von der xy-Ebene ist. Durchläuft (P) die Minimalfläche, so werden die Ebenen (E) von einer *Appell*'schen Fläche eingehüllt. Auch die Beziehung dieser Flächen zu den von *Bonnet*[330]) aus einer Minimalfläche abgeleiteten, bei welchen die Mittelpunkte der Normalen in einer Ebene liegen, ist von *Appell* dargethan. *E. Goursat*[331]) und *E. Baroni*[332]) untersuchten die Flächen, bei denen der Abstand des festen Punktes von den Tangentialebenen proportional $\frac{R_1 + R_2}{2}$ ist.

---

326) *Ch. Delaunay*, J. de math. (1) 6 (1841), p. 309; Paris, C. R. 13 (1841), p. 84.

327) J. de math. (1) 6 (1841), p. 315; *M. Schilling*, Halle a/S., Modelle von *A. v. Braunmühl*, Nr. 217—220. Vgl. die Dissertationen von *G. Hormann*, Göttingen 1887 und *W. Howe*, Berlin 1887, wo sich auch weitere historische Angaben finden (III D 4, Nr. **11.**) 328) Ann. éc. norm. (3) 16 (1899), p. 467.

329) American Journ. of math. 10 (1888), p 175.

330) Paris, C. R. 42 (1856), p. 486; „*Darboux*" 1, p. 255.

331) American Journ. of math. 10 (1888), p. 187.

332) Giorn. di mat. 28 (1890), p. 349.

c) *Bianchi*'sche Flächen[333]). Sie sind gefunden auf Grund einer Methode, die *Weingarten* veröffentlicht hat[334]). Hier haben die Kugeln, welche über den Strecken zwischen den Endpunkten von R_1 und R_2 als Durchmesser beschrieben sind, die Eigenschaft entweder eine feste Kugel senkrecht zu schneiden (hyperbolischer Fall) oder eine feste Kugel in einem grössten Kreis zu schneiden (elliptischer Fall) oder durch einen festen Punkt zu gehen (parabolischer Fall). In den beiden letzten Fällen haben die Flächen mit den pseudosphärischen Flächen das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein; im hyperbolischen Fall ebenfalls da, wo die senkrechte Projektion des Mittelpunkts der festen Kugel auf die Normalen der Fläche zwischen die Endpunkte von R_1 und R_2 fällt, sonst hat die Fläche mit denen von konstanter positiver Krümmung das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein.

d) *De Montcheuil*[334a]) bestimmte die Flächen mit der Eigenschaft:

$$R_1 + R_2 = F(u) + F_1(u_1),$$

wo u und u_1 solche komplexe Parameter sind, mit Hülfe derer die Richtungskosinus der Flächennormalen die Formen erhalten:

$$X = \frac{u + u_1}{uu_1 + 1}, \quad Y = i\frac{u_1 - u}{uu_1 + 1}, \quad Z = \frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1}.$$

Gibt man der Gleichung der Tangentialebene die Form:

$$(u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + \xi = 0,$$

so genügt hier ξ der Bedingung:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0,$$

und für das Normalensystem der fraglichen Flächen lässt sich eine geometrische Erzeugungsart angeben.

37. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Krümmungslinien. a) Isotherme Flächen[334b]). Mit diesem Namen belegt man neuer-

333) Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 347.

334) Paris, C. R. 112 (1891), p. 607; 116 (1893), p. 493.

334a) Par. soc. math. Bull. 26 (1898), p. 103; 27 (1899), p. 114.

334b) Vgl. die Inaug.-Dissert. von *H. Willgrod,* Göttigen 1883, in der die isothermen *W*-Flächen bestimmt werden, und der Satz bewiesen wird, dass die Transformation mittelst reziproker radii vectores isotherme Flächen in ebensolche überführt. „*Darboux*" 2, chap. 11, wo gezeigt wird, dass die fünf pentasphärischen Koordinaten (III A 7) einer isothermen Fläche, als Funktionen der Parameter der Krümmungslinien betrachtet, einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit gleichen Invarianten (II A 5, Nr. 53) genügen. Vgl. ferner: *Lie-Scheffers,* Vorl. über Differentialgleichungen, Leipzig 1891, p. 178.

dings die Flächen mit isothermen Krümmungslinien. *Weingarten*[335]) sprach die Bedingung für die fragliche Eigenschaft einer Fläche so aus: Ist die Fläche durch eine Gleichung von der Form $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so muss der Ausdruck:

$$\frac{1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}\left\{\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial x} dX + \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial y} dY + \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial z} dZ - d\varrho_1\varrho_2\right\}$$

das Totaldifferential einer Funktion des Orts in der Fläche sein; sind aber die Koordinaten der Fläche als Funktionen der Parameter u und v der Krümmungslinien gegeben, so muss der Ausdruck:

$$d \log (\varrho_1 - \varrho_2)^2 + \frac{\partial \log G}{\partial u} dv + \frac{\partial \log E}{\partial v} dv$$

ein exaktes Differential sein. Andere Formen dieser Bedingung stellten *J. Knoblauch*[336]) und *G. Frobenius*[337]) auf. *Darboux*[338]) betrachtete isotherme Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien und fand, dass die Ebenen der letzteren einen Kegel umhüllen. Den Fall, dass der Kegel in einen Zylinder ausartet, untersuchte *P. Adam*[339]). Der fragliche Umstand findet bei den hierher gehörenden Flächen von konstanter mittlerer Krümmung statt[340]). Hingewiesen sei auf eine Arbeit von *A. Thybaut*[341]), in der unter anderem gezeigt wird, dass die beiden Schalen einer Fläche, die eine doppelt unendliche Schar von Kugeln umhüllt, stets isotherm sind, wenn die auf jeder Kugel liegenden Berührungspunkte mit der Einhüllenden harmonisch sind zu den Brennpunkten der durch die Berührungspunkte gelegten Strahlen.

b) *Guichard-Bianchi*'sche Flächen. *C. Guichard*[342]) betrachtete die Flächen, bei denen in jedem Punkt die senkrechten Abstände der beiden Hauptnormalebenen von einem festen Punkt ein konstantes

---

Über die Integration der Differentialgleichung der isothermen Flächen vgl. *R. Rothe*, Inaug.-Dissert. Berlin 1897, wo sich weitere Litteraturangaben finden.

335) Berlin, Sitzungsberichte (1883), p. 1163.

336) J. f. Math. 103 (1888), p. 40.

337) ibid. 110 (1892), p. 34.

338) Bull. sci. math. (2) 7 (1883), p. 257; Paris, C. R. 96 (1883), p. 1202, 1294; „*Darboux*" 4, p. 235.

339) Ann. éc. norm. (3) 10 (1893), p. 319.

340) Vgl. *M. Voretzsch*, Göttingen, Inaug.-Dissert. 1883.

341) Paris, C. R. 131 (1900), p. 932. Auf eine weitere besondere Art isothermer Flächen machte *L. Raffy* aufmerksam: ibid. 128 (1899) p. 285. Isotherme Flächen, die mit der Biegung eines Paraboloids in Verbindung stehen, behandelte *A. Thybaut*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 45 (III D 6 a, Nrr. **13**, **31**); solche, die mit dem Rollen einer Fläche zweiter Ordnung auf einer Abwickelbaren in Verbindung stehen, *G. Darboux*, ibid. p. 497 (III D 6 a, Nr. **18**).

342) Paris, C. R. 116 (1893), p. 487.

Verhältnis haben und gab eine Transformation dieser Flächen, die wieder zu solchen führt. *Bianchi*[343]) zeigte, dass diese Flächen zu den früher von ihm untersuchten[344]) gehören, auf denen ein doppelt unendliches System von isogonalen Trajektorien der Krümmungslinien vorhanden ist, welches die Fläche in infinitesimale äquivalente Parallelogramme teilt. Beschreibt man um den festen Punkt eine Kugel und konstruiert alle Kreise, welche die Kugel und eine feste Fläche mit der fraglichen Eigenschaft senkrecht schneiden, so sind sie die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar, die aus lauter Flächen mit derselben Eigenschaft besteht. Ebenso geht jede Fläche mit dieser Eigenschaft durch eine Inversion von dem festen Punkt als Pol aus in eine ebensolche über.

c) Hypercyklische Flächen. Mit dieser Benennung belegt *Bianchi*[345]) die Flächen mit einer Schar von Krümmungslinien, deren erste Krümmung konstant ist. Zu einer jeden solchen Fläche gehört eine zweite mit derselben Eigenschaft. Sie ist der Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung der fraglichen Krümmungslinien. Man kann hier eine der *Bäcklund*'schen ganz ähnliche Transformationstheorie entwickeln. Dasselbe gilt von den von *E. Nannei*[346]) untersuchten Flächen, bei denen die erste Krümmung der Krümmungslinien einer Schar nur längs jeder Einzelkurve als konstant vorausgesetzt wird.

d) Die Flächen mit einem System kongruenter Krümmungslinien untersuchte *J. N. Hazzidakis*[347]). Wenn hier die erzeugenden Kurven doppelt gekrümmt sind, bleiben auch die von den Flächennormalen berührten Evoluten der Erzeugenden kongruent, und man hat es mit Schraubenflächen zu tun.

e) Eine Untersuchung über die Flächen, bei denen in jedem Punkte die beiden, die Tangenten der Krümmungslinien enthaltenden, Normalebenen in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung konjugiert sind, findet sich bei „*Darboux*“ 2, chap. 14.

38. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Haupttangentenkurven und konjugierten Linien. a) *Bianchi*[348]) betrachtete die Flächen, auf denen die Haupttangentenkurven der einen Schar konstante Torsion besitzen. Die fraglichen Linien werden dann durch

343) Roma, Linc. Rend. (5) 3^2 (1894), p. 77.

344) Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 349.

345) ibid. (2) 13 (1885), p. 222.

346) Giorn. di mat. 26 (1888), p. 201.

347) J. f. Math. 98 (1885), p. 49. Vgl. *M. Bricard*, Paris, C. R. 130 (1900), p. 475 und *A. Demoulin*, ibid. p. 823.

348) Roma Linc. Rend. (4) 6^1 (1890), p. 352 u. Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 340.

die Haupttangentenkurven der anderen Schar in proportionale Bögen geteilt, und dieselbe Eigenschaft besitzen die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven. Mittels einer der *Bäcklund*'schen ähnlichen Transformation lassen sich aus jeder der fraglichen Flächen andere herleiten, auf denen die Kurven der einen Schar der Haupttangentenkurven dieselbe konstante Torsion und dieselbe Bogenlänge besitzen, wie die entsprechenden Haupttangentenkurven der ursprünglichen Fläche.

b) Die Flächen, auf denen eine Schar von Haupttangentenkurven aus Schraubenlinien besteht, die auf parallelen Zylindern liegen, bestimmte *Dini*[349]). Die orthogonalen Trajektorien der Haupttangentenkurven liegen in Ebenen, die zur Achse der Schraubenlinien senkrecht sind.

c) *P. Stäckel*[350]) betrachtete die Flächen, die durch die Haupttangentenkurven in unendlich kleine Rhomben mit konstanten Winkeln geteilt werden (III D 6 a, Nr. **30**). Hier ist das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ konstant. Ist es gleich -1, so ergeben sich die Minimalflächen; ist es von -1 verschieden, so gehen die zu ein und demselben Winkel der Haupttangentenkurven gehörenden Flächen alle aus einer einzigen durch eine Ähnlichkeitstransformation hervor, und letztere ist eine Rotationsfläche.

d) Die von *S. Lie* behandelte Frage nach den Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören, wird erörtert in der Inaug.-Dissertation von *A. Peter* (Leipzig 1895), woselbst sich weitere Litteraturangaben finden[350a]).

e) *K. Peterson* nennt eine auf einer Fläche liegende Kurve *zylindrisch* oder *konisch*, wenn die Fläche längs der Kurve von einem Zylinder oder einem Kegel berührt wird. Die Flächen, auf denen es zwei konjugierte Scharen zylindrischer Kurven gibt, fallen mit den Translationsflächen zusammen (Nr. 6). Für die Koordinaten der Punkte der Flächen, auf denen es zwei konjugierte Scharen konischer Kurven gibt, erhält *Peterson* die Darstellung[351]):

$$x = \frac{\psi_1 + \chi_1}{\psi + \chi}, \quad y = \frac{\psi_2 + \chi_2}{\psi + \chi}, \quad z = \frac{\psi_3 + \chi_3}{\psi + \chi},$$

349) Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 190.

350) Leipzig, Berichte 1896, p. 491; ibid. 1898, p. 10.

350a) Vgl. *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 369.

351) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 27; vgl. *A. Voss,* Math. Ann. 39 (1891), p. 205. Daselbst p. 207, 214 weitere konjugierte Systeme; solche, die aus ebenen Kurven bestehen, bei *„Darboux“* 1, p. 123.

wo $\psi \ldots \psi_3$ Funktionen von u allein, $\chi \ldots \chi_3$ Funktionen von v allein bedeuten.

f) *L. Raffy* bestimmte die Flächen, deren Koordinaten sich durch die Gleichungen:

$$x = \varphi_1(u)\,\psi_1(v), \quad y = \varphi_2(u)\,\psi_2(v), \quad z = \varphi_3(u)\,\psi_3(v)$$

darstellen lassen, während die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ konjugiert sind, und zeigte, dass die Bestimmung der Haupttangentenkurven dieser Flächen nur Quadraturen erfordert[351a]). Diejenigen unter diesen Flächen, bei denen die Tangenten der Parameterlinien ein und demselben tetraedralen Komplex (III D 4, Nr. **35**) angehören, dessen Fundamentaltetraeder aus den Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene besteht, sind, wie *A. Demoulin* zeigte[351b]), die einzigen Flächen, auf denen ein konjugiertes Kurvensystem mit der fraglichen Eigenschaft seiner Tangenten vorhanden ist.

g) *L. Raffy* bestimmte die Flächen, auf denen die von den Ebenen eines Büschels ausgeschnittenen Kurven mit ihren konjugierten Kurven ein System mit gleichen Invarianten bilden[351c]) (II A 5, Nr. **53**; III D 3, Nr. **37**).

39. Flächen mit besonderen Eigenschaften der geodätischen Linien und geodätischen Kreise. a) *A. Voss*[351d]) bemerkte bei den Flächen mit einem System konjugierter geodätischer Linien die Eigenschaft, dass die sphärischen Bilder dieser Kurven mit denen der Haupttangentenkurven der pseudosphärischen Flächen übereinstimmen (III D 6 a, Nr. **25**). *C. Guichard*[352]) wurde zu den fraglichen Flächen auf folgende Art geführt: Das Tangentensystem der zu R_1 gehörenden Krümmungslinien auf einer Fläche (S) besitzt als zweite Schale der Brennfläche eine Fläche (S_1), die der Ort der Mittelpunkte der geodätischen Krümmungen der zu R_2 gehörenden Krümmungslinien ist. Den Krümmungslinien auf (S) entsprechen auf (S_1) stets konjugierte Kurven. Falls diese sich aber rechtwinklig schneiden, entspricht den Krümmungslinien von (S) auf der zu R_1 gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche von (S) ein System konjugierter, geodätischer Linien.

351a) Par. soc. math. Bull. 24 (1896), p. 2.

351b) ibid. 25 (1897), p. 83. 351c) ibid. 24 (1896), p. 54.

351d) München, Berichte 1888, p. 95; Math. Ann. 39 (1891), p. 253. Vgl. *A. Razzaboni,* Bologna, Mem. (4) 9 (1888), p. 765, wo gezeigt wird, dass die gewöhnliche Schraubenfläche die einzige hierher gehörende Minimalfläche ist. *„Darboux“* 4, p. 103, 105; *„Bianchi“*, p. 284; *C. Guichard,* Paris, C. R. 110 (1890), p. 995.

352) Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 231.

b) Betrachtet man in einem dreifach orthogonalen Flächensystem (III D 1, 2, Nr. 23; III D 6 b), bei dem die eine Schar aus Flächen mit demselben konstanten negativen Krümmungsmass besteht, diejenigen orthogonalen Trajektorien dieser Schar, welche eine Haupttangentenkurve einer Einzelfläche treffen, so schneidet die von ihnen gebildete Fläche (S) auch die anderen Flächen der Schar in Haupttangentenkurven; (S) besitzt somit eine Schar geodätischer Linien von konstanter Torsion. *C. Fibbi*[353]) untersuchte die Flächen mit einem System geodätischer Linien, deren Torsionen nur von Kurve zu Kurve sich ändern, und weiter diejenigen unter ihnen, bei denen die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien entweder Kreise mit demselben Radius sind oder konstante erste Krümmung besitzen. In beiden Fällen treten ähnliche Transformationen, wie die *Bäcklund*'sche auf.

c) Über Flächen mit einem System kongruenter geodätischer Linien oder kongruenter Haupttangentenkurven vgl. eine Arbeit von *J. N. Hazzidakis*[354]).

d) Sind die Koordinaten der Punkte einer Fläche als Funktionen der Parameter u und v gegeben, so versteht man unter einer *linearen* Schar von geodätischen Linien eine solche, die durch gerade, parallele Linien in der u, v-Ebene abgebildet wird, deren Gleichung sich also in der Form: $au + bv = \text{const.}$ darstellt. *G. Finsterwalder*[355]) zeigte, dass eine Fläche, auf der vier wesentlich verschiedene derartige Scharen vorkommen, notwendig konstantes Krümmungsmass besitzen muss. Auf den Rotationsflächen gibt es drei solche Scharen. Die Frage nach der Form des Quadrats des Linienelements der Flächen, auf denen drei lineare Scharen vorkommen, behandelten *F. Ahl*[356]) und *P. Stäckel*[357]). Es zeigt sich, dass hier auch eine solche Form auftreten kann, die für eine Spiralfläche (Nr. 7) kennzeichnend ist.

e) Die Frage nach denjenigen Flächen, deren sämtliche geodätische Linien geschlossen sind, scheint bisher nur für die Rotationsflächen beantwortet zu sein[357a]). *G. Darboux* entwickelte in dem Lehrbuche von *M. Despeyrous*[358]) eine Methode zur Auffindung von derartigen Rotationsflächen. Auf Grund derselben fand *J. Tannery*[359]) die Rotationsfläche mit der Gleichung:

353) Pisa Ann. 5 (1888), p. 79. 354) J. f. Math. 95 (1883), p. 120.

355) Deutsch. Math.-Vereinig. Jahresber. 6 (1899), p. 50.

356) Inaug.-Diss. Kiel 1901. 357) Math. Ann. 56 (1902), p. 502.

357a) Vgl. *P. Stäckel,* Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 9 (1901), p. 128.

358) Cours de Mécanique 2, Paris 1887, p. 467. Vgl. *„Darboux“* 2, p. 454; 3, p. 6. 359) Bull. sci. math. (2) 16 (1892), p. 190.

$$16a^2(x^2+y^2)=z^2(2a^2-z^2),$$

deren geodätische Linien nicht nur sämtlich geschlossen, sondern auch algebraisch sind. *O. Zoll*[360]) behandelte ausführlich die Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien und fand eine singularitätenfreie Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

f) (vgl. III D 3, Nr. 38). Von *O. Bonnet* wurden die Flächen bestimmt, auf denen die Krümmungslinien aus geodätischen Kreisen bestehen[361]). Man hat es hier mit den Einhüllenden einer Schar von Kugeln zu tun, die durch zwei feste reelle oder imaginär konjugierte Punkte gehen. *A. Ribaucour*[362]) leitete das *Bonnet*'sche Ergebnis auf geometrischem Wege her. Nach „*Darboux*" 3, p. 121 bestehen die fraglichen Flächen aus den Rotationsflächen, den Kegeln, den Zylindern und den aus diesen Flächen durch Inversion sich ergebenden Flächen. *A. Voss* zeigte, dass, wenn auf einer Fläche zwei Kurvenscharen liegen, von denen jede aus geodätischen Kreisen von gleicher geodätischer Krümmung besteht, und die sich zudem unter konstantem Winkel schneiden, die Fläche ein konstantes negatives Krümmungsmass besitzt[363]). Die Frage nach den Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen wurde von *F. Probst*[364]) eingehend behandelt. Wir erwähnen den Satz, dass eine Fläche mit mehr als zwei Orthogonalsystemen von geodätischen Kreisen unendlich viele solcher Systeme und damit konstantes Krümmungsmass besitzt.

40. Imaginäre Flächen. Beschränkt man sich nicht auf reelle Flächen, sondern lässt auch imaginäre Flächen zu, so erhalten die Sätze der Flächentheorie mannigfache Erweiterungen, die analytisch von Interesse sind, und von *G. Scheffers* (Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902) systematisch berücksichtigt werden. Der zuerst behandelte Fall[365]) trat bei der von *G. Monge* untersuchten Frage nach den Flächen auf, bei denen in jedem Punkt die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich sind. Ausser der Kugel ergeben sich imaginäre Flächen mit nur *einer* Schar von Krümmungslinien, Flächen, bei denen also die beiden quadratischen Fundamentalformen einen gemeinsamen Faktor besitzen (III D 6 a, Nr. 2). Eine derartige Fläche von konstantem Krümmungsmass wurde von *J. A. Serret* be-

360) Inaug.-Dissert. u. Preisschrift, Göttingen 1901 (III D 6 a, Nr. 14).

361) J. éc. polyt. 25 (1867), p. 133.

362) Bull. soc. philom. 6 (1869), p. 1; 7 (1870), p. 24; vgl. *P. Adam,* Par. soc. math. Bull. 22 (1894), p. 110.

363) Münch. Ber. 22 (1892), p. 268.

364) Inaug.-Dissert. Würzburg 1893.

365) *Monge,* Application d'Analyse à la Géom., 5te Aufl. Paris 1850, p. 196.

merkt[366]). Eingehend untersucht wurden die fraglichen Flächen von *P. Stäckel*[367]) und *G. Scheffers*[368]). Der erstere zeigte, dass die Krümmungslinien dieser Flächen aus Minimalgeraden bestehen[369]), der letztere, dass längs jeder solchen Geraden das Krümmungsmass der Fläche konstant ist. *Stäckel* fand, dass die Fläche überhaupt konstantes Krümmungsmass besitzt, wenn der Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte eine Minimalkurve ist. Für diesen Fall wurden die Koordinaten der Punkte der Fläche von *Scheffers* mittelst dreier Quadraturen, von *Stäckel* durch von Integralen freie Ausdrücke dargestellt.

An zweiter Stelle erwähnen wir die Tangentenflächen der Minimalkurven. Sie werden von *G. Darboux*[370]) zuerst *développables focales,* später *développables isotropes,* von *G. Scheffers Minimaldeveloppable* genannt (III D 6 a, Nr. 2). Wir sind ihnen in Nr. **15**, **29**, **30** bereits begegnet. Die Determinante $EG - F^2$ ist hier stets Null, während keine Fundamentalgrössen zweiter Ordnung auftreten[371]).

Endlich sei die algebraische imaginäre Fläche erwähnt, die sich aus der *Cayley*'schen Linienfläche (Nr. **6**, Anm. 83) durch eine lineare, imaginäre Koordinatentransformation ergibt. Sie tritt zuerst bei *S. Lie* auf als Minimalfläche dritter Klasse[372]), sodann als Minimalfläche mit unendlich vielen Translationserzeugungen[373]) (Nrr. **6**, **27**). *Ribaucour*[374]) fand, dass die Frage nach den geradlinigen Minimalflächen ausser auf die gewöhnliche Schraubenfläche noch auf eine imaginäre Fläche führt, deren Linienelement er bestimmt. Diese Fläche fällt nach den Untersuchungen von *A. Demoulin*[375]) mit der *Lie*'schen Fläche zusammen, sie erscheint hier als Hauptnormalenfläche einer kubischen Raumkurve. (Vgl. die ausführliche Darstellung von *G. Scheffers*[376]).

366) J. de math. (1) 13 (1848), p. 361.

367) Leipz. Ber. 1896, p. 478; 1902, p. 108.

368) Einführung in die Theorie der Flächen, p. 114, 228, 229.

369) Vgl. „*Darboux*" 3, p. 295.

370) Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et la théorie des imaginaires, Paris 1873, p. 9.

371) *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, p. 29, 107; *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 429, 432.

372) Math. Ann. 14 (1878), p. 353.

373) Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 488.

374) Die unter 268) zitierte Arbeit, p. 72.

375) Bruxelles Mém. cour. in 4°, 58 (1899).

376) Einführung in die Theorie der Flächen, p. 242 (III D 4, Nr. **20**).

(Abgeschlossen im August 1903.)

Nachtrag zu III D 3.

p. 109, Fussn. 6c), statt 1901 lies: 1900.

p. 124, Z. 11, statt $\frac{\partial \beta}{\partial u}$ lies: $-\frac{\partial \beta}{\partial u}$.

p. 133, Z. 27, hinter „Ausdruck“ lies: auf *J. Liouville*'s Vorschlag (*Monge,* Applic. Note I, p. 568).

„ „ Z. 28, statt *R. Liouville* lies: *J. Liouville.*

p. 155, Fussn. 130), vgl. *J. Liouville,* J. de math. (1) 11 (1846), p. 362; Note II in *Monge,* Applic. p. 569; *„Darboux“* 1, p. 148.

p. 168, Fussn. 170), statt 2 lies: 9.

p. 174, Fussn. 183). Wohl zuerst bei *J. Liouville,* J. de math. (1) 12 (1847), p. 281.

p. 176, Z. 7—9, lies: Sie gehen durch projektive Transformation[191]) und durch Transformation mittels reziproker Polaren (*„Darboux“* 1, p. 137) wieder in Haupttangentenkurven über.

Fussn. 191), statt 408 lies: 406.

p. 178, Z. 10, statt Radien lies: Polaren.

p. 181, Fussn. 207). Vor *„Darboux“* lies: *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 25 (1867), p. 132.

III D 6 a. ABBILDUNG UND ABWICKELUNG ZWEIER FLÄCHEN AUF EINANDER.

Von

A. VOSS

IN WÜRZBURG.

Inhaltsübersicht.

A. Einleitung.

B. Die Abbildung der Flächen.

C. Die Isometrie der Flächen.

a. Allgemeine Probleme.

b. Spezielle Probleme.

1) Isometrische Untergruppen.

Litteratur.

E. Beltrami, Ricerche di analisi applicata, Giorn. di mat. 2, p. 267, 297, 331, 355 (1864); 3, p. 15, 33, 82, 228, 311 (1865); Opere 1, Milano 1902, p. 107.

— Sulla teoria generale dei parametri differenziali, Bologna Mem. (2) 8, p. 549 (1868).

L. Bianchi, Lezioni di Geometria infinitesimale, Pisa 1894; deutsch von *M. Lukat,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, zitiert mit *Bianchi;* ed. 2, vol. 1, Pisa 1902.

O. Bonnet, Mémoire sur la théorie générale des surfaces, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 1.

— Mémoire sur la théorie des surfaces applicables à une surface donnée (1860), J. éc. polyt. cah. 41 (1865), p. 209; deuxième partie cah. 42 (1867), p. 1.

E. Bour (1860), Théorie de la déformation des surfaces, J. éc. polyt. cah. 39 (1862), p. 1.

Ch. Brisse, Exposition analytique de la théorie des surfaces, Ann. éc. normale (2) 3 (1874), p. 87; J. éc. polyt. cah. 53 (1883), p. 213.

E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, deutsch von *G. Kowalewski,* Leipzig 1901.

D. Codazzi (1859), Mémoire rélatif à l'application des surfaces les unes sur les autres, Paris Mém. prés. par divers savants, 27, Nr. 6 (1872).

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 4 Bde (1887—1896), zitiert mit *Darboux,* Leçons.

C. F. Gauss (1822), Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbil-

dung dem abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, Astronom. Abhandlungen von *H. Schumacher* 3, Altona 1825, Werke 4, p. 189; *Ostwald's* Klassiker, Nr. 55.

C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, Gott. Comm. rec. 6 (1828); Werke 4, p. 217; *Ostwald's* Klassiker Nr. 5; zitiert mit *Gauss,* disquisitiones.

— Untersuchungen über einige Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttinger Abhandl. 2 (1844); Werke 4, p. 259.

— Nachlass, Werke 8, p. 365—450; insbes. Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen (1825), p. 408.

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1892.

R. Hoppe, Prinzipien der Flächentheorie, Leipzig 1876; 2. Aufl. Leipzig 1890.

F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig, 1852; 3. Aufl. bearbeitet von *L. Natani,* 1890.

J. Knoblauch, Einführung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888.

J. L. Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Berlin Nouv. mém. 1779; Oeuvres compl. 4, p. 637 u. 665; *Ostwald's* Klassiker Nr. 55.

S. Lie und *G. Scheffers,* Vorlesungen über die Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896; zitiert mit *Lie-Scheffers* 1.

G. Monge, Applications de l'analyse à la géométrie, Paris 1795; 4. éd. Paris 1807; 5. éd. (par *J. Liouville*) Paris 1850; zitiert mit *Monge, applications.*

K. Peterson, Über Kurven und Flächen, Leipzig und Moskau 1868; zitiert mit *Peterson.*

A. Ribaucour (1876), Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes, J. de math. (4) 7 (1891), p. 1.

— Étude des élassoïdes, ou surfaces à courbure moyenne nulle, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1882), p. 1.

G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova 1898; zitiert mit *Ricci.*

G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raum, Leipzig 1901; zitiert mit *Scheffers* 1.

— Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902; zitiert mit *Scheffers* 2.

H. Stahl und *V. Kommerell,* Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, Leipzig 1893; zitiert mit *Stahl-Kommerell.*

A. Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881; zitiert mit *Tissot.*

A. Einleitung.

1. Vorbemerkungen. Es soll im folgenden der Versuch gemacht werden, eine *zusammenfassende Übersicht* über die Lehre von der Abbildung und Abwickelung der krummen Flächen auf einander zu geben. In der *geschichtlichen Entwickelung* dieser Probleme lassen sich folgende hinsichtlich ihres allgemeinen Charakters wohl unterschiedene *Perioden* bezeichnen.

Erste Periode. Die Zeit bis auf *Joh. I Bernoulli*'s (1698), *Jac. I Bernoulli*'s (1728), *A. Clairaut*'s (1731), *L. Euler*'s (1777), *J. L. Lagrange*'s (1779) und *G. Monge*'s (1785) Arbeiten: Behandlung einzelner Fragen der Abbildung und Abwickelung; erste Einführung der krummlinigen Koordinaten u, v.[1])

Zweite Periode. Das Erscheinen der *Gauss*'schen[2]) Preisarbeit über konforme Abbildung (1822) und die Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827), sowie die Arbeiten von *F. Minding* (von 1830 an), dann von *E. Bour*, *O. Bonnet* und *D. Codazzi* infolge der Preisaufgabe der Pariser Akademie für 1860 nebst *J. Weingarten*'s ersten Untersuchungen über die W-Flächen (1861, 1863).

Dritte Periode. *E. Beltrami*'s Lehre von den Differentialparametern[3]) (1864), die durch *B. Riemann*'s Habilitationsvorlesung (1854) angeregte Untersuchung der *Transformation der quadratischen Differentialausdrücke* und ihrer Invarianten (*E. B. Christoffel* (1869) und *R. Lipschitz* (1870)), sowie die sich daran schliessenden Arbeiten über Flächen konstanter Krümmung[4]).

Die *gegenwärtige Periode*, welche die *allgemeine Erledigung* der in

---

1) Über die von den genannten Mathematikern behandelten Probleme siehe die reichhaltigen Angaben von *P. Stäckel*, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 444, sowie Nr. **21**. Nach *Stäckel* (Bibliotheca math. (3) 2 (1901), p. 122) hat übrigens schon *Euler* 1766 (Opera postuma 1, Petropol. 1862, p. 494) unter Zugrundelegung der Parameter u, v und der Fundamentalgrössen erster Ordnung das allgemeine Problem der Abwickelung einer Fläche auf eine gegebene gestellt, ohne es allerdings weiter zu behandeln.

2) Wesentlich *neu* ist bei *Gauss* der *Begriff* und die *Eigenschaften* des *Krümmungsmasses* k, die *allgemeine* Verwendung der Parameter u, v insbesondere für die *Theorie der geodätischen Linien* (während *Lagrange* 1779 nur das kartographische Problem so behandelt hatte), endlich die Erkenntnis der *Fundamentalgrössen erster Ordnung* in ihrer Beziehung zu den *inneren* Eigenschaften der Flächen. Nach *Stäckel* (Leipz. Ber. 45, p. 455) hat bereits *O. Rodrigues* (Correspondance sur l'école polytechnique 3 (1815), p. 162) die Beziehung des Produktes der Hauptkrümmungsradien einer Fläche zur sphärischen Abbildung ihres Flächenelementes in einer speziellen Form gekannt. *F. Minding*, dem man auch die Einführung der *geodätischen Krümmung* (III D 3, Nr. **11**, **12**) und ihrer Invarianz verdankt, behandelt im *Gauss*'schen Sinne zuerst die Biegung gewisser Flächen.

3) *Beltrami*'s Differentialparameter (I B 2, Nr. **22**; III D 3, Nr. **8**) erster und zweiter Ordnung treten schon in *Minding*'s (1838) und *O. Bonnet*'s (1860) Arbeiten auf. *Riemann*'s Arbeit über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Werke, p. 254), ist erst 1868 (Göttinger Abh. 13) veröffentlicht; man vergleiche auch die Commentatio mathematica von 1861 (*Riemann*, Werke, p. 370 und Fussn. 150).

4) Wegen der mit diesen Untersuchungen in engster Beziehung stehenden Ausbildung der nicht-euklidischen Geometrie, die hier nicht berücksichtigt werden kann, vgl. man III A 1.

den früheren aufgeworfenen Fragen anstrebt, ist in geometrischer Hinsicht durch die Verwendung des Mannigfaltigkeitsbegriffs, der Theorie der Berührungstransformationen von *S. Lie* (seit 1870), der Strahlensysteme (beginnend mit *A. Ribaucour*'s Arbeiten 1870), in methodischer Beziehung durch die Einführung kinematischer Gesichtspunkte (*E. Laguerre* 1872, *G. Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces vgl. III D 1, 2, Nr. **10**; III D 3, Nr. **10**) und die freieste Verwendung des allgemeinen Koordinatenbegriffs, sowie durch die Einführung der kovarianten Differentialprozesse (*G. Ricci,* seit 1888) gekennzeichnet.

Eine auch nur einigermassen *vollständige* Darlegung dieser letzteren auf den vereinigten Arbeiten der deutschen, französischen und italienischen Mathematiker beruhenden Periode kann schon wegen der ausserordentlichen Vielseitigkeit der in ihr zur Verwendung kommenden Gesichtspunkte hier nicht erwartet werden. Die Darstellung muss sich vielmehr mit der Hervorhebung einzelner besonders wichtig erscheinender Forschungsrichtungen begnügen, um so mehr, da sich dieselben gegenwärtig in lebhaftester Entwickelung befinden.

2. Allgemeine Übersicht über die Aufgaben der Abbildung und Abwickelung. Zwei Flächen F und F' heissen aufeinander abgebildet[5]), wenn jedem Punkte $P(xyz)$ von F ein Punkt $P'(x_1y_1z_1)$ von F' nach einem gewissen Gesetze eindeutig umkehrbar zugeordnet ist. Unter Beschränkung auf *stetige* Zuordnungen werden dabei, sobald es sich nicht nur um Untersuchungen aus dem Gebiet der *Analysis situs* (III A 4) handelt, xyz und $x_1y_1z_1$ in der Umgebung von P und P' als Funktionen der unabhängigen Parameter u, v mit stetigen partiellen Differentialquotienten nach diesen Variabeln in dem Umfange, wie dieselben gebraucht werden, oder auch wohl als (reguläre) analytische Funktionen der u, v vorausgesetzt. Desgleichen ist auch anzunehmen, dass von den drei Funktionaldeterminanten

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y & z \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z & x \\ u & v \end{pmatrix}$$

mindestens *eine* von Null verschieden ist.

Da jede Verwandtschaft durch Funktionen mit stetigen ersten Differentialquotienten im Unendlichkleinen *projektiv* ist[6]), so bilden

5) So *C. F. Gauss* 1822 in den Astronom. Abh. von *H. C. Schumacher,* 1825, p. 1.

6) Dies hat wohl zuerst allgemein *A. Tissot* bemerkt, sur les cartes géographiques, Paris, C. R. 49 (1859), p. 673; Nouvelles ann. de math. (2) 17, 1878, dann im Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881. Nach *Tissot* besteht die Zuordnung hinreichend kleiner korrespondierender Bereiche von P

die korrespondierenden Tangenten von P und P' projektive Büschel; da in zwei solchen *reellen* Büscheln *entweder* unendlich viele entsprechende Rechtwinkelpaare *oder* ein einziges enthalten sind (III A 5), hat man *Tissot's* Satz, dass entweder einem *einzigen* Orthogonalsystem, den *Hauptkurven* von F, auch ein solches von F' entspricht, oder dass dies für *jedes* Orthogonalsystem auf F der Fall ist. Bezeichnet man die *Fundamentalgrössen erster Ordnung* (III D 1, 2, Nr. **34**) von F und F' durch E, F, G; E', F', G', [7]) so muss im letzteren Fall wegen der Orthogonalitätsbedingung der Kurvenelemente du, dv; $\delta u, \delta v$:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

die Bedingung

$$E : F : G = E' : F' : G'$$

bestehen, d. h. die Abbildung ist eine *konforme* (II B 1, Nr. **5**), die korrespondierenden Tangentenbüschel sind entweder direkt oder invers kongruent[8]).

Erst *Lie*[9]) bemerkte, dass *Tissot's* Satz aus der Beziehung entspringt, in der die Bilder der *Minimal-* oder *Nullkurven* (III D 1, 2,

---

und P' in geeigneter ähnlicher Vergrösserung und senkrechter Projektion des einen auf das andere, vgl. z. B. *Scheffers* 2, p. 90. Der Satz selbst ist übrigens eine unmittelbare Folge von der vorausgesetzten *Existenz* der stetigen partiellen Differentialquotienten der Koordinaten nach den u, v, und in Bezug auf spezielle Fragen (Kreisverwandtschaft (III A 7)) schon von *Möbius* gekannt.

7) Die Differentialgleichung der Hauptkurven ist:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ E & F & G \\ E' & F' & G' \end{vmatrix} = 0,$$

die Grösse $T = +\sqrt{EG - F^2}$ nach dem obigen stets von Null verschieden mit Ausnahme der Minimaldeveloppabelen (III D 5, Nrr. **15**, **29**, **30**, **40**) (siehe *Darboux,* Leçons 1, p. 148). Auch giebt es für jeden Punkt zwei reelle oder imaginäre Richtungen, für die das Längenverhältnis $ds : ds'$ gleich Eins ist (*automekoische* oder *längentreue* Kurven, *Tissot,* p. 130; *Aequideformaten* bei *E. Hammer,* Die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, Stuttgart 1889, p. 23.

8) Bis auf Grössen von höherer als erster Ordnung; vgl. *A. Voss*, Über konforme Abbildung, Math. Ann. 46 (1895), p. 133.

9) *S. Lie,* Math. Ann. 20 (1882), p. 419 Fussn. 1; in analytischer Darstellung bei *P. Stäckel,* Math. Ann. 44 (1894), p. 555. Die Bezeichnung *Minimalkurven* stammt von *Lie,* Math. Ann. 14 (1878), p. 337; sie wurden übrigens schon von *Bonnet* und *Bour* (1860), sodann namentlich von *A. Ribaucour,* seit 1870 beständig bei flächentheoretischen Untersuchungen angewandt (III D 4, Nr. **35**). — *Lie* hat überhaupt zuerst mit Nachdruck auf die allgemeine Bedeutung imaginärer Beziehungen in der Differentialgeometrie hingewiesen; vgl. indes *P. Stäckel,* Beiträge zur Flächentheorie, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 478, sowie *Scheffers* Lehrbücher 1, 2, welche zum ersten Male in *systematischer* Weise die imaginären Gebilde und die durch sie bedingten *Ausnahmefälle* berücksichtigen.

Nr. 12) von F zu denen der Nullkurven von F' stehen. Denn die Abbildung der *Involution* orthogonaler Tangentenpaare bei P liefert eine Involution bei P', deren Doppelelemente die Bilder der Tangenten der Minimalkurven von F sind. Und nun sind *drei* Fälle möglich. Fallen diese Doppelelemente *nicht* mit den Tangenten der Minimalkurven bei P' zusammen, so giebt es *ein* gemeinsames harmonisches Paar zu den Doppelelementen beider Involutionen bei P'; dieses bildet die Tangenten der *Tissot*'schen Hauptkurven. Entsprechen aber die Minimalkurven von F' denen von F, so fallen die Doppelelemente beider Involutionen zusammen; man hat die *konforme* Abbildung. Bei der reellen Abbildung reeller Flächen sind keine anderen Fälle möglich; bei imaginärer Beziehung können aber die beiden Involutionen bei P' auch in *einem* Doppelelement koinzidieren: das gemeinsame Orthogonalsystem reduziert sich dann auf dieses ausgeartete, auf sich selbst senkrechte System der Minimalkurven[10]).

Der Bedeutung der Differentialgleichung der Nullkurven auf F und F'

$$E du^2 + 2F du\, dv + G du^2 = 0$$
$$E' du^2 + 2F' du\, dv + G' du^2 = 0$$

zufolge verallgemeinert *Stäckel*[11]) *Lie*'s Betrachtung durch die Annahme von zwei *beliebigen* Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2 &= 0 \\ A_1 du^2 + 2B_1 du\, dv + C_1 dv^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Jede derselben bestimmt, falls die Discriminanten der Formen (1) nicht verschwinden, ein Tangentenpaar von F und F'. Entsprechen nun bei der Abbildung diese Paare sich nicht, so existiert für dieselbe ein, durch die *Jacobi*'sche Determinante der Formen bestimmtes, gemeinsames harmonisches Tangentenpaar, welches bei reellen Flächen und reeller Beziehung sicher reell ist, wenn nur eine der Formen *definit* ist (III D 3, Nr. 8). Wenn aber beide Tangenten eines Paares den beiden andern entsprechen ($A : B : C = A' : B' : C'$), so sind unendlich viele solcher Paare vorhanden; endlich ist auch noch der *Lie*'sche Fall möglich, dass nur eine Tangente des einen Paares einer des andern entspricht (die Gleichungen (1) haben einen gemeinsamen Faktor, dessen Quadrat die *Jacobi*'sche Form ist). Bedeuten daher jetzt L, M, N; L', M', N' die *Fundamentalgrössen zweiter Ordnung* von F und F' (III D 1, 2, Nr. 34), also die Gleichungen (1) die *Haupttangenten-*

10) Einige Autoren bezeichnen diese Beziehung als *halbkonforme* Abbildung.

11) *P. Stäckel,* Über Abbildungen, Math. Ann. 44 (1894), p. 556.

kurven (III D 1, 2, Nr. 35; III D 3, Nr. 1) der Flächen, so folgt der Satz von *K. Peterson*[12]), dass „im allgemeinen" bei jeder reellen Abbildung ein einziges gemeinsames, nach *Dupin* konjugiertes System *konjugierter* Kurven[13]) (III D 1, 2, Nr. 37; III D 3, Nr. 3, 37) vorhanden ist, falls nicht beide Haupttangenten sich gegenseitig entsprechen[14]). Im letztern Falle heisst die Abbildung nach *Stäckel konjunktiv; jedem* konjugierten Systeme von F entspricht ein solches von F'.[15])

Ist der *Modulus* m der *konformen* Beziehung

$$(2)\qquad E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = m^2 (E' du^2 + 2F' du\, dv + G' dv^2)$$

konstant, so hat man eine *ähnliche* Abbildung; für $m = 1$ entsteht die direkt oder invers kongruente Zuordnung. Nach *Gauss* bezeichnet man den Fall $m = 1$ als eine *Abwickelung*[16]) (explicatio, application, applicazione). Allerdings lassen sich dann die Punkte von F so auf F' beziehen, dass die Winkel und Längengrössen der Figuren dabei erhalten bleiben. Von einer *Abwickelung* aber lässt sich streng genommen nur dann reden, wenn eine *stetige Biegungsdeformation*, wie z. B. bei den *„abwickelbaren"* Flächen (Nr. 21) (*Developpabelen*, surfaces développables, superficie sviluppabile), *Rotationsflächen* (Nr. 23), *Regel-* (Nr. 22) und *Minimal*flächen (Nr. 27) etc. bekannt ist, durch den jene Ausbreitung *realisiert* wird[17]). Da die Lehre von den *„auf einander*

---

12) *K. Peterson*, p. 37. Dies System heisst dort die *Basis* der Abbildung; später bei *A. Ribaucour*, Paris, C. R. 103 (1891), p. 324; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 120; verallgemeinert bei *A. Petot*, Sur les systèmes conjuguées et les couples de surfaces applicables, Paris, C. R. 115 (1892), p. 1250. Vgl. auch Nr. 25.

13) *Ch. Dupin*, Développements de géométrie, Paris 1813, p. 44, 91.

14) Der Ausnahmefall ist hier nicht berücksichtigt, vgl. *Scheffers* 2, p. 286. Das System ist sicher *reell*, wenn eine der Flächen *positiv* gekrümmt ist.

15) *P. Stäckel*, Math. Ann. 34 (1889), p. 538; *Peterson*, p. 40, nennt die Beziehung $L : M : N = L' : M' : N'$ *Konjunktion.* Zwei *konform und konjunktiv* auf einander bezogene Flächen *sind nach Stäckel* im allgemeinen *ähnlich*, falls sie nicht einer bestimmten Klasse von Flächen angehören (*Stäckel*, Math. Ann. 44 (1896), p. 560; Leipz. Ber. 48 (1896), p. 489. Zu derselben gehören ausser der Kugel und den Minimalflächen (III D 5, Nr. 19 ff.) noch gewisse C-Flächen, so z. B. diejenigen, die durch ihre *Haupttangentenkurven in Rhomben mit konstantem* von $\pi/2$ *verschiedenem* Winkel geteilt werden (III D 5, Nr. 38); es sind dies nach *Stäckel* (Leipz. Ber. 50 (1898), p. 10) *Rotationsflächen*, die ∞^3 konform konjunktive Abbildungen in sich gestatten (Leipz. Ber. 48, p. 497).

16) Das Wort „explicare" in dieser Bedeutung schon bei *L. Euler*, de solidis, quorum superficiem in planum *explicare* licet, Petrop. Nov. Comm. 16 (1772), p. 3.

17) Schon *Peterson* (p. 42) spricht nicht von einer Abwickelung oder Biegung der Flächen, sondern definiert *Biegung* als Zuordnung mit Erhaltung der Längenelemente. Angemessener ist es vielleicht, diesen Ausdruck auf die von *Biegungs-*

abwickelbaren Flächen" *zunächst* sich mit *dieser* Frage *nicht* beschäftigt, soll der Fall $m = 1$ als *Isometrie der beiden Flächen*, und zwei „auf einander abwickelbare" Flächen (surfaces applicables) als *zu einander isometrische*, kurz als *isometrische Flächen*[18]) bezeichnet, der Fall einer kontinuierlichen von *Biegungsparametern* abhängigen isometrischen Deformation aber *Biegung* genannt werden. — Übrigens lässt sich jede Fläche auf jeder zu ihr isometrischen durch „rollende" Bewegung „abwälzen", d. h. durch ein gleichsam *typographisches Verfahren* auf dieselbe „übertragen".

Alle Flächen mit *demselben*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

bilden eine *vollständige Gruppe* (nach *Weingarten* Klasse) *isometrischer Flächen* (Nr. **31**). Das wesentlich durch *Gauss'* Disquisitiones angeregte Problem der *„biegsamen unausdehnsamen Flächen"* ist allerdings schon früher auf dem Boden der *Mechanik* erwachsen[19]). Eine *rein geometrische Basis* erhält die Isometrie aber erst durch den *Gauss*'schen Begriff[20]) der nur von den E, F, G abhängigen *inneren*[20a]) (intrinsequen) Eigenschaften der Flächen. Ihnen stehen die *äusseren* (extrinsequen), d. h. bis auf die absolute Lage im Raume bestimmten gegenüber, welche nach *Bonnet*'s Satz[20b]) über die durch die Fundamentalgrössen erster *und* zweiter Ordnung vermittelte bis auf Kongruenz und Symmetrie eindeutige Bestimmung einer Fläche (III D 1, 2, Nr. **34**) in den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N ihren Ausdruck finden.

Die konforme Beziehung kann man übrigens durch die Forderung

$$(3)\quad A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2 = A' du'^2 + 2B' du'\, dv' + C' dv'^2$$

verallgemeinern, in der A, B, C irgend welche aus den u, v; E, F, G;

---

parametern stetig abhängenden Zuordnungen zu beschränken; ähnlich auch neuerdings *Bianchi*, p. 180; *Scheffers* 2, p. 274.

18) So *A. Voss*, Münch. Ber. 1892, p. 247; Math. Ann. 46 (1896), p. 97. *A. Pellet* (Paris, C. R. 124 (1897), p. 1337) nennt isometrische Flächen allerdings solche, deren Krümmungslinien ein „isometrisches" (dasselbe ist eine Verallgemeinerung des isothermen (III D 3, Nr. **19**)) System bilden.

19) *P. Stäckel*, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 455.

20) *Gauss*, Disquisitiones art. 13.

20a) Es handelt sich übrigens hier nur um die „inneren" Eigenschaften in Rücksicht auf die Isometrie, nicht um solche im Sinne der Analysis situs (III A 4); vgl. *F. Klein*, Über den Zusammenhang der Flächen, Math. Ann. 8 (1876), p. 478; *W. Dyck*, Beiträge zur Analysis situs, Math. Ann. 32 (1888), p. 474.

20b) Nach *Stäckel* (Biblioth. math. (3) 2, p. 124) findet sich dieser wichtige Satz schon 1853 in einer nicht veröffentlichten Arbeit von *K. Peterson*.

L, M, N und deren Derivierten gebildete Formen, insbesondere Differentialinvarianten (II A 6, Nr. **13**) einer bestimmten Gruppe von Transformationen, A', B', C' die entsprechend gebildeten für F' sind. Von diesen allgemeinen Abbildungen sind ausser den oben erwähnten konjunktiven und den *äquivalenten* oder *flächentreuen* (Nr. **6**):

$$T\,du\,dv = k\,T'du'dv',$$

bisher erst wenige untersucht; selbstverständlich lassen sich diese Fragen auf beliebige *höhere* Differentialformen (I B 2, Nr. **22**, Anm. 347), insbesondere auch auf das Entsprechen einfacher oder mehrfacher Scharen von durch Differentialgleichungen definierten Kurvensystemen (so z. B. die geodätischen Abbildungen Nr. **9**) erweitern. Andere Abbildungsprinzipe werden dadurch gewonnen, dass man die Normalen, Tangenten etc. von Kurvensystemen auf F und F' einander zuordnet. Eine besonders fruchtbare Quelle für dieselben liegt aber in der durch *A. Ribaucour* 1870 begonnenen, namentlich von *C. Guichard*, *E. Cosserat* und *L. Bianchi* fortgesetzten Betrachtung der *Strahlensysteme*, welche von den Verbindungslinien der Punkte P, P' gebildet werden, und deren Beziehungen zu den Flächen F, F' (Nr. **13**; III D 5, Nr. **30**).

Es sollen im folgenden zuerst die *Hauptprobleme der Abbildung*, dann die der *Isometrie* dargelegt werden. Bei manchen derselben hat man übrigens *zwei* Probleme, A und B, zu unterscheiden. A besteht in der Bestimmung solcher (analytischer) Funktionen der Koordinaten, durch welche die vorgeschriebene Zuordnung bewirkt wird. Enthält die allgemeine Lösung von A willkürliche Funktionen, so besteht das Problem B in der Zuordnung *berandeter* Flächenstücke F und F', wobei noch *Ausnahmestellen* im Innern oder auf dem Rande, oder auch für den letzteren weitergehende *Randbedingungen* vorgeschrieben sein können. B ist naturgemäss funktionentheoretischer Art (II B 1, Nr. **5**) und kann hier nur in seinem *unmittelbaren* Zusammenhang mit der Infinitesimalgeometrie kurz erwähnt werden.

B. Die Abbildung der Flächen.

3. Die konforme Abbildung (III D 3, Nr. **19**). Man bezeichnet die *konforme*[21]) Abbildung $E:F:G = E':F':G'$, welche in der Proportionalität der korrespondierenden Längenelemente $ds = m\,ds'$ und der *daraus* vermöge der Formel für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Richtungen d, δ

21) Bezeichnung von *Gauss* in den Untersuchungen über Gegenstände d. höheren Geodäsie, Gött. Abh. 1844 = Werke 4, p. 262, auch Gött. gel. Anz. 1843 = Werke 4, p. 348.

$$ds\,\delta s \cos\theta = E du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G dv\,\delta v$$

folgenden Erhaltung der Winkel[22]) zwischen ds, δs besteht, auch als *winkeltreue*[22]) oder in den kleinsten Teilen ähnliche[23]), geographische[24]) oder graphische[25]), isogonale[26]) (isogonische), autogonale[27]), orthomorphische (orthomorphic projection)[28]), etc.

Da zwei auf ein und dieselbe dritte konform bezogene Flächen auch zu einander konform sind, kommt das Problem für zwei beliebige Flächen auf das der konformen Abbildung einer Fläche auf die *Ebene* zurück[29]).

Aber auch hier genügt die Kenntnis einer *einzigen* Abbildung in Verbindung mit allen konformen Abbildungen der Ebene auf eine andere Ebene. Nach *Gauss*[30]) und *Jacobi*[31]) zerfällt die Aufgabe, *alle* konformen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene zu finden, in die zwei folgenden. Da nämlich jedes Isothermensystem (III D 3, Nr. **19**) bei der konformen Abbildung isotherm bleibt, so hat man *zunächst* irgend eine Transformation zu bestimmen, welche

$$E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 = \lambda_1^2(du_1^2 + dv_1^2) = \lambda_1^2 d\alpha_1\,d\beta_1$$

bewirkt, wobei unter u_1, v_1 rechtwinklige Koordinaten der Ebene verstanden werden, d. h. irgend einen der beiden komplex konjugierten integrierenden Faktoren $\varkappa, \varkappa_1$, der beiden Differentialausdrücke (III D 3, Nr. **19**)

---

22) So *A. Breusing* (zweiter deutscher Geographentag, Halle 1882).

23) *Gauss*, Werke 4, p. 194.

24) Tracé géographique, so *J. Liouville*, p. 601 Note V in den Applications von *Monge;* so namentlich die italienischen Mathematiker, wohl mit *Darboux*, Leçons 1, p. 153 zur *Unterscheidung* von dem funktionentheoretischen Problem der représentation conforme (II B 1, Nrr. **5**, **18**).

25) *Peterson*, p. 41.

26) *F. Siebeck*, J. f. Math. 54 (1858), p. 221.

27) *Tissot*, p. 75.

28) *A. Cayley*, J. f. Math. 107 (1892), p. 262 und manche englische Mathematiker.

29) Diese Reduktion findet bei allen ähnlichen Fragen, z. B. der äquivalenten Abbildung etc. statt.

30) *Gauss*, Werke 4, p. 196; 8, p. 370. Wahrscheinlich hat *Gauss* die *allgemeine* Aufgabe der konformen Abbildung schon vor 1816 gestellt. Auch hier zeigt sich, wie *Gauss* in charakteristischer Weise (ebenso wie *d'Alembert*, *Lagrange*, *Laplace*) seine allgemeinen Untersuchungen an Fragen anknüpfte, die eine unmittelbare *praktische Verwendung* gestatten.

31) *C. G. J. Jacobi*, Berl. Monatsber. 1849 = Werke 2, p. 62; J. f. Math. 59 (1861), p. 74 = Werke 2, p. 401. Die Einführung der komplexen Grössen indes schon bei *Lagrange*, Berlin, Nouveaux mém. 1779 = Oeuvres compl. 4, p. 643.

$$d\alpha_1 = \varkappa\left(\sqrt{E}du + \frac{F+iT}{\sqrt{E}}dv\right)$$
$$d\beta_1 = \varkappa_1\left(\sqrt{E}du + \frac{F-iT}{\sqrt{E}}dv\right)$$

zu suchen, *sodann* aber alle Lösungen der Gleichungen:

$$\lambda_1^2(du_1^2 + dv_1^2) = \lambda_1^2 d\alpha_1 d\beta_1 = \lambda_2^2 d\alpha_2 d\beta_2 = \lambda_2^2(du_2^2 + dv_2^2)$$

zu bestimmen. Dies geschieht durch die Gleichungen[32]):

$$\alpha_2 = F(\alpha_1), \qquad \beta_2 = F_1(\beta_1),$$

in denen man rechter Hand auch α und β noch vertauschen kann. Die allgemeine Lösung wird daher gegeben durch:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_2 + iv_2 = F(u_1 + iv_1), \\ u_2 - iv_2 = F_1(u_1 - iv_1), \end{cases}$$

wobei F und F_1 willkürliche Funktionen ihrer komplexen Argumente sind, übrigens rechtsstehend i durch $-i$ ersetzt werden darf. Für den Fall reeller Transformation müssen dann F und F_1 komplex konjugierte Funktionen ihres Argumentes sein. Der Multiplikator

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{\varkappa\varkappa_1}$$

genügt dabei der *Beltrami*'schen Differentialgleichung[33]) (III D 3, Nr. **19**):

$$\Delta_2(\log\lambda) = -k,$$

wobei unter k das Krümmungsmass der Fläche verstanden wird.

Nimmt man in (1) F und F_1 als komplex konjugierte Funktionen, so wird:

$$u_2 = \quad \Re F(u_1 + iv_1), \text{ }^{33a)}$$
$$v_2 = -\Re iF(u_1 + iv_1),$$

und jede dieser Funktionen genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 0.$$

Nach *Beltrami* ergeben sich alle konformen Abbildungen auf die Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u_1, v_1 vermöge der partiellen Differentialgleichung:

---

32) So *J. Liouville,* J. de math. 11 (1846), p. 362, auch Note II der Applications von *Monge,* p. 573; vgl. auch *Darboux,* Leçons 1, p. 148. Das im Texte gewählte Zeichen entspricht der *direkten* Ähnlichkeit.

33) *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 2 (1864); Math. Ann. 1 (1869), p. 579; vgl. *J. Knoblauch,* Flächentheorie, p. 175; *R. Lipschitz,* Bull. sci. math. (2) 16 (1892), p. 207. Über die *Beziehung zwischen den Krümmungsmassen* konform aufeinander abgebildeter Flächen vgl. *G. Souslow,* Paris, C. R. 126 (1898), p. 30.

33a) $\Re$ bedeutet den reellen Bestandteil des betreffenden Ausdruckes.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial u_1}{\partial u} - F\frac{\partial u_1}{\partial v}}{T}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial u_1}{\partial v} - F\frac{\partial u_1}{\partial u}}{T}\right) = 0.$$

Denn in der That wird für jede *reelle* Lösung derselben, falls

$$T\frac{\partial v_1}{\partial u} = -\left(E\frac{\partial u_1}{\partial v} - F\frac{\partial u_1}{\partial u}\right),$$

$$T\frac{\partial v_1}{\partial v} = \quad \left(G\frac{\partial u_1}{\partial u} - F\frac{\partial u_1}{\partial v}\right),$$

$$\frac{E\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + G\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2}{T^2} = \frac{E\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2}{T^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}$$

gesetzt wird,

$$Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 = \lambda_1^2(du_1^2 + dv_1^2).$$ [33b])

4. Besondere konforme Abbildungen. Die konforme Eigenschaft der *stereographischen* Abbildung der *Kugel* [34]) und der *Merkator*'schen Projektion [35]) ist seit langer Zeit bekannt (VI 4).

Lambert [36]) leitete zuerst diese und andere konforme Abbildungen aus der Forderung der Erhaltung der Winkel, d. h. der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen her. *Lagrange* [37]) gab die allgemeine konforme Abbildung der *Rotationsflächen*. Aber erst bei *Gauss* findet sich die bei *Lagrange* [37a]) nur angedeutete konforme Abbildung *beliebiger* Flächen, verbunden mit der Erkenntnis, dass das Problem *nur* von der Proportionalität der Fundamentalgrössen *erster* Ordnung abhängt.

Das schon von *Lagrange* gelöste Problem der konformen Transformationen der Ebene, bei denen Kreise in Kreise übergehen [38]), löst

---

33b) Vgl. z. B. *Bianchi*, p. 69.

34) Die Erhaltung der Kreise bei der stereographischen Projektion der Kugel (diese Bezeichnung zuerst bei *Fr. Aguillon*, opticorum libri 6, Antwerpen 1613) kannte schon *Hipparch;* die daraus folgende Erhaltung der Winkel scheint (nach *Lagrange*, Oeuvres compl. 4, p. 639) später wieder in Vergessenheit geraten zu sein.

35) *G. Kremer*, 1512—1594 (genannt *Merkator*, der deutsche Geograph, *A. Breusing*, Duisburg 1869), vollendete 1569 die erste nach seiner Methode entworfene Weltkarte.

36) *J. H. Lambert*, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendungen, Berlin 3 (1772), p. 185—199; *Ostwald*'s Klassiker Nr. 54.

37) *J. L. Lagrange*, Oeuvres compl. 4, p. 637; second mém. daselbst p. 665. *Lagrange* zeigt, dass die Aufgabe völlig bestimmt ist, wenn das Bild *eines* Meridians punktweise vorgeschriebene Gestalt in der Ebene haben soll (Erste Lösung eines Problems *B*), p. 647.

37a) *Lagrange*, Oeuvr. compl. 4, p. 665.

38) Vgl. *Darboux*, Leçons 1, p. 167.

Lie[39]) auf synthetischem Wege, davon ausgehend, dass Translationen T, Ähnlichkeitstransformationen (Rotationen) A und Transformationen durch reziproke Radien R konforme Transformationen sind, welche Kreise in Kreise überführen. Eine *jede* konforme[40]) Transformation C der Ebene, welche Kreise in Kreise verwandelt, kann symbolisch durch

$$C = RART$$

ausgedrückt werden. Hiernach giebt es ∞^6 konforme Transformationen dieser Art, deren analytischer Ausdruck nach *Lagrange*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit drei komplexen Konstanten ist.

Von der Mühll[41]) hat *Lagrange*'s Untersuchungen in der Art weiter geführt, dass auch Abbildungen betrachtet werden, bei denen parallele Geraden in *Kegelschnitte* übergehen. Die von *Gauss* nur besprochene Abbildung der Mittelpunktsflächen zweiten Grades erledigte *Jacobi*[42]) durch die Einführung der elliptischen Koordinaten; das bei *Jacobi* nicht behandelte Paraboloid ist von *Hoppe*[43]) hinzugefügt (III C 4).

Die konforme Abbildung von Ebenen auf Ebenen, grösstenteils unter Beschränkung auf Problem A vermöge der Beziehung zwischen den komplexen Variabeln z, z' der beiden Ebenen sind nach *Siebeck*'s Vorgange[44]) ausführlich durch *Holzmüller*[45]) dargelegt worden.

In Betreff des Problems B der konformen Abbildung sei hier

---

39) *Lie-Scheffers* 1, p. 6 und 415. Vgl. die historischen Bemerkungen daselbst, p. 423 über das *Prinzip der reziproken Radien* (III C 7) und dessen Verwendung für geometrische Zwecke seit *G. Bellavitis* (1836).

40) Nach *Lie* (*Lie-Scheffers* 1, p. 416) ist übrigens *jede* Punkttransformation der Ebene, welche Kreise in Kreise verwandelt, auch *konform*, vgl. auch p. 422.

41) *K. v. d. Mühll,* Über Abbildung von Ebenen auf Ebenen, J. f. Math. 69 (1868), p. 264. Konforme Abbildungen, bei denen Kurven einer gegebenen Schar in Kurven mit konstanter Längenvergrösserung übergehen, bestimmt *P. Pizzetti,* Roma Lincei Rend. (4) 1, p. 599 u. 628.

42) *C. G. J. Jacobi,* Berl. Monatsber. 1839, p. 64; J. f. Math. 19 (1839); p. 311; vgl. die vor der Veröffentlichung von *Jacobi*'s Arbeit, J. f. Math. 59 (1861) p. 74, entstandene Preisschrift von *E. Schering,* Über die konforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene, Göttingen 1858.

43) *R. Hoppe,* Math. Ann. 2 (1869), p. 504.

44) *F. H. Siebeck,* J. f. Math. 55 (1858), p. 221; 57 (1860), p. 359; 59, (1861), p. 173.

45) *G. Holzmüller,* Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1892; daselbst auch reichhaltige Litteratur; über letztere vgl. auch *H. Amstein,* Diss. Zürich 1872.

nur *Riemann*'s[46]) grundlegender Satz erwähnt: Jedes ebene einfach zusammenhängende Flächenstück F kann nur auf *eine* Art konform so auf eine Kreisfläche K abgebildet werden, dass ein Punkt im Innern von F dem Mittelpunkt von K und ein Randpunkt von F einem Randpunkt von K entsprechen soll; hinsichtlich der weiteren funktionentheoretischen Untersuchungen ist auf II B 1, Nr. 5, p. 19—23 zu verweisen.

5. Vorteilhafteste konforme Abbildung. Schon *Gauss*[47]) stellte sich 1843 die Frage nach möglichst vorteilhaften konformen Abbildungen. Er definiert sie für die Abbildung der Kugel resp. des Sphäroids auf die Ebene dadurch, dass der Ähnlichkeitsmodul m für die gegebene Breite λ_0 gleich Eins, für benachbarte λ aber zu $(\lambda - \lambda_0)^3$ proportional werden soll, und hat die betreffenden Formeln völlig ausgeführt.

H. Weber[48]) definiert als *Fehler* des Ortes auf der ebenen Fläche bei der Abbildung eines beliebigen Flächenstücks den Quotienten

$$\log\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

beim Fortschreiten auf irgend einer vom Punkte O ausgehenden Kurve und gelangt so zu dem Begriffe des *Gesamtfehlers* F vermöge der Gleichung:

$$F\int d\omega = \int d\omega \log\left(\frac{m}{m_0}\right)^2,$$

46) *B. Riemann*, Diss. Göttingen 1851 = Werke (1876), p. 40. Erste Durchführung für die Abbildung des Quadrats und Dreiecks, der Ellipse etc. auf den Kreis bei *H. A. Schwarz*, 1864; Über einige Abbildungsaufgaben, J. f. Math. 70 (1869), p. 105 = Ges. Abh. 2, p. 65; des allgemeinen *Polygons* bei *E. B. Christoffel*, sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 89; vgl. *Darboux*, Leçons 1, p. 176; von durch *Kreisbogen* begrenzten Polygonen bei *Schwarz*, J. f. Math. 70, p. 115, von durch *algebraische Kurven* begrenzten Flächenstücken durch *F. Lindemann*, Münch. Ber. 1894, p. 403; insbesondere für von Bogen *konfokaler Kegelschnitte* begrenzte Polygone, derselbe, Münch. Ber. 1895, p. 219; 1896, p. 401; endlich *A. Göttler*, konforme Abbildung eines von konzentrischen gleichseitigen Kegelschnitten oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes, Diss. München 1897; *N. Perry*, Das Problem der konformen Abbildung für eine spezielle Kurve von der Ordnung $3n$, Diss. München 1901; sodann Münch. Ber. 1902, p. 43.

47) *Gauss*, Gött. Abh. 1844 = Werke 4, p. 261; vgl. indess Werke 4, p. 209. Bei *Lagrange*, Oeuvres compl. 4, p. 637 werden diese Fragen nur ganz allgemein berührt. Vgl. auch *P. Tschebyscheff*, Oeuvres 1, p. 233 f. (1856); *A. A. Markoff*, Über die günstigste Abbildung eines Teils einer Rotationsoberfläche auf die Ebene, Petersb. Bull. 52 (1895), p. 77; Referat von *M. Sintzow* in den Fortschritten der Math. 26, p. 772, Berlin 1898.

48) *H. Weber*, Über ein Prinzip der Abbildung der Teile der Erdoberfläche, J. f. Math. 67 (1867), p. 229.

wo $d\omega$ das Flächenelement bedeutet; die Abbildung ist *eindeutig* bestimmt, wenn F ein *Minimum* werden soll und die Bilder zweier Orte gegeben sind, aber die Lösung dieses Problems hängt von der einer linearen partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung ab.

Eisenlohr[49]) definiert als Fehler an einer Stelle den Maximalbetrag der geodätischen Krümmung (III D 3, Nr. 12) der Abbildung der geodätischen Linien der Fläche; das ähnlich wie bei *Weber* konstruierte Fehlerintegral führt auf ein *einfacheres* Minimumproblem, dessen unmittelbare Verwendung für praktische Fragen bisher nicht völlig durchgeführt ist.

6. Konforme Abbildungen bei mehr Dimensionen. Die konformen Punkttransformationen des *euklidischen Raumes von n Dimensionen* werden allgemein durch die Gleichung

$$\sum dx_i^2 = \varrho \sum dX_i^2, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ausgedrückt. *Liouville*[50]) bewies zuerst analytisch den wichtigen Satz, (vgl. III D 1, 2, Nr. 24) dass für $n = 3$ alle konformen Transformationen in der Ähnlichkeit (Spiegelung) und der Abbildung durch reziproke Radii vectores bestehen. Synthetische Untersuchungen über diesen Satz sind erst später entstanden[51]).

Lie[52]) bestimmte schon 1871 nach synthetischen Gesichtspunkten

49) *A. Eisenlohr,* J. f. Math. 72 (1876), p. 143; vgl. auch Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 10, p. 305 und *E. B. Christoffel,* Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche durch lokale Messungen auf derselben, J. f. Math. 64 (1864), p. 193.

50) *Liouville,* J. de math. 12 (1847), p. 265, dann Note VI der Applications von *Monge,* Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique, ib. p. 609. Analytische Beweise für die bereits von *Liouville* vermutete Ausdehnung des Satzes auf n Variabele bei *R. Beez,* Ztschr. Math. Physik 20 (1875), p. 252 und *Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 7 (1878), p. 282.

51) Die synthetischen Beweise für $n = 3$ von *L. Bianchi* Giorn. di mat. 17 (1879), p. 40, und *A. Capelli,* Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio, Ann. di mat. (2) 1 (1885), p. 227, der wie *Lie* (Nr. 4) schon die allgemeine Transformation aus spezielleren zusammensetzt, beruhen zum Teil noch auf beschränkenden Voraussetzungen; vgl. auch *E. Goursat,* sur les substitutions régulières de l'espace, Ann. éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 1. Bei *A. Giacomini* (Giorn. di mat. (2) 4 (1897)), p. 125 wird der Satz auf das *Dupin'sche* Theorem (III D 6b) zurückgeführt.

52) *Lie,* Gött. Nachrichten 1871, p. 191 u. 535. Vgl. *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geometrie, autograph. Vorlesungen, Göttingen 1892/93, p. 378 ff.; desgl. *Darboux*'s Darstellung, sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions, Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 34. Auf die allgemeine invariantentheoretische Behandlung (I B 2, Nr. 22) der Transformation der Differen-

alle konformen Punkttransformationen der n-fachen Mannigfaltigkeit. Eine vollständige synthetische Ausführung für $n = 3$ findet sich in seiner Geometrie der Berührungstransformationen p. 419; man vergleiche die in Nr. 4 gegebene symbolische Formel $C = RART$, welche den *Liouville'schen* Satz für $n = 3$ enthält.

Es sei hier überhaupt auf die Bedeutung der Berührungstransformationen für ähnliche Probleme der Geometrie, wie z. B. das der Krümmungslinien in Haupttangentenkurven, etc. verwiesen[53]) (III D 8).

7. Äquivalente oder flächentreue Abbildungen. Zwei Flächen sind *äquivalent* oder *flächentreu*[54]) auf einander abgebildet, wenn die Inhalte korrespondirender Flächenstücke in konstantem Verhältnisse stehen (dasselbe kann übrigens ohne Beschränkung [durch Ähnlichkeitstransformation] gleich Eins angenommen werden); d. h. wenn die Parameter u', v' der Fläche F' solche Funktionen der Parameter u, v sind, dass die Gleichung

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{T}{T'}$$

erfüllt ist[55]).

Das Problem kommt auch hier auf das der Abbildung einer Fläche auf die Ebene zurück. Man hat daher *erstens* die rechtwinkligen Koordinaten x, y der Ebene so von den Parametern u, v der Fläche abhängig zu machen, dass

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = T \tag{1}$$

wird, und *zweitens* alle äquivalenten Abbildungen der Ebene x, y auf eine zweite mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v vermöge der Gleichung:

---

tialausdrücke nach *E. B. Christoffel* (J. f. Math. 70 (1869), p. 46) wird die Frage von *E. Cotton*, Paris, C. R. 125 (1896), p. 225 u. 127 (1898), p. 349 zurückgeführt.

53) Vgl. namentlich die Darstellung bei *Darboux*, Leçons 2, p. 219, 314 ff.; 4, p. 172 ff.; *Lie-Scheffers*, p. 649 ff.

54) Bezeichnung von *A. Breusing* und *E. Hammer*; représentation authalique bei *Tissot*, p. 75, isomer bei *Lambert* 1772. *M. Fiorini*, le projezioni delle carte geografiche, Bologna 1881; le projezioni quantitative ed equivalenti nella cartografia, Rom 1887 unterscheidet noch die quantitativen Abbildungen von den äquivalenten, bei denen der Modul gleich Eins ist.

55) *Lambert* behandelt bereits mehrere flächentreue Abbildungen, Beiträge (Fussn. 64), p. 181. Neuere Arbeiten von *Fr. Schellhammer*, Zeitschr. Math. Physik 23 (1878), p. 68; *A. Korkine*, sur les cartes géographiques, Math. Ann. 35 (1889), p. 588; vgl. das Referat von *F. August*, Fortschritte d. Math. 22, p. 830; *E. Holländer*, Diss. Halle 1891, auch Programm Gymn. Mühlheim a. Ruhr, Nr. 447 (1891).

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \tag{2}$$

zu suchen. Während nun die Gleichung (1) naturgemäss auf grössere Schwierigkeiten führt (in einfacher Weise gelingt die Lösung z. B. für diejenigen Flächen, bei denen T von der Form $U \cdot V$ ist[56]), lässt sich die Gleichung (2) nach *Gravé*[57]) vollständig durch die nach x und y aufzulösenden Relationen

$$v = \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

in denen Ω irgend eine Funktion von u, x bedeutet, für die

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \, \partial x}$$

nicht Null ist, resp. in dem hierdurch nicht berücksichtigten Ausnahmefall, wo den Geraden $u =$ const. die Geraden $x =$ const. entsprechen, durch

$$x = \varphi(u)$$
$$y = v : \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \psi(u)$$

lösen, wobei φ, ψ willkürliche Funktionen von u sind.

Andere hierher gehörige Probleme entstehen durch die Verbindung mit dem *Tissot*'schen Satze (Nr. 2). Man kann z. B. verlangen, dass dem System der *Tissot*'schen Hauptkurven der einen Ebene (Nr. 2) ein orthogonales System von vorgeschriebenem Charakter entspreche. Ist das letztere insbesondere von den Parallelen zu den Axen eines rechtwinkligen Systemes x, y gebildet, so hat man das System der beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

d. h. *Tissot*'s Problem der *rektangulären Abbildung.* Zur Bestimmung von y ergiebt sich, wenn die Differentialquotienten nach u, v durch p, q, r, s, t bezeichnet werden, durch Elimination von x die Gleichung:

$$(p^2 - q^2)(r - t) + 4pqs = 0,$$

die durch Berührungstransformation auf die *Laplace*'sche Gleichung[58])

56) *E. Holländer,* Diss., p. 6 (Fussn. 55).

57) *D. A. Gravé,* sur la construction des cartes géographiques, J. de Math. (5) 1 (1896), p. 317; vgl. auch *Scheffers* 1, p. 123. Siehe indes die Notiz bei *Gauss,* Werke 8, p. 373.

58) *P. G. Laplace,* Paris Hist., année 1773, p. 341.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = z$$

reduziert wird[59]). In ganz allgemeiner Weise giebt *Darboux*[60]) mit Hilfe der Differentialparameter die partielle Differentialgleichung, vermöge der eine gegebene Fläche in der soeben bezeichneten Weise äquivalent auf die Ebene abgebildet wird.

In Analogie zu den Untersuchungen *Lagrange*'s bestimmt *Gravé*[61]) alle äquivalenten Abbildungen, bei denen ein rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem der Ebene in Systeme von *Kreisen* (Geraden) übergeht.

Untersuchungen über flächentreue Abbildungen bei vorgeschriebener Begrenzung (Problem *B*) finden sich bereits bei *Schellhammer*[62]) (Abbildung des Polygons auf ein Dreieck, schliesslich auch beliebiger Konturen auf den Kreis).

Flächentreue Abbildungen im *Raume* haben nur einen sehr beschränkten Charakter; sie reduzieren sich auf die Ähnlichkeit[63]).

8. Die Kartenkonstruktionen. Die Konstruktion geographischer Karten auf Grund der in den Nr. 3—7 besprochenen Abbildungsarten kann hier nur im allgemeinen behandelt werden[64]) (VI 4).

---

59) *Holländer,* Diss. p. 14; zu derselben Gleichung gelangt auch *A. Korkine* (Fussn. 55). Über die Lösung der *Laplace*'schen Gleichung vgl. *S. D. Poisson,* Théorie de la chaleur, 1835, p. 146; desgl. J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 215, sowie die umfassende Darstellung bei *Darboux,* Leçons 2, p. 23 ff. (II A 5, Nr. 53).

60) *Darboux,* Leçons 3, p. 206. Der spezielle Fall der Abbildung der *Kugel* in seiner Beziehung zu den Flächen konstanter Krümmung ist von *L. Bianchi,* sopra una classe di rappresentazioni equivalenti della sfera sul piano, Roma Lincei Rend. (4) 6 (1890), p. 226 durchgeführt.

61) *D. A. Gravé,* J. de math. (5) 1 (1896), p. 317; es ergeben sich dabei elf, im wesentlichen sechs verschiedene Typen (p. 359).

62) *Schellhammer,* a. a. O. (Fussn. 55), p. 81.

63) *A. Razzaboni,* Sulle rappresentazioni dello spazio sopra se stesso che conservano le aree delle superficie correspondenti, Bologna Rend. 1889/90, p. 21; über Flächen, die mit parallelen Tangentenebenen flächentreu aufeinander bezogen sind, siehe *C. Guichard,* Par. C. R. 136 (1903), p. 151.

64) Die Theorie der Abbildung und Abwickelung der Flächen hat sich überhaupt aus dem geographischen Problem entwickelt und hat auch bis in die neueste Zeit immer wieder an dasselbe angeknüpft. Zur Litteratur vergleiche man: *J. H. Lambert,* Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, 3, Berlin 1772; *Lagrange,* sur la construction des cartes géographiques, Oeuvres compl. 4; *A. Tissot,* Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881, deutsche Bearbeitung von *E. Hammer,* Stuttgart 1887; *A. Germain,* traité des cartes géographiques, Paris 1866; *Th. Craig,* A treatise on projection, Washington 1882; *K. Zöppritz,* Leitfaden der Kartenentwurfslehre, Leipzig 1884, 2. Auflage von *A. Bludau,* Leipzig 1899; *E. Hammer,* Über die geographisch wichtigsten Karten-

Betrachtet man als wesentlichste *Elemente* einer auf die *Ebene* abzubildenden Fläche die Winkel, Flächen und Längengrössen der auf ihr gezeichneten Figuren, so wird man derjenigen Darstellung den Vorzug geben, welche die wahren Verhältnisse derselben in einem gewissen gegebenen Bereiche am genauesten wiedergiebt.

Bei der *winkeltreuen* Abbildung findet zwar infinitesimale Ähnlichkeit statt, die endlichen Längen- und Flächengrössen werden aber sehr erhebliche Verzerrungen aufweisen können, und die in Nr. 5 besprochenen vorteilhaftesten konformen Abbildungen haben bisher in der Praxis weniger Berücksichtigung erfahren.

Allgemeine *flächentreue* Abbildungen dagegen sind viel zu willkürlich und werden nur dann verwendbar, wenn sie sich mit der Forderung der *Längentreue* für charakteristische Kurvensysteme *verbinden.* Aus diesen Gesichtspunkten entspringt eine grosse Zahl von *Kartenentwürfen,* deren prinzipielle Nomenklatur trotz der systematischen Bezeichnungen *Tissot*'s[65]) und neuerer Kartographen wie *Hammer* und *Zöppritz* noch immer nicht einheitlich resp. übersichtlich festgesetzt erscheint.

Unter Hinweis auf die in den Fussnoten angegebene neuere Litteratur sei hier nur die Untersuchung von *Tissot*[66]) über die Verzerrung der Winkel, Flächen und Längengrössen und ihre gleichmässige Verwendung bei der Konstruktion einer Karte hervorgehoben.

Grundlegend ist dabei der *Tissot*'sche Satz (Nr. 2). Das Bild eines unendlich kleinen um P mit dem Radius r auf der Fläche beschriebenen Kreises ist daher eine orthogonale Projektion derselben,

---

projektionen, Stuttgart 1889; *N. Herz*, Lehrbuch der Landkartenprojektionen, Leipzig 1885; *A. Breusing,* das Verebnen der Kugeloberfläche, Leipzig 1892; *M. Fiorini,* Le projezioni della cartografia, Bologna 1881; le projezioni quantitative ed equivalenti della cartografia, Roma 1887; *M. Fiorini*, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion, frei bearbeitet ven *S. Günther,* Leipzig 1895. Man vergleiche ferner die historischen Notizen von *S. Günther,* Geograph. Jahrbuch 9, p. 405; 12, p. 1; 14, p. 183; *E. Hammer,* ibid. 14, p. 4; sowie das schon erwähnte Werk von *E. Hammer,* Stuttgart 1887, p. 88; ferner *Eug. Gelcich,* Geschichte der flächentreuen Projektionen, Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, 21, p. 285 (Berlin 1886); *d'Avczac,* Coup d'oeil historique sur les projections des cartes, Paris société de géographie Bull. (5) 5 (1863), p. 351. — Erste Weltkarte in stereographischer Projection 1512; erste flächentreue Projektion 1514 nach *Joh. Staben* von *J. Werner* (Annotationes Joan. Verneri, Nürnberg 1514).

65) *Tissot*'s Nomenklatur im Mémoire, Paris 1881, p. 129.

66) Vgl. *Tissot-Hammer* 64), p. 1—21; die mathem. Theorie der Abbildung d. Rotationsflächen daselbst, p. 284 ff.

d. h. eine *Ellipse* mit den Axen ra, rb. Ist 2ω die grösste Veränderung, welche für den Winkel zweier von P ausgehenden Tangentenrichtungen eintritt, und n das Verhältnis korrespondierender infinitesimaler Flächenstücke, so ist:

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad n = ab;$$

bei konformer Abbildung ist $a = b$, bei äquivalenter $ab = 1$. Die Längenverzerrung der Hauptrichtungen ist a, b (dies sind zugleich die Extremwerte), die Flächenverzerrung ist ab; bei flächentreuer Abbildung fallen die dann immer *reellen* automekoischen Kurven mit den Richtungen der extremalen Winkelverzerrung zusammen. Mit Rücksicht hierauf konstruierte *Tissot*[67]) seine *kompensative Projektion* eines nach allen Richtungen um einen Nullpunkt ausgedehnten Bereiches auf einer Rotationsfläche. Entsprechen den Axen der rechtwinkligen Koordinaten x, y der Ebene der Nullmeridian und Nullbreitenkreis, ist φ die Breite, r der Halbmesser des zugehörigen Breitenkreises, sind ferner φ_0, r_0 die Werte von φ, r für den Nullpunkt, s der Bogen des Meridians zwischen den Breitenkreisen φ_0 und φ, endlich t der Bogen des Breitenkreises vom Nullmeridian aus gezählt, so besitzen alle Projektionsarten, welche durch die Gleichungen

$$x = s + \frac{\sin\varphi_0}{2r_0}t^2 + \frac{A}{3}s^3 - Bs^2t + Cst^2 + \frac{B}{3}t^3$$
$$y = \frac{r}{r_0}t + \frac{Bs^3}{3} + As^2t - Bst^2 + \frac{C}{3}t^3$$

gegeben sind, unter der Bedingung

$$2(A + C)\cos^2\varphi_0 = \cos 2\varphi_0$$

Winkelverzerrungen von dritter, Längenverzerrungen von zweiter Ordnung in Bezug auf s, t. Durch ein graphisches Verfahren lassen sich die Konstanten schliesslich so wählen, dass diese Abweichungen den möglichst kleinen Betrag für ein gegebenes, allerdings innerhalb gewisser Grenzen liegendes endliches Gebiet erhalten. — Im Vergleich zu *Lagrange*'s, im allgemeinen auch von *Gauss* und anderen später festgehaltenen Standpunkte, la plus grande perfection d'une carte géographique doit consister dans la moindre altération des distances (Oeuvres compl. 4, p. 637), erscheint *Tissot*'s Verfahren als ein wesentlicher Fortschritt.

9. Die geodätische Abbildung, représentation géodésique, rappresentazione geodetica. *Beltrami*[68]) stellte zuerst die Aufgabe, alle

67) Siehe *Tissot-Hammer* 64), p. 30 ff.

68) *E. Beltrami,* Riportare i punti di una superficie sopra un piano in

Flächen zu finden, die sich auf die *Ebene* so abbilden lassen, dass wie bei der Zentralprojektion der Kugel, den *geodätischen Linien* die *Geraden* entsprechen. Es sind dies die *Flächen konstanter Krümmung*[69]), und aus einer Abbildung dieser Art gehen bei einer gegebenen Fläche nach *A. F. Möbius* alle anderen durch Kollineation der Ebene hervor.

Das gleichfalls von *Beltrami*[70]) gestellte Problem der Flächen, die mit Erhaltung der geodätischen Linien auf einander bezogen werden können, ohne zu einander isometrisch oder ähnlich zu sein, löste *Dini*[71]) für reelle Abbildungen und reelle Flächen mit Benutzung des *Tissot*'schen Satzes (Nr. 2). Zwei Flächen F und F' stehen nur dann in *Dini*'scher Beziehung, wenn ihre Längenelemente die *Liouville*'sche Form (III D 3, Nr. 18)[72]):

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2)$$
$$ds'^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right)$$

haben, aber zu jeder Fläche F gehören noch ∞^1 Flächen F', weil, ohne Änderung von $U - V$, U durch $U + h$, V durch $V + h$ ersetzt werden können.

Ohne Beschränkung auf das Reelle löste *Lie*[73]) das Problem und fand ausser den *Liouville*'schen Flächen die des Längenelementes[74])

$$ds^2 = (u + V)\,du\,dv,$$

wo nun bei notwendig imaginärer Beziehung nur die *eine* Schar der Minimalkurven auf beiden Flächen sich entspricht.

---

modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, Ann. di mat. (1) 7 (1886), p. 185; Opere 1, p. 262; in vereinfachter Form bei *Dini* (siehe Fussnote 71) und *Darboux*, Leçons 3, p. 40.

69) *Beltrami,* ibid., p. 189, 203 (III D 5, Nr. 34).

70) ibid., p. 204.

71) *U. Dini,* Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche, Ann. di mat. (2) 8 (1869), p. 269; vgl. *Darboux,* Leçons, p. 42, auch *Scheffers,* 2 p. 424; *Bianchi,* p. 434; zwei auf einander geodätisch abbildbare Flächen sind daher „im allgemeinen" zu einander ähnlich.

72) *J. Liouville,* J. de math. 11 (1846), p. 345. Die beiden den Formen von ds^2, ds_1^2 entsprechenden Flächen können auch isometrisch sein; vgl. *R. Liouville,* Paris, C. R. 108 (1889), p. 335. *L. Raffy* nennt die Flächen mit *Liouville*'schem Längenelement *surfaces harmoniques,* Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 63.

73) *Lie,* Universitäts-Programm Christiania 1879; Math. Ann. 20 (1882), p. 419; Leipz. Berichte 1889, p. 155; *Lie-Scheffers* I, p. 166. Vgl. auch die Darstellung bei *Darboux,* Leçons 3, p. 63 ff.; desgl. *G. Königs,* Toulouse Ann. 6 (1892), p. 1.

74) Über die Beziehung der speziellen Flächenklasse der *Spiralflächen* (III D 5, Nr. 7) $ds^2 = e^{2u} f(u + v)\,du\,dv$ zur *Dini*'schen und *Lie*'schen Abbildung, vgl. *Lie,* Math. Ann. 20, p. 390, 431; *Lie-Scheffers* 1, p. 162.

Wesentlich verallgemeinert hat das *Dini*'sche Problem *Fr. Busse*[75]) durch die Forderung, dass jeder geodätischen Linie von F ein geodätischer Kreis von F' entsprechen soll[76]). Das System der nach *Dini* gebildeten Gleichungen lässt sich auch hier unter Voraussetzung der Minimalkurven von F' integrieren; in ausgezeichneter Weise tritt dabei die „*Schwarz*'sche Derivierte" hervor[77]). Natürlich gehören zu diesen Flächenpaaren F und F' je zwei solche, welche der *Dini*'schen Aufgabe entsprechen. Die Bedingungen der allgemeineren *Busse*'schen Frage sind dagegen nur dann erfüllt, wenn F zu einer *willkürlichen Rotationsfläche* isometrisch ist. Und alsdann muss die Fläche F *konform* auf eine Fläche F_0, welche mit F in *Dini*'scher Beziehung steht, so abgebildet sein, dass jeder geodätischen Linie von F_0 ein geodätischer Kreis von F' entspricht; dabei ist auch F' selbst isometrisch zu einer Rotationsfläche[78]). Und bei den Flächen F_0 und F', und *nur* bei diesen, entspricht auch *jedem* geodätischen Kreise wieder ein solcher[79]). Ist insbesondere F_0 von konstanter Krümmung, so kann auf dieselbe *jede* andere Fläche konstanter Krümmung (und nur eine solche) konform so abgebildet werden, dass jeder geodätischen Linie von F_0 ein geodätischer Kreis von F' entspricht[80]).

Die soeben berührte Frage nach den Flächen, bei denen *jedem* geodätischen Kreise wieder ein solcher entspricht, ist übrigens weit früher von *Lie* behandelt, der zu denselben Resultaten gelangte[81]); diese Frage lässt sich übrigens noch dahin erweitern, dass nur das Entsprechen von ∞^2 geodätischen Kreisen verlangt wird[82]).

75) *Fr. Busse,* Über diejenige punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke auf einander, bei welcher jeder geodätischen Linie der einen eine Linie konstanter geodätischer Krümmung der andern entspricht, Berlin, Ber. 1896, p. 651.

76) So nach *Darboux*'s Bezeichnung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung (III D 3, Nr. 38) (Kurven kürzesten Umrings bei *Minding,* J. f. Math. 6 (1830), p. 159), in den Leçons 3, p. 151, im Gegensatz zu den geodätischen Kreisen von *Gauss* (III D 3, Nr. 15).

77) Siehe *H. A. Schwarz,* Über einige Abbildungsaufgaben, J. f. Math. 70 (1869), p. 116 = Ges. Abh. 2, p. 65; *Busse* 75), p. 653 (I B 2, Nr. 20).

78) *Busse,* ibid. p. 659.

79) *Busse,* ibid. p. 660.

80) *Busse,* ibid. p. 663.

81) *Lie,* Archiv for Math. og Naturv. 9 (1884), p. 62; vollständige Durchführung, ebenfalls mit Benutzung der *Schwarz'schen* Derivierten in *Lie-Scheffers* 1 (1893), p. 165). Es sei hier zugleich hingewiesen auf die Bedeutung der *Lie*schen Untersuchungen über Berührungstransformationen der Schar der geodätischen Kreise, die bereits 1884 begonnen, ebenda p. 133 behandelt werden (III D 8).

82) *Fr. Busse,* Dissertation Berlin 1896/97, Über eine spezielle konforme Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmaasses auf die Ebene, p. 7.

Eine andere Verallgemeinerung des *Beltrami*'schen Problems besteht in der Forderung, dass den ∞^2 geodätischen Linien der einen Fläche überhaupt Kurven einer bestimmten Gattung auf einer andern entsprechen sollen. So sind die Flächen konstanter Krümmung auch die einzigen, welche konform so auf die Ebene abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien Kreise (resp. Gerade) der Ebene entsprechen[83]) (III D 5, Nr. **34**).

In Bezug auf die *Dini*'schen Sätze aber ergeben sich noch weitere Fragen, die aufs engste mit der Lehre von der Abbildung zusammenhängen.

Ist das Längenelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

überhaupt in die *Liouville*'sche Form transformierbar, so muss die *partielle Differentialgleichung* der geodätischen Linien (III D 3, Nr. **16**):

$$(1) \qquad \Delta\theta = \frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{T^2} = 1$$

ein homogenes Integral von der Form

$$(2) \qquad A\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + 2B\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + C\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = \text{const.}$$

haben[84]). Ein besonderes Interesse gewinnen diejenigen Flächen, deren ds^2 auf *mehrfache* Art die Form von *Liouville* annehmen kann, die also auf einen grösseren Umfang von Flächen geodätisch abbildbar sind, wie im allgemeinen Falle. Nach *Darboux*[85]) ist jede Fläche, deren ds^2 auf *zwei* verschiedene Arten jene Form annehmen kann, auf ∞^1 verschiedene Weisen so transformierbar und so ergiebt sich das von *Darboux*[86]) gestellte Problem, das Längenelement dieser surfaces doublement harmoniques (*L. Raffy*[72])) zu bestimmen. Diese schwierige Frage, die in Zusammenhang mit *Lie*'s bereits 1882 be-

83) *Busse,* Dissertation, p. 9; ein allgemeinerer Satz bei *Lie-Scheffers,* p. 150.

84) *Darboux,* Leçons 3, p. 331. Nach *Darboux* ist des Längenelement ds auf die *Liouville*'sche Form reduzierbar, wenn die *Formen* (1), (2) des Textes *keinen* gemeinsamen linearen Faktor $\alpha\frac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial v}$ haben; im Ausnahmefalle ist ds^2 von der Form *Lie*'s: $(u + V)\,du\,dv$ (s. p. 374).

85) *Darboux,* Leçons 2, p. 209; 3, p. 34.

86) *Darboux,* Leçons 2, p. 218. Vollständig behandelt *G. Ricci,* Lezioni p. 253 ff. diese Frage. Auf den Flächen konstanter Krümmung existieren ∞^4 Kurvensysteme von *Liouville*'schem Charakter (*Ricci,* p. 256); auf den zu Rotationsflächen isometrischen können unter gewissen Bedingungen ∞^2 Systeme vorhanden sein (p. 263); auf einer allgemeinen Fläche können sich unter gewissen Umständen ∞^1 ergeben.

gonnenen Untersuchungen über geodätische Linien steht[87]), ist von *Königs* und *Raffy* beantwortet worden[88]).

L. Bianchi[88a]) weist neuerdings auf eine Beziehung der geodätischen Abbildung zur Isometrie der Flächen hin. Auf einer Fläche F bilden die Kurven $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndu^2 = 0$, falls L, M, N *alle* Wertsysteme der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind, die den *Codazzi*'schen Gleichungen (III D 1, 2, Nr. 34; III D 3, Nr. 23) des zu F gehörigen ds^2 entsprechen, ein System *potentieller* Haupttangentenkurven. Sollen nun zwei Flächen F und Φ so aufeinander abgebildet sein, dass alle potentiellen Haupttangentenkurven von F denen von Φ entsprechen, so muss für ihre Fundamentalgrössen L, M, N; $\mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$, die Beziehung bestehen:

$$L:M:N = \mathsf{\Lambda}:\mathsf{M}:\mathsf{N};$$

notwendig ist dazu, dass F und Φ *Dini*'sche Flächenpaare sind, und man hat unter diesen diejenigen besonderen Paare auszuwählen, auf denen sich zugleich die geodätischen Kurven und konjugierten Systeme entsprechen.

10. Die projektive oder kollineare Abbildung[89]). Diese Abbildungen können hier nur insoweit betrachtet werden, als dabei für die Flächentheorie eigentümliche Probleme hervortreten. Die einzige *konform perspektive Abbildung* ist die durch Ähnlichkeit oder reziproke Radii vectores[90]). Bei der Kollineation der Ebene besteht das System der *Tissot*'schen Hauptkurven (Nr. 2) aus konfokalen Kegelschnitten[91]) (III C 1, Nr. 65). Insbesondere hat *Scheffers*[92]) die *Verzerrungsgesetze der Figuren bei der ebenen Kollineation* synthetisch be-

87) *Lie,* Untersuchungen über geodätische Kurven, Math. Ann. 20 (1882), p. 357.

88) *G. Königs,* Résumé d'un mémoire sur les lignes géodésiques, Toulouse, Ann. 6 (1892), p. 1; Mémoire sur les lignes géodésiques, Paris Mém. savants étr. 31 (1894), Nr. 6; sodann *L. Raffy,* Recherches sur les surfaces harmoniques, résumé, Bull. soc. math. 22 (1894), p. 63 und 84; Determination des éléments doubles harmoniques, J. de math. (4) 10 (1894), p. 331; vgl. auch die in Fussnote 86 erwähnte Arbeit von *G. Ricci* (1898).

88a) *L. Bianchi,* Sopra un problema della teoria della deformazione delle superficie, Roma Lincei, Rend. (5) 9 (1902), p. 265.

89) Siehe Nr. 2.

90) So z. B. *R. Hoppe,* Archiv Math. Phys. (2) 4 (1886), p. 328.

91) Siehe *J. Liouville,* J. de math. 9 (1846), p. 346.

92) *G. Scheffers,* Verzerrung bei projektiver Abbildung ebener Figuren, Leipz. Ber. 44 (1892), p. 162. Analoge Untersuchungen für den Raum scheinen noch nicht ausführlicher behandelt zu sein. Vgl. indes *F. Richelot,* J. f. Math. 70 (1869), p. 137, 146.

handelt. Es giebt zwei Systeme konfokaler Parabeln, deren Kontingenzwinkel bei der Abbildung (bis auf Grössen höherer Ordnung) ungeändert bleiben, und je zwei Tangenten ein und derselben Parabel behalten vermöge der Kollineation ungeänderten Neigungswinkel. Umgekehrt sind die *Liouville*'schen konfokalen Kegelschnitte die Kurven der grössten Verzerrung der Kontingenzwinkel, in deren Tangenten zugleich die grösste Längenverzerrung stattfindet, während die automekoischen Kurven transcendent sind.

Sodann sei *Lie*'s Problem[93]) *der Flächen, die kontinuirliche projektive Transformationsgruppen in sich* gestatten, erwähnt. Wenn eine Fläche *mehr* als ∞^2 Transformationen dieser Art besitzt, so ist sie eine Regelfläche (eine Fläche zweiten Grades lässt sogar ∞^6 zu); die Flächen[94]) mit ∞^2 solchen Transformationen ergeben sieben, teils algebraische, teils transcendente Typen; endlich giebt es noch 10 Typen von Flächen mit ∞^1 Transformationen. Hieran schliesst sich das von *Lie* schon 1872 in Angriff genommene Problem der Bestimmung der *Translationsflächen,* die in mehrfacher Weise durch Translation einer Kurve erzeugt werden können[95]) (III D 5, Nr. 6).

Andere Fragen betreffen die *Erhaltung gewisser Kurvengattungen* auf den Flächen bei projektiver Umformung. Invariant sind z. B. die Haupttangentenkurven (III D 3, Nr. 36), allgemeiner die konjugierten Systeme (Nr. 2)[96]) (III D 3, Nr. 37); man vergleiche damit

93) *Lie,* Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuirliche Schar projektiver Transformationen enthalten. Erste Mitteilung von 1869; vollständige Durchführung in Band 3 der Theorie der Transformationsgruppen, Leipz. 1893, p. 180 und den Leipz. Ber. 46 (1895), p. 209; weniger vollständig bei *F. Enriques,* Le superficie con infinite projezioni projettivi in se stesse, Veneto Istit. Atti (7) 4 (1893), p. 1590; (7) 5 (1894), p. 638. Vgl. auch die Untersuchungen von *G. Fano,* Roma Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 119; (5) 8 (1899), p. 562, sowie weitergehende Betrachtungen von *G. Castelnuovo* und *F. Enriques,* Paris, C. R. 121 (1895), p. 242; *P. Painlevé,* ibid., p. 318. Über die *Klein-Lie*'schen *W*-Flächen s. III D 5, Nr. 6.

94) *Lie,* Leipz. Ber. ibid., p. 218—235; bemerkenswerte Untergruppe daselbst, p. 247 mit ∞^2 *vertauschbaren* Transformationen.

95) *Lie,* Christiania Verhandl. 1872, p. 27; Archiv f. Math. og Naturvidensk. 7; sodann: Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem, Paris, C. R. 114, p. 277 (1892); Leipz. Ber. 48 (1896), p. 141; 49 (1895), p. 181; vgl. *Lie-Scheffers* 1, p. 398.

96) Die sogenannte zweite Differentialform der Flächentheorie (III D 1, 2, Nr. 34; III D 3, Nr. 8)

$$L du^2 + 2 M du\, dv + N dv^2$$

ist überhaupt in Bezug auf solche Transformationen invariant derart, dass die L, M, N nur einen gemeinsamen Faktor bei denselben erhalten; vgl. *A. Voss,* Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 39 (1891), p. 189; ins-

wieder die Invarianz der Krümmungslinien bei der Transformation durch reziproke Radien (III D 3, Nr. 35), resp. die *Lie*'schen Berührungstransformationen, welche Krümmungslinien in Haupttangentenkurven verwandeln (III D 8) etc. Bei der Projektion von Flächen auf eine Ebene ergiebt sich der Satz von *Königs*[97]) (III D 3, Nr. 36): die Projektion der Haupttangentenkurven bildet ein Kurvensystem gleicher Invarianten der betreffenden *Laplace*'schen Differentialgleichung. Auch hier scheint die Kollineation im Raume, namentlich in ihren Beziehungen zu *metrischen* Grössen, weniger vollständig untersucht zu sein[98]).

11. Die sphärische Abbildung (III D 3, Nr. 7). Bei *Gauss*'[99]) sphärischer Abbildung gehört zu jedem Punkte P der aber als nicht developpabel vorausgesetzten Fläche F der Punkt p der Einheitskugel, in dem die letztere von dem durch ihr Zentrum parallel zur *positiven* Flächennormale von P gezogenen Halbstrahle getroffen wird[100]); die Abbildung hat dabei gleichen oder entgegengesetzten Sinn in Bezug auf die Punkte P und p, je nachdem die Krümmung von F daselbst elliptisch oder hyperbolisch ist, falls man die Fläche von ihrer *positiven* Seite, die Kugel von aussen betrachtet[101]). Für Punkte mit hyperbolischer oder elliptischer Krümmung ist die Abbildung immer eine *umkehrbar eindeutige*. Eine Mehrdeutigkeit tritt für die Umgebung parabolischer Flächenpunkte auf, die ausführlicher zuerst von *Hilbert*, insbesondere aber von *W. Boy* in Rücksicht auf ihre verschiedenen Gattungen untersucht sind[102]). Zugleich entspricht jeder Tangente PP' auf F die Tangente pp' der Kugel, welche zur konjugierten Richtung von PP' *senkrecht* steht[103]); ist also PP' insbesondere eine

---

besondere auch *Bianchi*'s *isotherm konjugierte* Systeme $M = 0$, $L = N$ (*Bianchi*, p. 136) (III D 3, Nr. 42).

97) *G. Königs*, Paris, C. R. 114 (1892), p. 55; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 33.

98) Vgl. *A. Voss*, Math. Ann. 39 (1891), p. 179; hinsichtlich der Transformation des Krümmungsmaasses und anderer invarianter Gebilde siehe auch *R. Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 212; 37 (1892), p. 186; *G. Vivanti* (ibid. 37, p. 1).

99) *Gauss*, Disquisitiones art. 6, vgl. indessen Fussn. 2.

100) Die Punkte P, p besitzen daher bei jeder Beleuchtung durch parallele Strahlen gleiche Helligkeit.

101) Diese Vorzeichenunterscheidung schon bei *Gauss*; insbes. Werke 8, p. 425. Vgl. *S. Finsterwalder*, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsch. Math.-Verein. Jahresber. 6 (1899), p. 60; *J. Hadamard*, J. de math. (5) 3 (1897), p. 352; auch *Scheffers* 2, p. 210.

102) Vgl. *Finsterwalder*, Fussn. 101; *W. Boy*, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Diss. Göttingen 1901, p. 18.

103) *Darboux*, Leçons 1, p. 201; *Bianchi*, p. 118.

der Haupttangenten, so wird pp' senkrecht zu PP',[104]) und konjugierte Kurvensysteme von F bilden sich daher mit *ungeändertem Sinus* ihres Koordinatenwinkels ω auf die Kugel ab[105]). Für die *Tangenten der Krümmungslinien* von F und *nur für diese* wird endlich $pp' \parallel PP'$. Bezeichnet man die Richtungscosinus der Normalen, d. h. die Koordinaten des Punktes p, durch X, Y, Z, so erhält man für das Längenelement $d\sigma$ der Kugel die Gleichung:

$$d\sigma^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

wobei:

$$e = \frac{1}{T^2}(EM^2 - 2FLM + GL^2) = hL - kE$$

$$f = \frac{1}{T^2}(EMN - F(LN + M^2) + GLM) = hM - kF$$

$$g = \frac{1}{T^2}(EN^2 - 2FMN + GM^2) = hN - kG,$$

falls k das *Krümmungsmass* und h die mittlere Krümmung (III D 1, 2, Nr. 35):

$$h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{T^2}$$

bedeutet.

Und hieraus folgert man wieder den *Bonnet*'schen Satz[106]), dass die Krümmungslinien ($F = 0$, $M = 0$) sich bei jeder Fläche in ein Orthogonalsystem auf der Kugel abbilden (III D 3, Nr. 35), und dass — von dem trivialen Falle der *Kugel* selbst (III D 3, Nr. 4), wo $E:F:G = L:M:N$, abgesehen — die *sphärische Abbildung der Minimalflächen* (und *nur* dieser) zugleich eine *konforme* ist[107]) (III D 5, Nr. 21).

Von Wichtigkeit ist bei der sphärischen Abbildung der Flächen der von *Gauss* in Analogie zum Krümmungsmass der Kurven gewonnene *Begriff des Krümmungsmasses* k[108]):

104) Dieser Satz von der rechtwinkligen Drehung der Bilder der Haupttangenten wohl zuerst bei *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 4, p. 180 (1870/71).

105) Nach *Bianchi*, p. 120 geht bei elliptischer Krümmung ω in $\pi - \omega$ über; bei hyperbolischer Krümmung bleibt ω ungeändert.

106) *O. Bonnet*, Paris, C. R. 37, p. 529 (1853).

107) *O. Bonnet*, Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes, J. de math. (2) 5, p. 227 (1860). Ebenda auch der übrigens aus den im Texte angegebenen Werten der e, f, g folgende Satz, dass die Minimalkurven auf der Kugel den zu den Minimalkurven auf der Fläche konjugierten Kurven entsprechen.

108) Vgl. Fussn. 2 und III D 1, 2, Nr. **36**; III D 3, Nrr. **33**, **34**. Wegen der oft — namentlich von Nichtmathematikern — beanstandeten Bezeichnung als Krümmungsmass der Fläche vgl. *Gauss*' eigene Worte in den Gött. gel. Anz. 1827, Werke 4, p. 343: „Übrigens liegt weniger an den Benennungen selbst als daran, dass ihre Einführung durch prägnante Sätze gerechtfertigt wird."

$$k = \lim \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta o}\right) \text{ für } \Delta o = 0,$$

wo Δo und $\Delta\omega$ korrespondierende Flächenstücke von F und der Einheitskugel bezeichnen, nebst der *Curvatura integra*:

$$K = \int k\, dO,$$

welche in Erweiterung von *Gauss'* Satz über die Curvatura der geodätischen Dreiecke[109]) durch *Bonnet* mit Hülfe des *Green*'schen Satzes (II A 7 b, Nr. **12**) durch ein über die Kontur von F erstrecktes Randintegral ausgedrückt wird[110]) (III D 3, Nr. **15**).

Über die *Probleme* der sphärischen Abbildung siehe Nr. **33**.

12. Andere Abbildungen. Da die Lehre von der Abbildung der Flächen schliesslich völlig mit der von den eindeutigen Transformationen derselben zusammenfällt, muss sich die folgende Darstellung auf einige besonders interessante Fälle von Abbildungen beschränken.

Zu diesen gehört das bereits von *Tschebyscheff* gestellte[111]), später von *Voss*[112]) behandelte Problem des *habillement des surfaces* (III D 3 Nr. **40**). Ein aus etwa rechtwinkligen Maschen völlig biegsamer unausdehnbarer Fäden gebildetes „kontinuierliches Gewebe" kann man im allgemeinen immer auf unendlich viele Arten auf einer krummen Fläche (allerdings nur innerhalb gewisser Grenzen) ausbreiten, entsprechend den unendlich vielen Arten, auf die das Längenelement ds^2 auf die Form

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2f\, du\, dv$$

gebracht werden kann. Zwei der einfachsten Beispiele dieser Art geben die *Translationsflächen* (deren erzeugende Kurven ein solches Gewebe bilden), sowie die Flächen negativer konstanter Krümmung deren Haupttangentenkurven ein solches Netz bilden[113]), während das

109) *Gauss*, Disquisitiones art. 20. Seinem Vorzeichen nach wird k durch $\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ definiert.

110) *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 41 (1865), p. 216. In anderer Weise drückt *W. Boy* (Diss. Göttingen 1901) K durch ein über die sphärische Abbildung der Kontur von F auf die Kugel genommenes Integral aus.

111) *Tschebycheff*, Sur la coupe des vêtements, Assoc. franç. Congrès de Paris 1878. Bei *Darboux*, Leçons 3, p. 206 die partielle Differentialgleichung des Problems mit Hülfe der Differentialparameter.

112) *A. Voss*, Über ein Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen, Math. Ann. 19 (1881), p. 1; Deutsche Math.-Verein., Katalog, München 1892, p. 16.

113) Andere Beispiele bei *Voss*, Katalog, ibid., p. 20 ff. Vgl. auch *Servant*, Sur l'habillage des surfaces, Par. C. R. 135 (1902), p. 575.

Problem, auf der Kugel *alle* Systeme dieser Art zu finden, mit der Bestimmung der Flächen konstanter Krümmung $= 1$ zusammenfällt[114]).

Das *Christoffel*'sche Problem[115]) der Flächen, die durch parallele Normalen *konform* auf einander bezogen sind, liefert abgesehen von ähnlichen und gewissen imaginären Flächen die *Minimalflächen* (III D 5, Nr. 22) und die Klasse derjenigen Flächen, die durch ihre *Krümmungslinien* konform auf einander bezogen sind. Es sind dies die *isothermen Flächen Bour*'s[116]) (III D 5, Nr. 37), und zu *jeder* solchen Fläche mit dem Längenelement

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

gehört auch wirklich eine zweite:

$$ds'^2 = \frac{1}{\lambda}(du^2 + dv^2),$$

die in der angegebenen Weise der ersteren zugeordnet ist. *Darboux*[117]) hat neuerdings *Christoffel*'s Satz so erweitert, dass vermöge einer Enveloppenbeziehung von Kugeln jeder isothermen Fläche unendlich viele andere entsprechen.

Die für die konforme Abbildung in der Ebene bekannte Eigenschaft, dass korrespondierende Längenelemente einen nur vom Orte, nicht von der Richtung derselben abhängigen Winkel mit einander bilden, lässt sich nur in beschränkter Weise auf die Beziehungen zwischen zwei krummen Flächen übertragen. Soll überhaupt für zwei Flächen x, y, z; x_1, y_1, z_1 die Beziehung

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = \lambda\,ds\,ds'$$

bestehen (λ ist Funktion von u, v), *so ist die Beziehung konform*, wenn nicht $\lambda = 0$ ist, d. h. korrespondierende Elemente einen *rechten* Winkel mit einander bilden[118]). Eine solche *konforme* Beziehung

114) *J. Weingarten,* Zur Theorie der Oberflächen, J. f. Math. 62 (1863), p. 172.

115) *E. B. Christoffel,* Über eine allgemeine Eigenschaft der Minimumsflächen, J. f. Math. 67 (1867), p. 218; vgl. *Darboux,* Leçons 2, p. 239; desgl. 1, p. 326.

116) *E. Bour,* Sur la déformation des surfaces, J. éc. polyt. cah. 39, p. 118. Man beachte übrigens, dass die Fundamentalgrössen E, G der auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche nicht als willkürliche Funktionen von u, v angenommen werden können, sondern einer verwickelten Bedingung, die z. B. von *E. Combescure,* Paris, C. R. 74 (1872), p. 1514 aufgestellt wird, genügen. Über die Oberflächen mit isometrischen Krümmungslinien vgl. man ausser der in der Dissertation von *H. Willgrod,* Göttingen 1883 erwähnten Litteratur auch *J. Weingarten,* Über die Oberflächen, die durch ihre Krümmungslinien in Quadrate geteilt werden können, Berl. Ber. 1883, p. 1163.

117) *Darboux,* Sur les surfaces isothermiques, Ann. éc. norm. (3) 6 (1899), 491, insbes. p. 503.

118) Man erkennt leicht durch Anwendung des *Tissot*'schen Koordinaten-

findet aber nur dann wirklich statt, wenn die beiden Flächen Minimalflächen sind. Denn nun müssen, wie *Darboux*[119]) zeigt, die Gleichungen

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \lambda ds^2$$

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \mu ds\,ds_1 = \nu ds^2$$

erfüllt sein; aus ihnen folgt, dass die Flächen *Minimalflächen* sind, deren Tangentenebenen in korrespondierenden Punkten parallel laufen. Und umgekehrt sind zwei *beliebige* Minimalflächen stets in der gewünschten Beziehung, wenn man auf ihnen die Punkte mit parallelen Tangentenebenen einander zuordnet (III D 5, Nr. 23). Von *Goursat* ist das *Mathet*'sche[119]) Problem noch erweitert. Flächen mit entsprechenden Scharen paralleler Ebenen sind durch parallele Tangenten der entsprechenden Schnittkurven konform auf einander abgebildet, wenn diese Flächen entweder zwei „derivierte" Minimalflächen oder zwei Rotationsflächen sind[120]).

13. Die Strahlensysteme (III D 3, Nr. 5). In den vorigen Nummern sind meist besonders wichtige *Punkttransformationen* erwähnt. Die Zahl der Abbildungen wird weit grösser, wenn man auch noch die mannigfachen Beziehungen beachtet, die durch *Berührungstransformationen*, insbesondere aber durch die *Strahlensysteme* vermittelt werden. Da die neueren Fortschritte in der Theorie der Abbildung hauptsächlich auf diesem Gebiete liegen, erscheint eine kurze Darstellung der letzteren hier notwendig.

Bei einem *Strahlensystem*[121]), einer *Kongruenz*, d. h. einem (reellen) kontinuierlichen System von zweifach unendlich vielen Geraden, giebt es zu jedem Strahle g zwei benachbarte, deren kürzeste Abstände d_1 und d_2 von g durch die Minimumseigenschaft ausgezeichnet sind; die stets reellen Fusspunkte G_1, G_2 dieser Abstände d_1, d_2 sind die *Grenzpunkte* auf g, und die Ebenen $d_1 g$, $d_2 g$ stehen auf einander *senkrecht*. Der

systems, bei dem F und F' auf beiden Flächen Null sind, dass $\sqrt{EG'} = \sqrt{GE'}$, abgesehen von dem Ausnahmefalle $\lambda = 0$ (über denselben vergleiche man Nr. 32) sein muss.

119) Bei *Darboux* wird übrigens konforme Beziehung der Flächen *nebst* der Bedingung für die Winkel korrespondierender Elemente vorausgesetzt; *Darboux*, Leçons 1, p. 329; vgl. auch *G. Mathet*'s, J. de math. (2) 8 (1863), p. 313 u. 323, Arbeit, in der zum erstenmale die betreffenden Fragen gestellt waren.

120) *E. Goursat*, Acta math. 11 (1888), p. 135. Eine Minimalfläche bleibt bis auf ihre absolute Lage ungeändert, bei reeller Rotation ihrer Minimalkurven, sie geht dagegen bei imaginärer Rotation derselben in eine *derivierte* Minimalfläche über, ibid. p. 144, vgl. auch III D 5, Nr. 28.

121) *E. E. Kummer*, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme, J. f. Math. 57 (1860), p. 189; vgl. *R. Hamilton*, Theory of systems of rays, Dublin Trans. 15 (1828), p. 69; 16 (1830) (III D 9).

Mittelpunkt M von G_1 und G_2 bildet die *Mittelfläche*[122]) der Kongruenz. Zu jeder Geraden g giebt es ferner zwei benachbarte g_1, g_2, welche sie in den *Brennpunkten* F_1, F_2, deren Mittelpunkt wieder M ist, schneiden; sie bilden die durch g gehenden *Developpabelen der Kongruenz* und die Ebenen $E_1 = (gg_1)$, $E_2 = (gg_2)$ sind die *Brennebenen*; die *Brennfläche* Φ ist der Ort der Punkte F_1, F_2 und gleichzeitig die Enveloppe der Ebenen E_1, E_2, aber E_1 berührt Φ in F_2, E_2 in F_1. Durch diese Zuordnung von F_1 und F_2 sind die *beiden Mäntel der Brennfläche*, die hier als verschiedene krumme Flächen angesehen werden, *auf einander abgebildet*[123]), und beim Fortschreiten im Kongruenzstrahl im Punkte F_1 gehört die zum Strahle F_1F_2 *konjugierte Richtung* von Φ im Punkte F_2.

Die Kongruenz besteht aus den *Haupttangenten* einer Fläche, wenn die Brennpunkte zusammenfallen; sie heisst eine *isotrope*[124]), wenn die *Grenzpunkte* zusammenfallen; die Brennebenen sind dann *isotrope Ebenen*, weil sie den imaginären Kreis im Unendlichen berühren; die Enveloppe der *Mittelebenen* ist eine *Minimalfläche*[125]) (III D 5, Nr. **30**). Die Kongruenz ist eine *Normale* oder *Normalenkongruenz*, wenn ihre Strahlen Normalen eines (Parallel-)Flächensystems sind; d. h. wenn die *Brennebenen* auf einander *senkrecht* stehen (Brenn- und Grenzpunkte zusammenrücken)[126]); sie heisst *harmonisch* zu einer Fläche F, wenn ihre Developpabeln auf F ein konjugiertes System ausschneiden, und eine *harmonische Normalenkongruenz* heisst eine *Dupin*'sche[127]).

Sind zwei Flächen F und F_1 punktweise so auf einander bezogen, dass korrespondierende Tangenten zu einander senkrecht stehen (vgl. Nr. **32**), so entsprechen sie sich durch Orthogonalität der Längenelemente (*Moutard*'sche Zuordnung)[128]). Die durch die Punkte von F_1

---

122) *Kummer*, ibid. p. 207; surface moyenne bei *Ribaucour*, Étude des élassoïdes ou surfaces de courbure moyenne constante, Bruxelles Mém. couronnées in 4⁰, 44 (1882), p. 2. Die Enveloppe der senkrecht zu g durch M gehenden *Mittelebenen* ist die enveloppée moyenne.

123) *Peterson* (Über Kurven und Flächen, p. 40) nennt diese Beziehung *Konjunktion;* die dort in Aussicht gestellte Theorie derselben ist leider nicht erschienen.

124) *Ribaucour*, Étude p. 21, 31, 119.

125) Fussn. 2; *Ribaucour* ibid; *Bianchi*, p. 273.

126) Vgl. *Kummer*, J. f. Math. 57, p. 227; die Bedingung für die Brennebenen schon bei *J. Bertrand*, J. de math. 9 (1844), p. 133.

127) *Ribaucour*, ibid. p. 3.

128) *Moutard*, Paris soc. philom. Bull. 1869, p. 45; vgl. *Ribaucour*, Étude p. 37. Die isotropen Kongruenzen sind diejenigen *Ribaucour*'schen, deren erzeugende Fläche eine *Kugel* ist, *Bianchi*, p. 305.

parallel zu den korrespondierenden Normalen gezogenen Geraden bilden eine *Ribaucour*'sche Kongruenz, deren erzeugende Fläche F, deren Mittelfläche F_1 ist. Ihre Developpabelen entsprechen den Haupttangenten von F und schneiden die Mittelfläche F_1 in einem konjugierten System gleicher Invarianten[129]). Und umgekehrt ist nach *Guichard*[130]) jede Kongruenz, deren Developpabele die Mittelfläche in einem konjugierten System schneiden, eine *Ribaucour*'sche.

Bei einer *Guichard*'schen[131]) Kongruenz schneiden die Developpabelen auf den beiden Brennmänteln die *Krümmungslinien* aus; die sphärischen Bilder der Developpabelen sind zugleich die der Haupttangentenkurven einer Fläche negativer konstanter Krümmung. Bei einer *Weingarten*'schen Kongruenz[132]) entspechen sich die Haupttangentenkurven auf den beiden Brennmänteln; einen besonderen Fall bilden die Kongruenzen von *Thybaut*[133]).

Eine *cyklische* Kongruenz[134]) wird gebildet von den Axen der Kreise, die ein cyklisches System bilden, d. h. ein System von ∞^1 Orthogonalflächen besitzen.

Auf die *allgemeinen* von ∞^2 Kurven gebildeten *Kongruenzen*[135]) lassen sich manche dieser Vorstellungen übertragen; indessen beschränken sich die Anwendungen auf Fragen der Abbildung bis jetzt grösstenteils auf die geradlinigen Kongruenzen.

14. Abbildungen allgemeineren Charakters. Von noch allgemeinerer Art sind gewisse Abbildungsprozesse, die durch Fragen der Geodäsie veranlasst werden. So zeigt *Christoffel*[136]), dass ein

---

129) Ein konjugiertes System auf einer Fläche hat gleiche Invarianten, wenn die Koordinaten x, y, z der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}$$

genügen (III D 3, Nr. **36**).

130) *C. Guichard,* Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 333; *Bianchi,* p. 303.

131) *Bianchi,* Sopra alcune nuove classi di superficie, Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 308; *Bianchi,* p. 284.

132) *Bianchi,* p. 315.

133) *A. Thybaut,* Sur la déformation du paraboloide, Ann. éc. norm. (3) 14 1897, p. 71; die beiden Brennmäntel sind Minimalflächen, deren Haupttangentenkurven sich entsprechen; vgl. *Bianchi,* Roma Lincei, Rend. (5) 8 (1899), p. 15.

134) *Bianchi*, Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 314; *Bianchi* p. 346.

135) Man vergleiche *Darboux,* Leçons 2, p. 1 ff, sowie *Lie*'s Untersuchungen, Über Komplexe, Math. Ann. 5 (1872), p. 145 (III D 9).

136) *E. B. Christoffel,* J. f. Math. 64 (1864), p. 193; bei *J. Weingarten,* Festschrift der technischen Hochschule Berlin 1884, p. 43 wird an Stelle von $R_1 + R_2$ der Abstand der Tangentenebene der Fläche vom Anfang eingeführt.

Flächenstück F seiner Gestalt nach vollkommen bestimmt ist, wenn man unter der Voraussetzung eindeutiger Beziehung und gewisser Stetigkeitsbedingungen seine sphärische Abbildung und für jeden Punkt derselben die *Summe* der Hauptkrümmungsradien von F kennt; man kann also auch aus einer *endlichen* Anzahl der sphärischen Koordinaten X, Y, Z und der zugehörigen Grösse $R_1 + R_2$ die Gestalt von F durch Interpolation näherungsweise bestimmen.

Von einer sehr allgemeinen Fragestellung geht auch *Lüroth*[137]) aus. Zwei Flächenstücke F, F' sind derart auf einander stetig bezogen, dass bei entsprechenden Punkten P, P', denen die sogenannten Lotlinien a, a' zugeordnet sind, zu Ebenenbüscheln durch a projektiv entsprechende durch a' gehören. Der Charakter dieser Abbildung ist notwendig *eine Projektivität des Raumes*, welche in die Ähnlichkeit übergeht, wenn man für die Ebenenbüschel Kongruenz verlangt.

Der *allgemeinste Fall eindeutig stetiger Abbildung*[137a]) findet endlich in der Lehre von den *Riemann*'schen Flächen, d. h. in der *Analysis situs* (III A 4) ausgedehnte Verwendung. Hier sei nur der Satz von *C. Jordan*[138]) erwähnt: Zwei zweiseitige stetig deformierbare Flächen sind punktweise auf einander abbildbar, wenn die Anzahl ihrer Randkurven und die Maximalzahl der einander nicht schneidenden und die Flächen nicht in getrennte Stücke zerlegenden Rückkehrschnitte die gleiche ist.

Auf die wichtigen, ebenfalls in dieses Gebiet gehörigen Untersuchungen *Hadamard*'s[139]) über die Eigenschaften der sphärischen Abbildung singularitätenfreier Flächenstücke, denen sich die von *Hilbert*[140]), *W. Boy* und *O. Zoll*[141]) anschliessen, kann hier nur hingewiesen werden.

Über einen ähnlichen Satz für Ovaloide vgl. *H. Liebmann*, Gött. Nachr. 1897, p. 134.

137) *J. Lüroth*, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 19 (1890), p. 353; in verallgemeinerter Form Münch. Ber. 1892, p. 27; in weiterer geometrischer Durchführung: Studien über geodätische Abbildung, Math. Ann. 51 (1899), p. 161.

137a) Auf die *Abbildungen der algebraischen Flächen auf einander*, insbesondere auf die Ebene kann hier nicht eingegangen werden, da diese Fragen nicht der Infinitesimalgeometrie angehören (III C 10).

138) *C. Jordan*, Sur la déformation des surfaces, J. de math. (2) 11 (1866), p. 105. Der Satz gilt übrigens auch für zwei einseitige Flächen, vgl. *W. Dyck*, Beiträge zur Analysis situs I, Math. Ann. 32 (1888), p. 488.

139) *J. Hadamard*, Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique, J. d. math. (5) 3 (1897), p. 331; les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, ibid. (5) 4 (1898), p. 27 (III D 3, Nr. **15**).

140) *D. Hilbert*, Über Flächen konstanter *Gauss*'scher Krümmung, Amer. math. soc. Trans. 2 (1901); p. 87 (III D 5, Nrr. **32**, **35**).

141) *O. Zoll*, Über Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen

C. Die Isometrie der Flächen.

a) Allgemeine Probleme.

15. Das Minding'sche Problem. Nach Nr. 2 besteht die Frage nach der Isometrie zweier Flächen F und F_1, deren Koordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1 als Funktionen der Parameter u, v; u_1, v_1 gegeben sind, in der Untersuchung, wann

$$ds_1^2 = E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2,$$

dadurch, dass u_1, v_1 in geeigneter Weise mit Hülfe zweier Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = \varphi(u, v) \\ v_1 = \psi(u, v) \end{cases}$$

von u, v abhängig gemacht werden, in

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

transformiert werden kann, wobei nun die vermöge (1) einander zugeordneten Stellen beider Flächen einander isometrisch entsprechen. Nach *F. Minding*[142]) ist dazu nicht erforderlich, etwa sämtliche zu F isometrische Flächen zu ermitteln, unter denen sich dann auch F_1 befinden müsste, sondern die Bestimmung einer solchen Transformation kann *durch Differentiation und Elimination allein* erhalten werden, so lange nicht ∞^1 oder ∞^3 solche Zuordnungen vorhanden sind[143]).

Aus der Gleichheit der Krümmungsmaasse[144]) k und k_1 in entsprechenden Punkten von F und F_1 folgt sofort die *notwendige* Beziehung:

$$(2) \qquad k = k_1.$$

Ist nun *erstens* $k = k_1 =$ const., so zeigt *Minding* durch Einführung geodätischer Polarkoordinaten (III D 3, Nr. 15), dass beide Flächen wirklich isometrisch auf einander bezogen werden können[145]). Der Beweis

---

Linien, Preisschrift Göttingen 1901 (III D 5, Nr. 39); *W. Boy*, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Diss. Göttingen 1901; hervorgehoben sei hier die Abbildung der projektiven Ebene auf eine einseitige geschlossene singularitätenfreie Fläche, p. 46 (III A 1, 5; III D 3, Nr. 7).

142) *E. F. A. Minding*, Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, J. f. Math. 19 (1839), p. 370.

143) ibid. p. 387.

144) Dies ist *Gauss*' „Theorema egregium", Disquisitiones art. 12.

145) ibid. p. 374; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 219. Und zwei Flächen von gleichem konstanten Krümmungsmaass lassen sich immer auf ∞^3 Arten einander so zuordnen, dass zwei beliebige Punkte P, P' und zwei beliebige Tangentenrichtungen in diesen sich entsprechen. Hierzu ist die vollständige Kenntniss der geodätischen Linien der betreffenden Flächen erforderlich, was für $k = k_1 = 0$

beruht einfach darauf, dass für ein Koordinatensystem, gebildet von den von einem *beliebigen* Punkte P auslaufenden geodätischen Linien mit der Länge u und den von einem *beliebigen* Azimuth *aus gezählten* Richtungswinkeln v ihrer Tangenten in P das Längenelement einer Fläche $k = \pm 1, 0$ die Form

$$ds^2 = du^2 + F(u)dv^2$$

annimmt, wo $F(u)$ eine von jener Stelle und der Wahl des Azimuths *unabhängige* Funktion ist.

Sind *zweitens* k und k_1 Funktionen von u, v; u_1, v_1, so entwickelt *Minding* aus (2) die Gleichung:

$$\frac{En^2 - 2Fmn + Gm^2}{T^2} = \frac{E_1 n_1{}^2 - 2F_1 m_1 n_1 + G_1 m_1{}^2}{T_1{}^2}, \tag{3}$$

wobei

$$dk = m\,du + n\,dv$$

$$dk_1 = m_1\,du_1 + n_1\,dv_1$$

gesetzt ist. Ist nun (3) eine *Identität*[146]), so lassen sich F und F_1 vermöge der Lösung einer Differentialgleichung auf einander isometrisch beziehen; im andern Falle liefern dagegen die Gleichungen (2), (3) *zwei von einander unabhängige* Relationen, welche gestatten zu entscheiden, ob eine *endliche* Zahl von Zuorduungen vorhanden ist, oder überhaupt eine Isometrie nicht stattfindet[147]).

Unabhängig von *Minding* hat dann *Bonnet*[148]) die Bedingungen der Isometrie *geometrisch* entwickelt. Er geht davon aus, dass nach *Gauss*' Theorem die *Kurven konstanten Krümmungsmasses* auf F und

---

nur Quadraturen, für $k =$ const. die Lösung je einer *Riccati*'schen Gleichung (II A 4 b, Nr. 8) verlangt; vgl. *Darboux,* Leçons 3, p. 223; *J. Weingarten,* Über die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von konstanter Krümmung, J. f. Math. 94 (1883), p. 181; 95 (1884), p. 325. Vereinfachungen treten ein, wenn man auf der betreffenden Fläche schon gewisse Kurvensysteme kennt. Sind insbesondere die *Minimalkurven* der Fläche konstanter Krümmung bekannt, so erfordert nach *Lie* (Archiv for Math. og Naturv. 4 (1879), p. 363) die Ermittelung der geodätischen Linien nur noch Quadraturen, während nach *Darboux,* Leçons 1, p. 62 (vgl. auch *L. Raffy,* Paris, C. R. 126 (1898), p. 1852) die isometrische Zuordnung sogar ohne weitere Integration ausgeführt werden kann.

146) d. h. entweder an und für sich oder vermöge der Gleichung (2) des Textes; man vgl. *Liouville* in den Applications von *Monge* Note 4, p. 592; 5, p. 600.

147) *Minding,* J. f. Math. 19, p. 387.

148) *O. Bonnet,* Mém. sur la théorie générale des surfaces, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 1, namentlich p. 83 ff.; *Bonnet* zitiert dabei nur *Minding*'s Arbeit 200) über die Deformation der *Regelflächen* von 1838.

F_1 sich entsprechen müssen, und reproduziert *Minding*'s Verfahren[149]), aber so, dass alle Gleichungen desselben eine durchsichtige geometrische Bedeutung erfahren; seine Formeln entsprechen dabei genau den durch *Beltrami*'s *Differentialparameter* (III D 3, Nr. 8) gelieferten[150]).

Die auf der Betrachtung dieser *invarianten Funktionen des Längenelementes* beruhende Form der Darstellung ist bei *Darboux*[151]) etwa folgende.

Sind, — abgesehen von dem Falle $k = k_1 = \text{const.}$ —

$$\varphi(u, v) \text{ und } \varphi_1(u_1, v_1)$$
$$\psi(u, v) \text{ und } \psi_1(u_1, v_1)$$

zwei von einander *unabhängige* invariante Funktionen der Längenelemente von F und F_1, welche demnach für den Fall der Isometrie in korrespondierenden Punkten gleichen Wert haben müssen, so ergeben sich aus den *notwendigen* Gleichungen

$$\varphi = \varphi_1; \qquad \psi = \psi_1 \tag{4}$$

u_1, v_1 als Funktionen der u, v. Sind nun überdies die Gleichungen

$$\begin{cases} \Delta(\varphi) = \Delta_1(\varphi_1), \quad \Delta(\psi) = \Delta_1(\psi_1) \\ \Delta(\varphi, \psi) = \Delta_1(\varphi_1, \psi_1) \end{cases} \tag{5}$$

vermöge (4) erfüllt, so *sind* F und F_1 isometrisch. Insbesondere kann man auch $\psi = \Delta(\varphi)$ setzen, wenn $\Delta(\varphi)$ von φ *unabhängig* ist.

Wählt man daher $\varphi = k$, und ist $\Delta(k)$ *unabhängig* von k, so sind die Flächen F und F_1 dann und nur dann isometrisch, wenn die zwei Gleichungen

$$\Delta(\Delta(k)) = \Delta_1(\Delta_1(k_1))$$
$$\Delta(k, \Delta(k)) = \Delta_1(k_1, \Delta_1(k_1))$$

eine Folge der als verträglich vorausgesetzten Gleichungen

---

149) *O. Bonnet* (1860), Mém. sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, J. éc. polyt. cah. 41 (1865), p. 208.

150) Zugleich ergiebt sich die Lösung der *Minding*'schen Differentialgleichung, welche bei ∞^1 Isometrieen auftritt, nach *Bonnet,* Fussn. 149, p. 229 durch *Quadratur.* Übrigens findet sich der Differentialparameter $\Delta(k)$ schon bei *Gauss,* Disquisitiones art. 20; $\Delta(k)$ und $\Delta_2(k)$ bei *Minding* (1839); bei *Bonnet,* p. 222 ff.

151) *Darboux,* Leçons 3, p. 223; vgl. *J. Weingarten,* J. f. Math. 94 (1883), p. 183; *Stahl* und *Kommerell,* p. 109; in etwas anderer Anordnung bei *G. A. Nitsche,* Über das Problem der Biegung und der sphärischen Abbildung von Oberflächen, Diss. Leipzig 1898; desgl. auch *Bianchi,* p. 183, sowie *Liouville* in den applications, p. 592. Kennt man auf beiden Flächen schon die Minimalkurven, so kann die Frage natürlich einfacher entschieden werden, vgl. *Scheffers* 2, p. 277.

(6) $$k = k_1, \quad \Delta(k) = \Delta_1(k_1)$$
sind.

Ist aber $\Delta(k)$ *nicht* unabhängig von k,[152]) also $\Delta(k) = f(k)$, so widersprechen sich die Gleichungen (6), falls nicht auch $\Delta_1(k_1) = f(k_1)$ ist. Ist jedoch diese Bedingung erfüllt, so tritt die ebenfalls notwendige Gleichung

(7) $$\Delta_2(k) = \Delta_{21}(k_1)$$

hinzu. Sind diese Differentialparameter (7) von k, k_1 *unabhängig*, so sind die Flächen zu einander isometrisch, wenn die den Gleichungen (5) entsprechenden Bedingungen erfüllt sind, die sich nach *Darboux*, Leçons 3, p. 226 auf *eine* reduzieren. Ist aber $\Delta_2(k) = \chi(k)$ und zugleich $\Delta_{21}(k_1) = \chi(k_1)$, so existieren ∞^1 durch eine *Quadratur* bestimmte Zuordnungen, F und F_1 sind beide zu derselben *Rotationsfläche* isometrisch.

Seinem analytischen Charakter nach gehört das *Minding*'sche Problem zu der Lehre von der Transformation der quadratischen Differentialausdrücke, welche durch *Riemann*'s Arbeiten eingeleitet wurde[153]), während insbesondere *Christoffel*[154]) die Möglichkeit nachwies, auch für n Variabele das genannte Problem im allgemeinen auf Differentiations- und Eliminationsprozesse zu reduzieren.

---

152) Ist $\Delta(k) = f(k)$ und $f(k)$ nicht Null, so sind die Kurven konstanten Krümmungsmasses geodätisch parallel (III D 3, Nr. 15). Der leicht zu ergänzende Fall $\Delta(k) = 0$, wo die Kurven Minimalkurven sind, und also auch $\Delta_2(k) = 0$ ist, scheint bisher nicht berücksichtigt zu sein, und ist auch im Texte ausgeschlossen. In diesem Falle versagt auch das Kriterium (*Bianchi*, p. 185; *Darboux*, Leçons 3, p. 229), nach welchem eine Fläche isometrisch zu einer Rotationsfläche ist, wenn $\Delta(k)$ und $\Delta_2(k)$ Funktionen von k allein sind. Dass $k = k_1$ im allgemeinen nicht $\Delta(k) = \Delta_1(k_1)$ etc. nach sich zieht, belegen *P. Stäckel* und *A. Wangerin* durch Beispiele, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 163 und 170; so z. B. haben alle Flächen des Linienelementes
$$ds^2 = du^2 + U^2\left(a + b\int\frac{du}{U^2}\right)^2 dv^2$$
in korrespondierenden Punkten gleiches k, ohne doch für beliebige a, b isometrisch zu sein.

153) *B. Riemann,* Fussn. 3.

154) *R. Lipschitz,* Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen, J. f. Math. 70 (1869), p. 71; 71 (1870), p. 214, 288; 72 (1871), p. 1; *E. B. Christoffel,* Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. f. Math. 70 (1869), p. 46; *A. Voss,* Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke, Math. Ann. 46 (1880), p. 129 u. 571; *G. Ricci,* Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali, Ann. di mat. (2) 14 (1886), p. 1; *Lezioni,* p. 105; *Bianchi,* p. 34. Für das *binäre* Gebiet insbesondere vgl. *Weingarten,* Festschrift der technischen Hochschule Berlin 1884 (I B 2, Nr. 22).

In Rücksicht auf die Vorstellungen der Flächentheorie nennt man nun bei zwei unabhängigen Variabeln u, v eine *Biegungsinvariante*[155]) jede Funktion des Ortes auf der Fläche, welche bei Einführung neuer Variablen absolute Invarianteneigenschaft besitzt, d. h. durch denselben Prozess in den u, v wie in den u_1, v_1 definiert ist. Enthält dieselbe nur die E, F, G und ihre Derivierten bis zur Ordnung n, so heisst sie eine *Gauss*'sche Invariante (einfachstes Beispiel für $n = 2$ ist k selbst[156]); enthält sie noch willkürliche Funktionen φ, ψ, welche bei der Transformation ihren Wert nicht ändern, so heisst sie eine *Beltrami*'sche Invariante (*Beltrami*'s Differentialparameter)[157]), so z. B. $\Delta\varphi$, $\Delta_2\varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$. Enthält sie dagegen die Differentialquotienten $\frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}\cdots$, so heisst sie eine *Minding*'sche Invariante[158]); ihr einfachstes Beispiel ist die *geodätische Krümmung* (III D 3, Nr. 12) einer auf der Fläche gezogenen Kurve. Die *allgemeinste* Invariante endlich setzt sich aus den drei angegebenen Klassen zusammen, und die *inneren* Eigenschaften der Flächen finden ihren vollständigen Ausdruck durch die systematische Untersuchung derselben.

16. Flächen mit diskreten Isometrieen in sich. Es kann vorkommen, dass die Gleichungen (4) und (5), von denen im allgemeinen die isometrische Beziehung zweier Flächen F und F_1 nach Nr. **15** abhängt, *mehrere* Auflösungen nach u_1, v_1 gestatten; F_1 ist dann in *mehrfacher* Weise zu F isometrisch, besitzt also Isometrieen *in sich*. Ob eine Fläche eines gegebenen Längenelementes ds^2 überhaupt in sich isometrisch ist, kann natürlich vermöge der Betrachtungen in Nr. **15** entschieden werden, indem man sämtliche Lösungen der betreffenden Gleichungen (4), (5), abgesehen von der identischen $u = u_1$, $v = v_1$, aufsucht[158a]). In vielen Fällen wird schon durch die Beschaffen-

155) *Weingarten,* J. f. Math. 94 (1883), p. 182; ganz allgemein bei *K. Żorawski,* Über Biegungsinvarianten, Acta math. 16 (1891), p. 1.

156) *Gauss,* Disquisitiones art. 11; *J. Liouville,* J. de math. 16 (1851), p. 131; symmetrischer Ausdruck für k in der Festschrift von *Weingarten,* p. 8 ff. Es giebt (*Żorawski,* Acta math. 16, p. 31) nur *eine Gauss*'sche Invariante von der zweiten oder dritten Ordnung; für $n > 3$ aber $n - 1$ solche.

157) *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 2 (1864), p. 355; 3 (1865), p. 89, 260 etc.; vgl. *Darboux,* Leçons 3, p. 203; *Bianchi,* p. fehlt.

158) *F. Minding,* J. f. Math. 5 (1829), p. 303; 6 (1830), p. 159. Es existiert *eine Minding*'sche Invariante für jede Ordnung der Differentialquotienten von u nach v, mit Ausnahme des Falles $n = 3$, wo *zwei* solche vorhanden sind (*Żorawski,* Acta math. 16, p. 41).

158a) Man kann auch direkt an geometrische Verhältnisse anschliessen. Entsprechende Stellen können — falls das Krümmungsmass nicht konstant ist

heit der Form $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ zu entscheiden sein, ob *einfache* Transformationen dieser Art möglich sind[158b]). Eine allgemeine Behandlung in dem Sinne, dass für *bestimmte Flächenklassen* die Bedingungen aufgesucht werden, unter denen dieselben auch ausser der Identität Isometrieen in sich besitzen, scheint bisher nicht erfolgt zu sein. Nur die *Minimalflächen*, bei denen vermöge der *Weierstrass*schen Darstellung (III D 5, Nr. **21**) durch Funktionen einer einzigen komplexen Variabeln die Betrachtungen der Substitutionstheorie sich unmittelbar anwenden lassen, sind nach dieser Richtung hin vollständig auf ihren gruppentheoretischen Charakter untersucht[159]).

17. Die Kongruenz der Flächen. Eine ebenso vollständige Theorie der *äusseren* Eigenschaften einer Fläche, wie sie nach der Schlussbemerkung der Nr. **15** auf Grund der ersten Differentialform für die *inneren* möglich ist, ist *systematisch* in Bezug auf die zweite Differentialform $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ bisher nicht durchgeführt. Das zuerst von *Lie* gestellte *Problem der Kongruenz*[160]) besteht nach *Bonnet*'s Fundamentalsatz[20b]) in der Untersuchung, wann sich auf zwei Flächen, die willkürlich durch Gleichungen gegeben sind, solche Parameter u, v; u_1, v_1 einführen lassen, dass ihre *sechs* Fundamentalgrössen *identisch* werden (III D 1, 2, Nr. **34**; III D 3, Nr. **22**). *Notwendig* ist dazu, dass für die beiden etwa auf ihre Krümmungslinien bezogenen Flächen die Gleichungen

$$R_i = R_i', \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_i}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial R_i'}{\partial u_1}; \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_i}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial R_i'}{\partial v_1} \tag{2}$$

stattfinden; dieselben sind auch hinreichend, denn die Fundamentalgrössen werden identisch, sobald vermöge der durch (1) bewirkten

---

— nur auf den Kurven konstanten Krümmungsmaasses liegen und auch nur da, wo die geodätische Krümmung und die geodätischen Abstände dieser Kurven von den benachbarten denselben Wert annehmen. — Bei *periodischen* Flächen sind natürlich diese Bedingungen von selbst erfüllt.

158b) So z. B. bei den aus den Binormalen einer Kurve gebildeten Regelflächen; beachtenswert ist auch das Beispiel bei *F. Ahl,* Untersuchungen über geodätische Linien, Diss. Kiel, 1901, p. 50.

159) *L. Sinigaglia,* Sulle superficie ad area minima applicabili su se stesse, Giorn. di mat. 36 (1898), p. 172; 37 (1899), p. 171; vgl. auch *L. Lecornu,* Acta math. 10 (1887), p. 201.

160) *Lie,* Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 466; Vorlesungen über die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, bearbeitet von *G. Scheffers,* Leipz. 1893, p. 710 ff.; vgl. auch *Scheffers,* 2, p. 341, der Kongruenz und Symmetrie unterscheidet.

Abhängigkeit der u_1, v_1 von den u, v die vier Gleichungen (2) bestehen[161]).

18. Das Bour'sche Problem. Das *zweite* Hauptproblem erfordert die Bestimmung aller zu einer Fläche isometrischen Flächen, allgemeiner *aller* Flächen eines *gegebenen* Längenelementes:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Abgesehen von speziellen Lösungen desselben[162]) ist dasselbe zuerst durch *Bour*, *Bonnet* und *Codazzi* in Angriff genommen[163]).

Setzt man mit *Bour* das Längenelement ds^2 in der Form $4\lambda du\, dv$ voraus (III D 3, Nr. **19**), so sind die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 2\lambda$$

zu lösen. Durch die Annahme

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = ip \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = iq \cos\theta_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = q, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = ip \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = iq \sin\theta_1$$

erhält man für z die *Bour*'sche *Differentialgleichung*[164]) mit der singulären Lösung $pq = \lambda$.[165]) Bei seiner *zweiten* Methode[166]) benutzt *Bour* orthogonal-geodätische Koordinaten (III D 3, Nr. **15**) und findet ein System von achtzehn Gleichungen zur Bestimmung der Richtungscosinus eines mit diesem Koordinatensystem fest verbundenen rechtwinkligen *Trièders*, als deren Integrabilitätsbedingungen nun die *Bour-Codazzi*'schen Gleichungen auftreten, durch deren Integration überhaupt die Lösung zu erfolgen hat.

---

161) In dem besonderen Falle der *Weingarten*'schen Flächen W (III D 5, Nr. **17**), bei denen eine Beziehung zwischen R_1 und R_2 besteht, ist diese Betrachtung etwas zu modifizieren; vgl. *Lie*, ibid. p. 714; *Scheffers*, 2, p. 367; die Entscheidung erfolgt übrigens auch hier durch Differentiation und Elimination.

162) So von *Minding*, Über die Biegung krummer Flächen, J. f. Math. 18 (1838), p. 297 u. 365; desgl. 20 (1840), p. 171.

163) Siehe die Angaben im Litteraturverzeichnis. *Gauss* hat übrigens nicht nur das allgemeine Problem (vgl. Fussn. 1) bereits gestellt, sondern auch zu erledigen gesucht; Nachlass, Werke 8, p. 447.

164) *Bour*, J. éc. polyt. cah. 39, p. 13; in etwas anderer Form bei *Bonnet* cah. 42 (1867), p. 2. 165) Siehe Fussn. 168.

166) *Bour*, ibid. p. 17. *Bour*'s dritte, übrigens nicht viel weiter reichende Methode, p. 123, besteht in der Ermittelung allgemeinerer Lösungen aus solchen mit willkürlichen Konstanten mit Hülfe der *Lagrange*'schen Enveloppenbildung (II A 5, Nr. **32**).

Dini[167]) gab zuerst die *Bour*'sche Differentialgleichung unter Voraussetzung eines allgemeinen Längenelementes. In übersichtlicherer Form wird dieselbe von *Darboux* durch Benutzung einer in neuerer Zeit vielfach angewandten Transformation entwickelt, der[168]) in der Gleichung

$$(1) \quad \begin{cases} dz^2 + dy^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2 - dx^2 \\ = \left(E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right) du^2 + 2\left(F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv + \left(G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right) dv^2 \end{cases}$$

das Krümmungsmass der rechten Seite gleich Null setzt und so die Fundamentalgleichung

$$(2) \qquad \Delta_{22}(x) = (1 - \Delta(x))k$$

erhält; jeder reellen Lösung derselben, bei der $\Delta(x) < 1$ ist, entspricht auch eine reelle Fläche des gegebenen Elementes, die dann mit Hülfe von Quadraturen gefunden werden kann[169]).

Die Gleichung (2), auf welche (abgesehen von durch Berührungstransformationen erfolgenden Umformungen) jede andere Behandlung des Problems führt, die an die drei auf der *sphärischen Abbildung* beruhenden *Codazzi*'schen Fundamentalgleichungen (III D 1, 2, Nr. **34**; III D 3, Nr. **7**) für die L, M, N[170]) anknüpft, ist von der *Monge-Ampère*schen Form (II A 5, Nr. **43**):

$$(rt - s^2) + Ar + 2Bs + Ct + D = 0;$$

---

167) *U. Dini*, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 282. *Bour*'s *zweite* Methode ist dagegen von *R. Lipschitz* (Berlin, Monatsber. 1882, p. 1077; 1883, p. 169 u. 541) unter Voraussetzung des allgemeinen Längenelementes vollständig durchgeführt worden.

168) So schon 1872 im Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces, 2. éd. Paris 1896, p. 17 und 182; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 250. Dabei zeigt sich auch der Grund für das Auftreten von *Bour*'s singulärer Lösung: verschwindet die Diskriminante von (1), so wird die Form (1) ein Quadrat, was natürlich auszuschliessen ist; übrigens ist die Gleichung $\Delta(x) = 1$ die bekannte partielle Differentialgleichung der geodätischen Linien (III D 3, Nr. **18**).

Die Gleichung (2) des Textes (über die Bedeutung der Abkürzungen siehe die Darstellung bei *Darboux* und *Bianchi*, p. 203) war übrigens, wie *Weingarten* (Festschrift, p. 2) bemerkt, durch *Gauss*, Disquisitiones art. 11 schon völlig vorbereitet. Eine andere elegante Form der allgemeinen Gleichung (2) entwickelt mit Hülfe der Differentialparameter *Darboux*, Leçons 3, p. 259.

169) Die Gleichung hat also einen *grösseren Umfang*, wie das gestellte Problem. Während nun *Darboux* dies als unwesentlich betrachtet, sucht *Weingarten* in seiner Festschrift die beiden Fälle, in denen das gegebene ds^2 entweder gleich $dz^2 + dy^2 + dx^2$ oder gleich $dz^2 + dy^2 - dx^2$ wird (letzteres ist eben für $\Delta(x) > 1$ der Fall), zu sondern.

170) Hat man übrigens aus den drei *Codazzi*'schen Gleichungen die L, M, N bestimmt, so erfordert die Ermittelung der x, y, z in Funktion der u, v nur noch die Lösung einer unbeschränkt integrabelen totalen *Riccati*'schen Gleichung

ihre Charakteristiken sind die Haupttangenkurven der Fläche. Sie kann aber nach *L. Raffy*[171]), der direkt an die für das Krümmungsmass und die mittlere Krümmung (die beiden simultanen absoluten Invarianten der Formen $Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdu^2$ und $Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2$) (I B 2, Nr. 22; III D 3, Nr. 8) aus den *Codazzi*schen Gleichungen folgenden Relationen anschliesst, und *Combescure*[172]), der sich kinematischer Betrachtungen bedient, durch eine lineare Differentialgleichung vertreten werden.

Auf die Gleichung (2) lassen sich die Integrationsmethoden der *Monge-Ampère*'schen Charakteristikentheorie nicht zur Anwendung bringen, da dieselbe keine Zwischenintegrale besitzt. *Weingarten*[173]) hat daher eine *neue Fundamentalgleichung* entwickelt, welche nicht wie die früheren auf der sphärischen Abbildung der Flächennormalen, sondern auf der der anderen beiden in der Tangentenebene liegenden Axen eines mit der Fläche verbundenen rechtwinkligen Trieders beruht. Wesentlich ist bei dieser Untersuchung die Verwendung einer durch Quadratur zu erreichenden, durch invariante Eigenschaften und rationale Adjunktion eines orthogonalen Trieders ausgezeichnete, mit der curvatura integra zusammenhängenden Form des Längenelementes (reduzierte Form von *Weingarten*)[174]). Diese neue Gleichung ist dadurch ausgezeichnet, dass sie — wenn überhaupt — immer *zwei* Zwischenintegrale zulässt, und dann nach bekannten Methoden integriert werden kann (II A 5, Nr. 44 f.). Dieser bemerkenswerte Fall ist freilich nur für die Flächen des Längenelementes

$$ds^2 = v^2du^2 + (lv^2 + m)dv^2$$

---

mit zwei unabhängigen Variabeln (II A 4 b, Nr. 8); vgl. die Darstellung bei *Scheffers* 2, p. 331 ff.; *Bianchi*, p. 93.

171) *L. Raffy*, Paris soc. math. Bull. 25 (1897), p. 1; vgl. auch Paris, C. R. 114 (1892), p. 1407.

172) *E. Combescure*, Paris, C. R. 105 (1887), p. 434.

173) *Weingarten*, Sur la déformation des surfaces, Acta math. 20, p. 159. Vgl. *G. Ricci*, Della equazione fondamentale di *Weingarten*, Veneto Istit. Atti (7) 8 (1897), p. 1230.

174) *Weingarten*, ibid. p. 166 ff. Eigentlich entwickelt *W. zwei* Formen der Fundamentalgleichung, je nachdem das System der X- oder Y-Axen des erwähnten Trieders sphärisch abgebildet wird; er zeigt auch (Note zur Theorie der Deformation der Flächen, Acta math. 22 (1899), p. 193) dass ein von *G. Hessenberg*, Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen, Diss. Berlin 1898/99, Acta math. 23 (1900), p. 121 bemerkter Ausnahmefall, wo diese Abbildung sich auf eine Kurve reduziert, nicht gleichzeitig für *beide* Systeme X und Y eintreffen kann.

erfüllt, bei der l, m Konstanten sind; sie lässt sich aber auch noch in anderen Fällen durch die *Laplace*'sche Methode integrieren (II A 5, Nr. 53) und erweist sich so überhaupt als die gemeinsame Quelle, aus der alle bisher erzielten Resultate (vgl. Nr. 31) über vollständige Gruppen der Isometrie hergeleitet werden können.

Darboux hat die weitere Untersuchung der Fundamentalgleichung wesentlich in kinematisch geometrischer Hinsicht entwickelt[175]). Jede Bewegung eines ebenen Systems A in seiner Ebene E besteht bekanntlich darin, dass eine mit A festverbundene Kurve Σ, der Ort der momentanen Rotationscentra in A, auf einer festen Kurve von E (dem Ort der momentanen Centra in E) *abrollt* (IV 3, Nr. 8). Die momentane Bewegung eines Systems im Raume ist freilich keine Rotation, sondern eine Schraubenbewegung, sie kann aber in zwei Rotationen um zu einander senkrechte, im allgemeinen windschiefe Axen zerlegt werden (IV 2, Nr. 12; IV 3, Nr. 18). Schneiden sich diese letzteren, so existiert ein momentanes Centrum[176]), und die Bewegung besteht darin, dass eine mit dem räumlichen Systeme A fest verbundene Fläche Σ auf einer festen Fläche S sich abwälzt[177]), d. h. so, dass die zu einander isometrischen Flächen Σ und S in der gemeinsamen Tangentialebene mit ihren Flächenelementen mit einander zur Deckung kommen. Hiervon ausgehend, kann man sich die Aufgabe stellen, zu einer *gegebenen* Fläche Σ alle zu ihr isometrischen dadurch zu ermitteln, dass man alle korrespondierenden Bewegungen dieser Art, d. h. alle Flächen S bestimmt. Dabei ergiebt sich wieder das System der *Codazzi*'schen Gleichungen, die damit zugleich eine kinematische Deutung erfahren. Auf die weitere Ausführung, die *Darboux*[178]) diesen Anschauungen gegeben hat, mit denen sich insbesondere eine eigentümliche kinematisch-geometrische Analyse von *Weingarten*'s Arbeit verbindet[179]), kann hier nur hingewiesen werden.

---

175) Eine andere, von *L. Raffy* (Paris soc. math. Bull. 22 (1884), p. 119) verfolgte Methode, die sich der Haupttangentenkurven bedient, benutzt *Darboux*, Leçons 3, p. 290.

176) So *P. Schönemann*, J. f. Math. 90 (1881), p. 44; siehe die Litteratur bei *Darboux*, Leçons 1, p. 68.

177) Siehe *A. Ribaucour*, Paris C. R. 70 (1870), p. 330.

178) *Darboux*, Leçons 4, p. 116 ff. In noch allgemeinerer Form hat *E. Combescure* die zugleich rollende und gleitende Bewegung einer Fläche Σ auf einer anderen S untersucht, Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces, Ann. éc. norm. (3) 5 (1888), p. 49; es ergeben sich dabei auch bisher nicht behandelte Probleme der Kinematik (IV 3, Nr. 27).

179) Siehe *Darboux*, Leçons 4, p. 308—352.

19. Allgemeine Sätze über die isometrische Zuordnung und Biegung der Flächen. Hält man auf der Fläche F eine Kurve C fest, so muss auf jeder Fläche F', welche zu F so isometrisch ist, dass die Punkte von C einander zugeordnet sind, sowohl die absolute als auch die geodätische Krümmung von C ungeändert bleiben. Daraus geht hervor, dass F' entweder längs C *dieselbe* oder eine in Bezug auf die Schmiegungsebene von C zur Tangentenebene von F *symmetrische* Tangentenebene haben muss, falls nicht die Schmiegungsebene von C mit ihrer Tangentialebene auf F zusammenfällt. Und so folgt, dass eine *stetige Biegung* von F um C unmöglich ist, falls nicht C *Haupttangentenkurve* von F ist (Nr. 32). Dies ergiebt sich übrigens auch daraus, dass diese letztere zu den *Charakteristiken* der Fundamentalgleichung gehört[180]).

Soll C dagegen auf einer isometrischen Fläche F' eine punktweise vorgeschriebene Gestalt C' annehmen, so ist das noch auf *zwei* Arten möglich, wenn die absolute Krümmung von C' in jedem Punkte *grösser* ist, als die geodätische von C im entsprechenden Punkte[181]). Sind aber diese beiden Krümmungsgrössen *gleich*, so muss C' Haupttangentenkurve auf F' werden: in diesem letzterem Fall ist übrigens nach *Enneper*'s Satz[182]) über die Torsion der Haupttangentenkurven die Gestalt von C' an sich schon völlig bestimmt, und es giebt dann unendlich viele zu F isometrische Flächen durch C', da nun eine stetige Biegung um C' noch möglich ist.[183]). — Eine Fläche lässt sich auf unendlich viele Arten einer isometrischen derart zuordnen, dass eine auf F gegebene Kurve C *Krümmungslinie* von F' wird, etc.[184]).

---

180) *Darboux,* Leçons 3, p. 252. Daher nennt *J. H. Jellett,* dem man die *ersten* Untersuchungen über die *infinitesimale Biegungs*deformation der Flächen verdankt, On the properties of inextensible surfaces, Dublin Trans. 22 (1854), p. 359 die Haupttangentenkurven Curves of flexure; Faltungslinien (linee di piegamento) bei *Bianchi,* Lezioni, p. 199. Ein Flächenstück positiver Krümmung kann also überhaupt nicht gebogen werden, wenn irgend ein Kurvenstück auf demselben festgehalten wird. Hinsichtlich der Eigenschaften der Haupttangentenkurven in Bezug auf stetige Biegung vergleiche man *Weingarten,* J. f. Math. 100 (1887), p. 306.

181) So *Bianchi,* p. 205 in weiterer Ausführung von *Darboux*' Untersuchungen Leçons 3, p. 279.

182) *A. Enneper,* Math. Ann. 2 (1869), p. 596. Nach *Bianchi,* p. 127 sind die Torsionen der beiden durch einen Flächenpunkt gehenden Haupttangentenkurven stets absolut gleich $\sqrt{-\frac{1}{k}}$, aber von entgegengesetztem Zeichen.

183) Vgl. *Bianchi* p. 212; in weiterer Ausführung an einem speziellen Beispiel *Weingarten*'scher Flächen *A. Razzaboni,* Sulla flessione dell' evoluta del

Wir bemerken *Bonnet*'s Satz[185]): Zwei nicht developpabele isometrische Flächen F und F' sind kongruent oder symmetrisch, wenn die *eine* Schar der Haupttangentenkurven von F der einen von F' zugeordnet ist; er ergiebt sich fast unmittelbar aus den *Codazzi*'schen Gleichungen in Verbindung mit *Bonnet*'s Fundamentalsatz. Eine *Ausnahme* machen nur die *Regelflächen*; sie sind einer stetigen Biegung um ihre erzeugenden Geraden fähig. Und zwei Regelflächen R und R' sind auch *nur dann* zu einander isometrisch, wenn ihre Erzeugenden sich *entsprechen*, falls nicht jede derselben zu einer Fläche *zweiten Grades* Q isometrisch ist, und die Erzeugenden von R und R' den beiden *verschiedenen* Systemen der Erzeugenden von Q zugeordnet sind[186]).

Dass eine *überall konvexe geschlossene* Fläche F nicht gebogen werden kann, schloss auf Grund des entsprechenden *Cauchy*'schen Falles über konvexe geschlossene Polyeder[187]) schon *Lagrange* nach *Cauchy*'s Angabe[188]). Auch *Minding* führt den Satz als selbstverständlich an[189]). Erst *Jellett*[190]) zeigte mittelst der Methoden der Variationsrechnung, sich auf unendlich kleine „Biegungsdeformationen" beschränkend, dass eine überall konvexe geschlossene Fläche überhaupt keine infinitesimale „Biegung" zulässt.

In schärferer Weise hat neuerdings *Liebmann*[191]) diese Be-

---

catenoide, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 154 und *B. Calò*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 195.

184) *Darboux,* Leçons 3, p. 289; *Bianchi,* p. 213.

185) *O. Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 41 (1860), p. 210; ibid. cah. 42 (1867), p. 27 fordert er noch die Zuordnung *beider* Systeme der Haupttangentenkurven; in der Addition von 1867, p. 36 der allgemeine Satz.

186) Dieser besondere Fall bei *Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 52; in nicht richtiger Form wird das Theorem über die Deformation der Regelflächen in Paris C. R. 57 (1863), p. 811 ausgesprochen. Den Fall, dass die Erzeugenden einer R bei der Deformation *krummlinige* geodätische Kurven von R' werden, bemerkte schon *Minding,* Über die Biegung krummer Flächen, J. f. Math. 18 (1838), p. 365. Vgl. auch die Darstellung bei *Darboux,* Leçons 3, p. 235, 287.

187) *A. L. Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 87. *Euklid* erklärt bekanntlich Polyeder mit kongruenten Seitenflächen von derselben Anordnung für kongruent oder symmetrisch (III A 3). Einseitige geschlossene Polyeder können sehr wohl deformierbar sein; ein charakteristisches Beispiel ist *R. Bricard*'s Octaèdre articulé, J. de math. (5) 3 (1897), p. 113.

188) *Cauchy,* Paris, C. R. 21 (1845), p. 564. Nach *Stäckel,* Bibl. math. (3) 2 (1900), p. 122 ist der Satz von *Euler* schon weit früher behauptet.

189) *F. Minding,* J. f. Math. 18 (1838), p. 366.

190) *J. H. Jellett,* Dublin Trans. 22 (1854), p. 375; vgl. auch *L. Lecornu,* J. éc. polyt. cah. 48 (1848), p. 1: Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles.

191) *H. Liebmann,* Gött. Nachr. 1899, p. 44; Habilitationsschrift, Leipzig

trachtungsweise für *Ovaloide*, d. h. geschlossene singularitätenfreie, einfach zusammenhängende analytische Flächen mit durchweg von Null verschiedenem positiven Krümmungsmass durchgeführt.

Durch die Unmöglichkeit unendlich kleiner Biegungsdeformationen wird indess keineswegs die Frage beantwortet, ob nicht zu einem Ovaloid isometrische Flächen überhaupt möglich sind. Für die *Kugel* entscheidet dies der Satz von *Jellett* und *Liebmann*: Das einzige Ovaloid konstanter mittlerer Krümmung ist die Kugel[192]).

b. Spezielle Probleme.

20. Untergruppen, bedingte Biegungen. Es sind bereits in Nr. 18, der historischen Entwickelung vorgreifend, die verschiedenen Wege geschildert worden, durch welche man gesucht hat, eine allgemeine Lösung des *Bour*'schen Problems wenigstens in gewissen Fällen vollständig zu erreichen. Die nächsten Fortschritte in der Lehre von der Isometrie beruhten indessen nicht auf einer Fort-

---

1899; Math. Ann. 53 (1900), p. 81, in vereinfachter Form Math. Ann. 54 (1901), p. 505. Erfährt der Punkt x, y, z des Ovaloids die infinitesimalen Verschiebungen $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$ so wird ein Punkt $O\,(a,\ b,\ c)$ im Innern von F, dessen Verbindungslinien mit den Punkten von F bei der Deformation von F invariabel verbunden bleiben, nach dieser Deformation die Koordinaten $a + \varepsilon\alpha$, $b + \varepsilon\beta$, $c + \varepsilon\gamma$ erhalten. Die relativen Verschiebungskoordinaten α, β, γ repräsentieren die *Polfläche*; diese liegt ganz im Endlichen und hat trotzdem überall ein *negatives* Krümmungsmass, was einen Widerspruch enthält. Einen auf anderen Grundlagen beruhenden Beweis giebt *D. Hilbert,* Über Flächen konstanten *Gauss*'schen Krümmungsmasses, Amer. math. soc. Trans. 2, (1901), p. 87; vgl. auch *H. Minkowski,* Gött. Nachr. 1897, p. 198. Neuerdings zeigt *Liebmann* auch, dass infinitesimale Deformationen geschlossener nicht überall konvexer Flächen unter gewissen Umständen unmöglich sind: Über die Verbiegung der geschlossenen Ringfläche, Gött. Nachr. 1901, p. 39, und erstreckt die Untersuchung auf konvexe Zonen von Rotationsflächen (Leipz. Ber. 55 (1901), p. 15) zugleich mit dem Nachweis, dass „reguläre" Isometrieen, d. h. solche, bei denen die Koordinaten der transformierten Punkte im ganzen Biegungsgebiet Potenzreihen des Biegungsparameters sind, auf Bewegungen hinauslaufen.

Übrigens ist auch ein einfach zusammenhängendes singularitätenfreies Flächenstück von konstanter positiver Krümmung immer ein Stück einer Kugelfläche, sobald dessen sphärisches Bild einen grössten Kreis völlig in sich enthält (*Liebmann,* Leipz. Ber. 52 (1900), p. 33). Zu solchen Teilen der Kugelfläche giebt es also keine isometrischen, während dies z. B. stattfindet, wenn das sphärische Bild ganz innerhalb eines grössten Kreises gelegen ist.

192) *J. H. Jellett,* Sur la surface, dont la courbure moyenne est constante, J. de math. 18 (1853), p. 163. Man vergleiche damit den Satz von *D. Hilbert:* Eine im Endlichen reguläre analytische Fläche ohne singuläre Stellen vom Krümmungsmass -1 existiert nicht, Amer. math. soc. Trans. 2 (1901), p. 87.

setzung der von *Bour* gemachten Versuche, die Fundamentalgleichung zu integrieren, sondern betreffen die *Bestimmung gewisser Untergruppen der allgemeinen Isometrie*[193]), sowie die Betrachtung *einzelner Flächenklassen* mit angebbaren isometrischen Zuordnungen. Erst die Untersuchungen *Weingarten*'s über die Centraflächen der *W*-Flächen gehen wesentlich über diese durch *Minding, Bonnet, Codazzi* und andere eingeschlagene Richtung hinaus.

21. Die Biegung der developpabelen Flächen. Die Biegung spezieller developpabeler Flächen tritt schon frühe, z. B. 1698 bei der Untersuchung *Jac. I Bernoulli*'s über geodätische Linien auf den Kegel- und Cylinderflächen auf[194]).

Euler[195]) gab zuerst 1771 die allgemeinen Gleichungen der Developpabelen unter der *Voraussetzung* ihrer geradlinigen Erzeugung durch die Tangenten einer willkürlichen Raumkurve; bald darauf fand *Monge*[196]) die partielle Differentialgleichung $rt - s^2 = 0$ der nach *Euler* durch „Biegung" der Ebene gewonnenen Flächen.

Vollständig erledigt wird die *Frage nach allen zur Ebene isometrischen* Flächen implicite erst durch *Gauss*, bei dem aus der Invarianz des Krümmungsmasses folgt, dass bei jeder zu einer Ebene isometrischen Fläche ein System geodätischer Linien der ersteren *geradlinig bleiben muss*, diese letztere also wirklich „abwickelbar" oder *Tangentenfläche einer Raumkurve* ist[196a]) (III D 5, Nr. 3). Einen direkten analytischen Beweis dafür, dass jede Fläche mit dem Längenelement

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

in diesem Sinne developpabel ist, gab zuerst *Bonnet*[197]).

193) Solche Untergruppen kann man *bedingte* isometrische Zuordnungen resp. Biegungen nennen. *P. Stäckel* (Jahrbuch Deutsch. Math.-Verein. 1 (1892), p. 70) fasst diesen Begriff allerdings etwas anders.

194) *Jac. Bernoulli,* Opera 2, p. 796, 1023; *Joh. I Bernoulli*, Opera 1, p. 253, 262. Vgl. auch *L. Euler,* Petrop. Comm. 3, p. 110, Petersb. 1732; sowie *Stäckel,* Bemerkungen zur Geschichte d. geodät. Linien, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 452.

195) *Euler,* De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet, Petrop. Comm. 15 (1772), p. 3.

196) *Monge,* Paris, Mém. 9 (1780), p. 382.

196a) Vgl. *Gauss*' eigene Bemerkung in den Gött. gel. Anz. 1827, Werke 4, p. 344; desgl. 8, p. 445.

197) *O. Bonnet,* Ann. di mat. (2) 7 (1875), p. 61; vgl. auch die Darstellung bei *Darboux,* Leçons 1, p. 86, sowie *Scheffers* 1, p. 278. *Nicht analytische Flächen* des Längenelementes $ds^2 = du^2 + dv^2$, welche, ohne überhaupt Regelflächen zu sein, zur Ebene isometrisch, aber im Sinne *Finsterwalder*'s (Deutsche Math.-Verein. 6 (1898), p. 61) *überall gefaltet* sind, bespricht *H. Lebesgue,* Paris, C. R. 128 (1899), p. 1502.

Die Transformation auf diese letztere Form ergiebt sich bei der durch ihre Rückkehrkurve (arête de rebroussement) *gegebenen* Developpabelen leicht[198]). Ist allgemein für das Längenelement

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

das Krümmungsmass gleich Null, so folgt sie nach *Darboux*[199]) mit Hülfe von *Beltrami*'s Ausdruck für die integrierenden Faktoren der komplexen Faktoren von ds^2 (III D 3, Nr. 19) ebenfalls durch *Quadraturen*; erst durch *diese* Betrachtung ist die Frage in dem durch *Gauss* angedeuteten Sinne endgültig erledigt.

22. Isometrie und Biegung der Regelflächen. Die allgemeinen Verhältnisse bei der Isometrie der Regelflächen R sind schon in Nr. 19 besprochen. Durch kinematische Betrachtungen wurde zuerst *Minding*[200]) dazu geführt, die Flächen R mit Erhaltung der Erzeugenden *stetig zu verbiegen* (*Minding'sche Biegung der* R).

Sind

$$x = \xi + u\xi_1, \quad y = \eta + u\eta_1, \quad z = \zeta + u\zeta_1$$

die Koordinaten der R, ξ, η, ζ die nur vom Parameter v abhängenden Koordinaten der *Leitlinie*, ξ_1, η_1, ζ_1 die Richtungscosinus der Erzeugenden, so ist:

$$ds^2 = (\alpha + 2\beta u + \gamma u^2) dv^2 + 2\varepsilon du dv + du^2,$$

und man erhält aus der Bedingung für die Isometrie der Fläche R_1 mit den entsprechenden Koordinaten

$$X = \Xi + u\Xi_1, \quad Y = \mathsf{H} + u\mathsf{H}_1, \quad Z = \mathsf{Z} + u\mathsf{Z}_1$$

die Funktionen Ξ, H, Z durch Quadraturen, wenn man in

$$\Xi_1 = \cos\varphi \cos\psi, \quad \mathsf{H}_1 = \cos\varphi \sin\psi, \quad \mathsf{Z}_1 = \sin\varphi$$

φ als willkürliche Funktion von v annimmt. Während *Bonnet*[201]) im wesentlichen *Minding*'s Verfahren reproduziert, giebt *Bour*[202]) eine eingehendere Analyse der bei der Biegung eintretenden Möglichkeiten. Die Biegung kann so erfolgen, dass die Erzeugenden denen eines *gegebenen Leit-* oder *Direktorkegels* (III D 5, Nr. 2) parallel werden[203]),

198) So wohl zuerst *Liouville* in den Applications von *Monge*, Note IV, p. 583; vgl. *Darboux*, Leçons 1, p. 84.

199) *Darboux*, Leçons 3, p. 221.

200) *Minding*, Über die Biegung gewisser Flächen, J. f. Math. 18 (1838), p. 297. Vgl. *D. Codazzi*'s Preisschrift 1859, Paris Mém. [étr.] 27 (1872), p. 17, 39.

201) *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 111.

202) *E. Bour*, J. éc. polyt. cah 39 (1862), p. 1.

203) *Bour*, ibid. p. 31, 44, 55.

oder in Hauptnormalen des Bildes einer Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der gegebenen R übergehen[204]). Ausgeführter sind ausser *Enneper*'s Untersuchungen, die sich an *Bonnet*'s Einführung der *Striktionslinie* der Regelflächen anschliessen[205]), *Beltrami*'s[206]) auf eine grosse Zahl von Biegungen unter vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen sich erstreckenden Resultate, die auch methodisch weiter führen, als das Verfahren von *Minding*. So kann jede geodätische Linie von R zur *geraden* Leitlinie der R',[207]) jede beliebige auf R liegende Kurve *eben*[208]) oder *Haupttangentenkurve*[209]) oder *Krümmungslinie* (wenn sie nicht Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden von R ist)[210]) auf R' werden; alle diese Einzelprobleme subsumieren sich übrigens, wie *Beltrami* bemerkt, unter allgemeinere.

Insbesondere existieren immer *zwei*[211]) mit *Parallelismus der Erzeugenden* auf einander bezogene isometrische Regelflächen; es ist aber nicht möglich, diese beiden Flächen durch eine *Minding*'sche Biegung in einander überzuführen[212]).

Dini's Untersuchungen beschäftigen sich mit den durch *Weingarten*'s Sätze (Nr. **31**) wichtig gewordenen W-Regelflächen[213]) (III D 5, Nr. **18**). Wir erwähnen endlich noch die zu Rotationsflächen isometrischen R; abgesehen von gewissen R mit imaginären Erzeugenden erhält man nur die Biegungsflächen der Minimalschraubenfläche und des Rotationshyperboloids[214]). Die zu Flächen konstanter Krümmung

---

204) *Bour,* ibid. p. 52.

205) *A. Enneper,* Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 391.

206) *E. Beltrami,* Sulla flessione delle superficie rigate, Ann. di mat. (1) 7 (1866), p. 105, Opere 1, p. 208.

207) *Beltrami,* Ann. di mat. ibid. p. 109.

208) ibid. p. 119.

209) ibid. p. 112.

210) ibid. p. 134.

211) *Beltrami,* ibid. p. 115. Vgl. *Darboux,* Leçons 3, p. 299.

212) Dass jene beiden Flächen (ebensowenig wie im analogen Falle zwei zu einander symmetrische) durch jene Biegung nicht auf einander abgewickelt werden können, zeigt *Darboux* Leçons 3, p. 302.

213) *U. Dini,* Sulle superficie gobbe, nelle quali uno dei due raggi di curvatura principali è una funzione dell' altro, Ann. di mat. (2) 7 (1866), p. 203; die einzigen Flächen dieser Art sind — bei der Beschränkung auf reelles — die auf die Minimalschraubenfläche abwickelbaren, ibid. p. 208; vgl. *Bianchi,* p. 382. Mit diesen Flächen beschäftigen sich auch *Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 104; *Beltrami,* Ann. di mat. (2) 7, p. 139.

214) In ausgeführter Untersuchung bei *Darboux,* Leçons 3, p. 230; der dort nicht berücksichtigte Fall derjenigen R, deren Erzeugende Minimalgerade sind, lässt sich leicht mit Hülfe von Fussn. 215 erledigen.

isometrischen R sind entweder developpabel, oder Flächen, deren Erzeugende Minimalgerade sind[215]).

23. Die Biegung der Rotationsflächen. Wird eine Rotationsfläche auf ihre Meridiankurven $v =$ const. und ihre Parallelkreise $u =$ const. bezogen, so lässt sich ihr Längenelement immer in die Gestalt[216])

$$ds^2 = du^2 + U dv^2$$

setzen, und dies ist zugleich die charakteristische Form, auf welche das Element jeder zu einer Rotationsfläche isometrischen gebracht werden kann. Nach Nr. **15** ist eine Fläche des Elementes

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

isometrisch zu einer Rotationsfläche, wenn die Linien konstanten Krümmungsmasses geodätisch parallel und zugleich von konstanter geodätischer Krümmung sind (was stets durch Differentiation und Elimination entschieden werden kann); diese entsprechen dann den Parallelkreisen[216a]). In anderer Ausdrucksweise heisst dies nach *Massieu*[217]), dass die partielle Differentialgleichung der geodätischen Linien[218]) (III D 3, Nr. **18**):

$$\Delta(\theta) = 1$$

ein homogenes lineares Integral haben muss. *M. Lévy* bemerkt[219]), dass alle Flächen, deren E, F, G homogene Funktionen der Parameter u, v vom Grade -2 sind, zu Rotationsflächen isometrisch

215) Auf diese letzteren weist *Stäckel* hin, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 481; *Scheffers* 2, p. 228 bestimmt ihre Koordinaten durch Quadraturen.

216) In Bezug auf die Minimalkurven ist also $ds^2 = f(u' + v')\, du' dv'$.

216a) Allgemeiner ist der für den vorliegenden Zweck nicht unmittelbar verwendbare Satz *Beltrami*'s: Eine Fläche ist isometrisch zu einer Rotationsfläche, wenn sie eine Schar von Parallelkurven mit jeweilig konstanter geodätischer Krümmung enthält, Giorn. di mat. 3 (1865) = Opere 1, p. 181, der noch in mehrfachen Formen ausgesprochen werden kann, ibid. p. 182.

217) *F. Massieu*, Thèse Paris 1861; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 29 fl.; vgl. auch *M. Lévy*, Paris, C. R. 86 (1878), p. 463 u. 947.

218) Siehe Gleichung (1) in Nr. **9**.

219) *M. Lévy*, Paris, C. R. 87 (1878), p. 788. Ist der Grad der homogenen Funktionen nicht gleich -2, sondern irgend eine andere ganze oder gebrochene Zahl, so ist die Fläche zu einer ∞^2 Biegungsgruppe von *Spiralflächen* (III D 5, Nr. 7) isometrisch. Diese merkwürdigen, gleichzeitig von *Lie*, Archiv for Math. og Naturvidensk. 3 (1878), p. 460, betrachteten Flächen untersucht ausführlich bereits *K. Peterson* (*Peterson*, p. 87); daselbst auch die Unterscheidung zwischen Rotations- und Spiralflächen nach dem Grade der homogenen Funktionen E, F, G. — Übrigens sind auch alle Flächen, deren E, F, G Funktionen von $\alpha u + \beta v$ sind, zu Rotationsflächen isometrisch.

sind. — Es sei endlich hier (vgl. Nr. 32) erwähnt, dass die zu Rotationsflächen isometrischen die *einzigen* sind, welche eine infinitesimale, mithin auch ∞^1 endliche kontinuierliche *Transformationen in sich* zulassen, d. h. in sich gebogen werden können [220]).

Minding bestimmte bereits die *Biegungsgruppe der Rotationsflächen* mit dem *Biegungsparameter* a: [221])

$$x = aU \cos\frac{v}{a}, \quad y = aU \sin\frac{v}{a}, \quad z = \int\sqrt{1 - a^2 + (f'u)^2}\,du,$$

bei der Meridiane und Parallelkreise wieder in solche übergehen.

Jede durch Schraubenbewegung aus einer Raum- oder ebenen Kurve entstehende *Schraubenfläche* (III D 5, Nr. 5) ist zu einer Rotationsfläche isometrisch. *Bour* stellte zuerst die vollständige Biegungsgruppe aller zu ein und derselben Rotationsfläche isometrischen Schraubenflächen mit zwei willkürlichen Biegungsparametern a, b auf [222]). Die Koordinaten der letzteren sind für die Rotationsfläche

$$x = U\cos v, \quad y = U\sin v, \quad z = \int\sqrt{1 - U'^2}\,du$$

gegeben durch:

$$X = a\sqrt{U^2 - b^2}\cos\left(\frac{v - \varphi}{a}\right),$$
$$Y = a\sqrt{U^2 - b^2}\sin\left(\frac{v - \varphi}{a}\right),$$
$$Z = bv + \psi,$$

wo φ, ψ zwei durch Quadratur aus U zu bestimmende Funktionen von u sind.

24. Isometrie mit Erhaltung der Krümmungslinien respektive der Hauptkrümmungsradien. Die Rotationsflächen lassen sich stetig so biegen, dass ihre Krümmungslinien Krümmungslinien bleiben, und jede Fläche, deren Krümmungslinien den Parallelkreisen und

220) Vgl. *Bianchi*, p. 321.

221) *F. Minding*, J. f. Math. 18 (1838), p. 367. Ausser diesen *Minding*schen Biegungen *giebt es keine anderen,* welche Rotationsflächen in Rotationsflächen verwandeln, den Fall ausgenommen, wo die Rotationsfläche von *konstanter Krümmung* ist (III D 5, Nr. 33). *M. d'Ocagne* bestimmt den geometrischen Charakter der Meridiankurven der gebogenen Flächen, Paris soc. math. Bull. 21 (1893), p. 85. Erweiterungen namentlich in Bezug auf die Deformation bestimmter Kurven auf Rotationsflächen bei *G. Pirondini,* Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 206.

222) *Bour,* J. éc. polyt. cah. 39 (1862), p. 82; vgl. auch *U. Dini,* Ann. di mat. 1 (1865), p. 26, sowie in Rücksicht auf die Vollständigkeit der Gruppe die Bemerkungen von *Stäckel,* Math. Ann. 49 (1896), p. 256. Übrigens fand *Minding* (J. f. Math. 19 (1839), p. 376) alle in die Kugel verbiegbaren Schraubenflächen,

Meridianen einer zu ihr isometrischen Rotationsfläche sich zuordnen lassen, ist selbst eine Rotationsfläche[223]).

Die allgemeine Frage, wann Flächen stetig so gebogen werden können, dass ihre Krümmungslinien dabei *Krümmungslinien bleiben,* untersuchte zuerst *Codazzi*[224]). Er fand ausser den Developpabelen die Gruppe der *surfaces moulures* oder *Gesimsflächen* (III D 5, Nr. **13**), aber erst *Bour*[225]) bestimmte diese Biegungsgruppe mit dem Parameter a:

$$x = \frac{V}{a}\cos(au) + \int U \sin(au)\,du,$$

$$y = \frac{V}{a}\sin(au) - \int U \cos(au)\,du,$$

$$z = \int dv \sqrt{1 - \frac{V'^2}{a^2}}.$$

Bonnet[226]), der *Codazzi*'s Problem allgemein behandelte, zeigt, dass *ausser* dieser Gruppe noch bestimmte isometrische Flächenpaare (vgl. Nr. **34**) vorhanden sind, die sich mit Erhaltung der Krümmungslinien entsprechen. Und hieran schliesst sich das zweite Problem *Bonnet*'s[227]), die Bestimmung aller Flächen, die mit *Erhaltung der Hauptkrümmungsradien zu einander isometrisch* sind. Auch hier können ∞^1 Flächen vorhanden sein, welche eine Biegungsgruppe bilden; letztere besteht entweder aus den Flächen konstanter mittlerer Krümmung (III D 5, Nrr. **35**, **36**), und *jede* Fläche dieser Art gehört einer solchen Gruppe an, oder einer anderen Gruppe von ∞^1 Flächen, die erst von *Hazzidakis* explicite durch Quadraturen dargestellt wurde[228]); endlich giebt

223) *O. Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 25.

224) *D. Codazzi,* Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura, Ann. di mat. (1) 7 (1857), p. 410.

225) *E. Bour*, J. éc. polyt. cah. 39, p. 88. Diese Gesimsflächen (vgl. *Peterson* p. 62) werden durch eine ebene Kurve erzeugt, deren Ebene ohne zu gleiten sich auf einer Cylinderfläche abwickelt, zum Unterschiede von den allgemeinen moulures (superficie modanate), bei denen der Cylinder durch die Tangentenfläche einer Kurve ersetzt wird. Das Längenelement der Gesimsflächen ist $ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2$, vgl. z. B. *Darboux,* Leçons 1, p. 104. Man vgl. auch *L. Raffy,* Détermination de toutes les moulures, applicables sur les surfaces de révolution, Paris soc. math. Bull. 19 (1891), p. 34.

226) *Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 58 u. 65.

227) *Bonnet,* ibid. p. 73.

228) *J. N. Hazzidakis,* J. f. Math. 117 (1896), p. 42; vgl. auch *Servant,* Sur la déformation des surfaces, Paris soc. math. Bull. 29 (1901), p. 142. Über frühere Versuche, die von *Bonnet* nicht vollständig bestimmte Flächenklasse zu charakterisieren vgl. *M. Chini,* Giorn. di mat. 27 (1889), p. 107; *L. Raffy,* Paris soc. Bull. math. 21 (1893), p. 70.

es auch noch, abgesehen von gewissen imaginären Kegelflächen, besondere isometrische Flächenpaare dieser Art[228a]).

Das Problem der *moulures* ist übrigens von *Goursat* zur Bestimmung derjenigen Flächen verallgemeinert, welche eine Biegung zulassen, bei der eine Schar paralleler Ebenen wieder in eine solche übergeht; auch hier lassen sich die Koordinaten dieser Flächen durch Quadraturen darstellen[229]).

25. Isometrie mit Erhaltung konjugierter Systeme. Die in der vorigen Nr. betrachteten Flächen, welche mit Erhaltung der Krümmungslinien sich isometrisch entsprechen, gaben ein erstes Beispiel solcher Gruppen, die mit *Erhaltung konjugierter Systeme* (III D 1, 2, Nr. 37; III D 3, Nrr. 3, 37) zu einander isometrisch sind. Nach Nr. 2 haben zwei isometrische Flächen F und F' ein gemeinsames konjugiertes System[229a]). Haben aber drei zu einander isometrische Flächen ein gemeinsames System dieser Art, so lässt sich jede derselben durch stetige Biegung in die beiden anderen überführen, wobei das genannte System unverändert bleibt. Diesen schon von *Peterson*[230]) 1868 ausgesprochenen Satz beweist *E. Cosserat*[231]) im Anschluss an die von *Bonnet* bei den mit Erhaltung der Krümmungslinien bieg-

---

228a) *Bonnet*, ibid. p. 82.

229) *E. Goursat*, Amer. Journ. 15 (1892), p. 1; vgl. *P. Adam*, Paris soc. math. Bull. 24 (1896), p. 28.

229a) Über eine charakteristische Eigenschaft der *Codazzi*'schen Gleichungen in Bezug auf dieses gemeinsame System konjugierter Kurven bei zwei isometrischen Flächen vgl. *G. Königs*, Paris, C. R. 110 (1893), p. 596. Dieses System ist allerdings nicht immer reell; *A. Voss* führt daher Math. Ann. 46 (1895), p. 101 ein für je zwei solche Flächen „charakteristisches" gemeinsames Koordinatensystem ein, das stets *reell* wählbar ist.

230) *Peterson* nennt p. 59 solche konjugierte Systeme *Hauptbiegungslinien.*

231) *E. Cosserat*, Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces, Toulouse Ann. 7 (1893), Nr. 45. Dabei ergeben sich bemerkenswerte Zusammenhänge mit der Theorie der Strahlensysteme. Das gemeinsame konjugierte System zweier isometrischer Flächen kann auf keiner derselben beliebig angenommen werden, sondern hat nach *A. Ribaucour* zum sphärischen Bilde das der Developpabelen einer *cyklischen Kongruenz* (Nr. 13), ibid. Nr. 53; das sphärische Bild eines Netzes konjugierter Kurven, das auf ∞^1 isometrischen Flächen sich erhält, ist das der Developpabelen einer *cyklischen Kongruenz*, die zugleich eine *Ribaucour*'sche ist; vgl. auch *E. Cosserat,* Paris, C. R. 113 (1891), p. 460, sowie die Darstellung bei *Stäckel,* Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 (1896), p. 272. Nach *Bianchi,* Sopra alcune nuove classi di superficie, Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 320 (vgl. auch *Bianchi,* p. 337) sind diejenigen Flächen, die mehr als ein konjugiertes System zulassen, das bei einer Isometrie konjugiert bleibt, also einer stetigen Biegung fähig sind, die *associierten* Flächen

baren Flächen angewandten Methoden. Ein ausgezeichnetes Beispiel für diesen Fall bietet ausser den soeben erwähnten Flächen die aus den ein konjugiertes System geodätischer Linien enthaltenden *Voss*-schen[232]) Flächen (III D 5, Nr. 39) bestehende Gruppe (spezielles Beispiel einer Gruppe von Schraubenflächen bei *Stäckel*[233])); sowie die gleich zu betrachtenden *Translationsflächen.*

26. Die Translationsflächen, vgl. III D 5, Nr. 6. Mit den Flächen:

$$x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3,$$

bei denen U, V nur von u, resp. v abhängige Funktionen sind, scheint sich zuerst *Peterson*[234]) beschäftigt zu haben. Damit eine isometrische Translationsfläche existiere, müssen die Quadrate der Ableitungen der U, V je einer homogenen linearen Gleichung mit gewissen Koeffizienten genügen[235]).

Insbesondere können auch stetige Biegungen, bei denen das kon-

---

(siehe Nr. 32 des Textes) derjenigen, deren Krümmungsmass in Haupttangentenkurvenparametern von der Form $-\frac{1}{(u+v)^2}$ ist.

232) *A. Voss,* Über diejenigen Flächen, auf denen geodätische Linien ein konjugiertes System bilden, München, Ber. 1888, p. 96; *E. Cosserat,* Toulouse Ann. 7 (1893), Nr. 56; *L. Bianchi,* Roma Lincei Rend. (5) 1 (1892), p. 41. Durch die Betrachtung gewisser Strahlensysteme gelangte *C. Guichard* zu denselben Flächen, Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables, Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 333; ferner: Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées, Paris, C. R. 110 (1890), p. 995; Sur la déformation des surfaces, J. de math. (5) 2 (1896), p. 174. Man vgl. auch die weitergehenden Untersuchungen von *Guichard,* Sur les réseaux conjugués, dont les courbes d'*un* système sont géodésiques, Paris, C. R. 128 (1899), p. 599, Sur les surfaces de *M. Voss,* Paris, C. R. 129 (1899), p. 23, sowie *Darboux,* Leçons 4, p. 101. Übrigens liefern diese stetigen Biegungen nicht immer verschiedene Flächen. Unter den Minimalflächen lässt nur die gemeine Schraubenfläche ein konjugiertes System geodätischer Kurven zu, aber auf unendlich viele Arten, vgl. *A. Razzaboni,* Sulle superficie, sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato, Bologna Mem. (4) 9 (1889), p. 765.

233) *P. Stäckel,* Über Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 (1896), p. 283. Die Klasse der *Voss*'schen Flächen wird übrigens auch schon von *Peterson* (*Peterson*, p. 66) erwähnt.

234) *Peterson*, p. 68 ff.

235) *Peterson*, ibid. p. 69. Zu der Fläche

$$x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3$$

gehört dann stets auch:

$$X = \lambda U_1 + \frac{V_1}{\lambda}, \quad Y = \mu U_2 + \frac{V_2}{\mu}, \quad Z = \nu U_3 + \frac{V_3}{\nu}$$

mit geeigneten konstanten Werten der λ, μ, ν.

jugierte System der „erzeugenden Kurven“ sich erhält, vorhanden sein, so bei der von *Peterson* angegebenen Gruppe:

$$x = \int \sqrt{1 - \frac{V'^2}{a^2}}\, dv$$
$$y = \int \sqrt{1 - U'^2 a^2}\, du$$
$$z = aU + \frac{V}{a}$$

mit dem Biegungsparameter a.[236])

Für die Auffindung einfacher Untergruppen der Biegung scheint sich überhaupt noch ein weites Gebiet zu eröffnen. Es seien hier nur noch die Gruppe von *tetraedralen Flächen*:

$$x = A\,(a + u)^{3/2}\,(a + v)^{3/2}$$
$$y = B\,(b + u)^{3/2}\,(b + v)^{3/2}$$
$$z = C\,(c + u)^{3/2}\,(c + v)^{3/2}$$

mit den Bedingungen:

$$A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i = m_i; \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

(wo die m_i gegebene Konstanten)[237]), sodann die Biegungen der Flächen zweiten Grades erwähnt, welche *Peterson*[238]) aus den stetigen Deformationen der allgemeinen Flächenklasse

$$x = UV, \quad y = UV_1, \quad z = U_1$$

herleitet.

27. Die Minimalflächen. Über die allgemeine Theorie der *Minimalflächen* vgl. man III D 5, Nrr. **19—23.**

Die Translationsfläche F:

$$x = U_1 + V_1$$
$$y = U_2 + V_2$$
$$z = U_3 + V_3$$

ist unter den Bedingungen

236) In etwas anderer Form bei *Peterson,* p. 71; siehe auch *L. Bianchi,* Giorn. di mat. 16 (1878), p. 267. Man sehe ferner die ausführlichen Untersuchungen über die Biegung der Translationsflächen von *G. Pirondini* (1889); Ann. di mat. (2) 17 (1890), p. 228; Translationsflächen mit ebenen Erzeugenden bilden nur dann eine stetige Gruppe dieser Art, wenn die Ebenen der Kurven auf einander senkrecht stehen; *P. Adam,* Paris soc. math. Bull. 23 (1895), p. 204; vgl. auch *P. Stäckel*, Math. Ann. 44 (1893) p. 564.

237) *G. Tzitzéica,* Paris, C. R. 128 (1899), p. 1276; *Th. Egorow*, ibid. 132 (1901), p. 302.

238) *Peterson,* p. 72; vgl. *R. Mlodzieiowski,* Sur la déformation des surfaces, Paris soc. math. Bull. (2) 15 (1891), p. 97.

$$U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = 0, \quad V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 = 0$$

eine Minimalfläche, und umgekehrt lassen sich auch *alle* Minimalflächen auf diese Weise ausdrücken. Alsdann sind aber auch

$$X = e^{i\alpha} U_1 + e^{-i\alpha} V_1$$
$$Y = e^{i\alpha} U_2 + e^{-i\alpha} V_2$$
$$Z = e^{i\alpha} U_3 + e^{-i\alpha} V_3$$

die Koordinaten einer durch stetige Biegung aus F hervorgehenden Gruppe *associierter* Minimalflächen mit dem Biegungsparameter α, und hierdurch sind zugleich *alle* zu der gegebenen Fläche F isometrischen Minimalflächen gegeben[239].

Insbesondere entsteht für $\alpha = \pi/2$ *Bonnet's*[240] *konjugierte* Minimalfläche mit den Koordinaten:

$$x_1 = i(U_1 - V_1)$$
$$y_1 = i(U_2 - V_2)$$
$$z_1 = i(U_3 - V_3),$$

und es wird vermöge der Gleichungen

$$X = x \cos\alpha + x_1 \sin\alpha$$
$$Y = y \cos\alpha + y_1 \sin\alpha$$
$$Z = z \cos\alpha + z_1 \sin\alpha:$$
$$dXdx + dYdy + dZdz = ds^2 \cos^2\alpha,$$

d. h. korrespondierende Tangenten associierter Minimalflächen bilden einen *konstanten* Winkel mit einander. Bei dieser merkwürdigen stetigen Biegung beschreibt jeder Punkt der Gruppe eine *Ellipse*, und nach *Darboux* ist dies der einzige Fall, in dem bei einer Biegungsgruppe überhaupt Kegelschnitte entstehen können[241].

Bour[242] untersuchte die zu *Rotationsflächen* isometrischen Minimal-

239) Nach *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 42, p. 8, 73, sind zwei Flächen, die isometrisch mit parallelen Tangentenebenen einander sich zuordnen lassen, immer Minimalflächen (Nr. 12); umgekehrt lassen sich zwei isometrische Minimalflächen immer in eine solche Lage bringen, dass sie dasselbe sphärische Bild besitzen, denn diese Abbildungen sind konform und zugleich müssen in korrespondierenden Punkten die Hauptkrümmungshalbmesser denselben Wert besitzen. Die Formeln für X, Y, Z im Texte giebt schon *Peterson*, p. 67 u. 72, allerdings ohne den von *H. A. Schwarz*, Miscellen aus dem Gebiet der Minimalflächen, J. f. Math. 80 (1875), p. 286 gegebenen Beweis, dass damit *alle* Minimalflächen erschöpft sind.

240) *O. Bonnet*, Paris, C. R. 37 (1853), p. 529; surface adjointe bei *Darboux*, Leçons 1, p. 323.

241) *Darboux*, Leçons p. 332; vgl. eine Bemerkung von *P. Stäckel*, Deutsche Math.-Verein. 1 (1892), p. 70.

242) *E. Bour*, J. éc. polyt. cah. 39, p. 99; daselbst auch p. 103 die endlichen Gleichungen dieser Minimalflächen.

flächen; bei ihnen werden die Krümmungslinien unter konstantem Winkel von den Bildern der Meridiankurven geschnitten. Nach *Schwarz*[243]) muss für diese Flächen die Funktion $F(s)$ in den *Weierstrass*'schen Formeln (vgl. III D 5, Nr. 21) von der Form Cs^m (wo m eine reelle Konstante) sein. Die Bedingung, dass eine Fläche überhaupt *isometrisch ist zu einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung,* ist nach *Raffy*[244]) in invarianter Form:

$$\Delta_2 \log (h^2 - k) = 4k.$$

II. Die Flächen konstanter von Null verschiedener Krümmung.

28. Die Flächen konstanten Krümmungsmasses (III D 5, Nrr. 32—35). Die Flächen $k = \text{const.}$ haben in Bezug auf ein geodätisches Polarkoordinatensystem von *Gauss* (III D 5, Nr. 15) das Längenelement[245]):

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \frac{u}{R} \, dv^2; \qquad k = \frac{1}{R^2}$$

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \text{hyp.} \left(\frac{u}{R}\right) dv^2; \qquad k = \frac{-1}{R^2}.$$

Schon *Minding*[246]) bestimmte die Rotationsflächen konstanter Krüm-

---

243) *H. A. Schwarz,* Miscellen, J. f. Math. 80 (1875), p. 296; dort auch eine synthetische Untersuchung über die Isometrie der Minimalflächen zu Rotationsflächen.

244) *L. Raffy,* Sur une transformation des formules de *Codazzi* et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante; Paris soc. math. Bull. 20 (1892), p. 47. Nach *Bianchi* (*Bianchi,* p. 38) ist für $h = 0$ die betreffende Bedingung zuerst von *G. Ricci* gegeben: Eine Fläche ist nur dann isometrisch zu einer Minimalfläche, wenn ihr ds^2 durch Multiplikation mit $\sqrt{-k}$ in das einer Developpabelen übergeht. — Man vgl. damit analoge Untersuchungen von *L. Raffy* über *Spiralflächen*, Paris, C. R. 112 (1891), p. 1850; Paris soc. math. Bull. 19 (1891), p. 65 und J. éc. norm. (3) 9 (1892), p. 150.

245) Eine Fläche mit konstantem k ist nach *Cauchy* bestimmt durch einen ihrer *Streifen* (II A 5, Nr. 34); eine Ausnahme findet nur statt, wenn die Tangentenebenen des Streifens mit den Schmiegungsebenen seiner Kurve zusammenfallen; für $k > 0$ ist eine reelle Auflösung dann unmöglich; für $k < 0$ giebt es ∞ viele, wenn die Torsion der Kurve konstant ist. Jedes Paar von reellen Kurven mit den Torsionen $+1$ und -1, die von einem Punkte mit gemeinsamen Schmiegungsebenen ausgehen, bestimmt eine solche Fläche; vgl. *A. V. Bäcklund,* Lunds Universitets Årsskrift 19 (1883), p. 19; *Bianchi,* Roma Lincei Rend. (1894); *Bianchi,* p. 446.

246) *Minding,* J. f. Math. 19 (1839), p. 378, in völliger Ausführung allerdings nur für $k = -1$; vgl. indes Bd. 18, p. 367. *Alle* Fälle $k = \text{const.}$ bei *Liouville,* in den Applications (1850), p. 597.

mung; mit Ausnahme der *Kugel* und der *Pseudosphäre* (Rotationsfläche der Traktrix) sind sie durch elliptische Funktionen darstellbar. Wählt man für $k = -1/R^2$ zu Koordinaten die zu einer geodätischen $u = 0$ senkrechten geodätischen Linien $v = \text{const.}$, und deren Orthogonaltrajektorien $u = \text{const.}$, so ist das Längenelement:

$$ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 \text{hyp.}\, u\, dv^2) \tag{1}$$

(hyperbolischer Typus von *Beltrami*)[247]); den elliptischen Typus bildet das auf ein *Gauss*'schen Polarkoordinatensystem bezogene Element:

$$ds^2 = R^2 (du^2 + \sin^2 \text{hyp.}\, u\, dv^2); \tag{2}$$

der parabolische endlich:

$$ds^2 = R^2 (du^2 + e^{2u} dv^2) \tag{3}$$

entspricht dem Falle, wo statt der geodätischen Linie $u = 0$ bei 1) eine Kurve von der konstanten geodätischen Krümmung $1 : R$ (ein *Grenzkreis*)[248]) gesetzt ist.

Die entsprechenden Rotationsflächen negativer konstanter Krümmung zeigen bei (1), (2) eine kegelförmige resp. hyperbolische Gestalt; im Falle (3) ergiebt sich die Traktrix. Diese drei Typen sind zwar nach Nr. **15** isometrisch, aber natürlich nicht so, dass etwa die Parallelkreise dabei zugeordnete Linien sein können. — Die Rotationsflächen $k = 1/R^2$ sind von spindelförmigem oder ringförmigem Typus[249]).

Die durch *Bour's* und *Minding's*[250]) Arbeiten implicite bekannten *Schraubenflächen* $k = \text{const.}$ bestimmte zuerst *Dini*[251]) vollständig. *Enneper*[252]) stellte sich die Aufgabe, die Flächen $k = \text{const.}$ mit einem System ebener Krümmungslinien zu bestimmen; die Ebenen der letzteren gehen durch eine Axe, die Krümmungslinien des anderen Systems liegen auf Kugeln, deren Centra sich auf dieser Axe befinden. Auch diese *Enneper*'schen Flächen (näher untersucht in den

---

247) *E. Beltrami*, Sulla superficie di rotazione, che serve di tipe alle superficie pseudosferiche, Giorn. di mat. 10 (1872), p. 147.

248) Der Zusammenhang dieser speziellen Abbildungen mit den Fragen der *nichteuklidischen Geometrie* kann hier nicht weiter berührt werden, man vgl. III A 1.

249) Vgl. z. B. *Bianchi*, p. 193.

250) Die ∞^2 zu einer Kugel isometrischen Schraubenflächen bei *Minding*, J. f. Math. 19, p. 376.

251) *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 7 (1865), p. 25; vgl. auch die Angaben bei *Bianchi*, p. 466.

252) *A. Enneper*, Analytisch-geometr. Untersuchungen, Gött. Nachr. 1868, p. 258, 421.

Dissertationen von *Bockwoldt*[253]) und *Lenz*[254])) führen auf elliptische Funktionen. Schwieriger ist das von *Enneper* nicht völlig behandelte Problem der Flächen mit *einem* System sphärischer Krümmungslinien, das von *Dobriner*[255]) mit Hülfe der Thetafunktionen von zwei Variabeln auf Quadraturen zurückgeführt wurde; auch hier liegen die Centra der zugehörigen Kugeln auf einer Geraden.

29. Die Flächen konstanter negativer Krümmung. Vgl. III D 5, Nr. 35. Da die *allgemeine* Lösung der partiellen Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung sich bisher nicht hat finden lassen, so richtete sich die weitere Untersuchung der Isometrie und Biegung der Flächen konstanten Krümmungsmaasses auf das *Transformationsproblem*, d. h. die Aufgabe, aus *einer* bekannten Fläche dieser Art *neue* durch explicite Prozesse zu gewinnen.

Von besonderer Bedeutung für die Transformation der Flächen eines *negativen* konstanten k ist der von *A. Ribaucour* 1870 gefundene Satz[256]), dass die in den Tangentenebenen der Fläche $k = -\frac{1}{R^2}$ um den Berührungspunkt mit R beschriebenen Kreise ein ∞^1 System von Flächen derselben Krümmung zu Normalflächen haben[257]).

---

253) *G. Bockwoldt*, Über die *Enneper*'schen Flächen mit konstantem positivem Krümmungsmass. Diss. Göttingen 1876.

254) *E. Lenz*, Diss. Göttingen 1879, Fall $k < 0$. Man vgl. *Bianchi*'s Untersuchung, Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 175; ein von *Enneper* nicht behandelter elementarer Grenzfall bei *Th. Kuen*, München, Ber. 1884, p. 193.

255) *H. Dobriner*, Acta math. 9 (1886), p. 73; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 447.

256) *A. Ribaucour*, Paris, C. R. 70 (1870), p. 380; Beweis bei *Darboux*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 14; Leçons 3, p. 429.

257) Allgemeiner wird von *Ribaucour* 1876 (J. de math. [4] 7 [1891], p. 5 und p. 219) das System der Kurven in der Tangentenebene einer Fläche F untersucht, die eine *Normalenkongruenz* bilden. Diese Eigenschaft geht bei der Biegung der Fläche nicht verloren. Sind die Kurven nach Gestalt und Lage in der Tangentenebene unveränderlich, und genügen sie einer gewissen Differentialgleichung (ibid. p. 255), so sind die Orthogonalflächen von konstanter Krümmung; eine spezielle Lösung für $k =$ const. ist der Kreis (p. 251). Wir erwähnen zugleich die *Untersuchungen über dreifache Orthogonalsysteme* (III D 6 b), in denen ein System von Flächen mit konstantem k gebildet wird, insbesondere *Bianchi*'s Arbeiten, Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 175; 19 (1891), p. 187; siehe auch *Bianchi*, p. 529 ff. Ein besonders einfaches System dieser Art ist das von Schraubenflächen gebildete (*Bianchi*, p. 545); zwei der Flächenfamilien sind von konstanter negativer, die dritte von konstanter positiver Krümmung.

Thatsächlich aber knüpft die weitere Entwickelung der Transformationstheorie an eine Arbeit von *Bianchi* an[258]), die übrigens ihrem Grundgedanken nach wieder auf *Weingarten's* Theorem über die *W*-Flächen beruht (vgl. Nr. **31**). Jede Fläche mit negativem konstantem k kann angesehen werden als die eine Evolutenschale (III D 5, Nrr. 8 ff.) einer *W*-Fläche, deren Hauptkrümmungsradien konstante Differenz haben: die zweite Evolutenschale hat dann die nämliche konstante Krümmung. Wesentlich ist nun *Bianchi's* Bemerkung, dass man nicht allein zu jeder Fläche F *eine* neue, sondern ∞^1 finden kann. In der That bleibt die Form 3) der Nr. 28 des Längenelementes der Fläche F ungeändert durch die Substitutionen:

$$e^{-u'} = e^{-u} : N$$
$$v' = (v - c) : N$$
$$N = e^{-2u} + (v - c)^2$$

mit der *willkürlichen Konstanten c.* Die Tangenten der Kurven $v =$ const. berühren eine zweite Fläche F' (F und F' sind die Evoluten des zu den Tangenten normalen Flächensystems W), und F' hat wieder das Längenelement (3) der Nr. 28. Man erhält also wirklich ∞^1 Flächen F'. Die Bemerkung von *Lie*[259]), dass man auf allen diesen Flächen F' die geodätischen Linien durch *Quadratur* finden kann, gestattet, den *Bianchi'*schen Prozess beliebig oft zu wiederholen.

Anstatt der *geodätischen* Linien kann man sich auch der Krümmungslinien von F bedienen. Ist $k = -1$, so wird:

$$ds^2 = \cos^2 \omega \, du^2 + \sin^2 \omega \, dv^2. \tag{1}$$

Zieht man nun, um an *Ribaucour's* Satz[260]) anzuknüpfen, unter dem Winkel θ mit der Kurve $u =$ const. vom Punkte P der Fläche F die Tangente von der Länge *Eins,* so beschreibt der Endpunkt P' derselben eine Fläche F_0 von derselben Krümmung -1, wenn[261]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = \cos \omega \sin \theta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} + \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = - \sin \omega \cos \theta, \end{cases} \tag{2}$$

258) *Bianchi,* Diss. Pisa Ann. 2 (1879), p. 285; Math. Ann. 16 (1879), p. 577.

259) Allgemeiner auf allen Flächen *W*, *Lie,* Arch. for Math. 4 (1879), p. 345, 507; vgl. *Weingarten,* J. f. Math. 103 (1888), p. 184. Für die Krümmungslinien der Flächen *W* gilt bekanntlich dasselbe (III D 5, Nr. 18).

260) Fussn. 145.

261) *Darboux,* Leçons 3, p. 432.

und damit erhält man ∞^1 Lösungen θ, da das System der Gleichungen (2) wegen der vorausgesetzten konstanten Krümmung -1 von F, oder

$$\text{(2a)} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega$$

unbeschränkt integrabel ist. Führt man an Stelle der u, v die Variabeln α, β ein:

$$2\alpha = u + v, \qquad 2\beta = u - v,$$

so wird:

$$\text{(2b)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin\omega\cos\omega \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin\theta\cos\theta; \end{cases}$$

das Längenelement von F_0 wird gegeben durch:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 \\ &= d\alpha^2 + 2\,d\alpha\, d\beta \cos 2\theta + d\beta^2, \end{aligned}$$

d. h.: F_0 ist ebenso wie F durch die Kurven u, v auf die Krümmungslinien, durch die Kurven α, β auf die Haupttangentenkurven bezogen[262]).

Auch diese Konstruktion lässt sich verallgemeinern, indem man den Radius des so eben erwähnten *Ribaucour*'schen Kreises nicht gleich -1, sondern gleich einer Konstanten ϱ wählt, während die Tangentenebene der Fläche F' in seinem Endpunkte P' die Tangentenebene von F längs PP' unter einem konstanten Winkel, dessen Cotangente $\lambda : \varrho$ ist, schneidet. Man erhält dann, falls wegen der aus den Integrabilitätsbedingungen folgenden Gleichung

$$\lambda^2 + \varrho^2 = 1$$

gesetzt wird:

$$\varrho = \cos\sigma$$
$$\lambda = \sin\sigma,$$

die verallgemeinerten Gleichungen[263]):

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\theta + \omega) = \dfrac{1 + \sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\theta + \omega) \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}(\theta - \omega) = \dfrac{1 - \sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\theta + \omega). \end{cases}$$

Dies ist *Bäcklund*'s[264]) *Transformation* B_σ, welche *zwei* willkürliche

262) *Darboux,* ibid., p. 428.

263) Vgl. z. B. *Darboux,* Leçons 3, p. 434.

264) *A. V. Bäcklund,* Om ytor met konstant krökning, Lund's Universitets Årsskrift 19 (1883).

Konstanten einführt; sie geht für $\sigma = 0$ wieder in die *Bianchi'sche Transformation* B_0 (2) über[265]).

Bäcklund hat übrigens seine Transformation auf einem ganz andern Wege gefunden[266]). Man kann sie nach *Darboux*[267]) aus der *Bianchi*'schen mit *Lie*'s Transformation[268]) zusammensetzen. Die letztere besteht darin, dass zu jeder Lösung $\omega = \varphi(\alpha\beta)$ der Gleichung (2b) eine zweite:

$$\omega = \varphi\left(\alpha\varrho, \frac{\beta}{\varrho}\right)$$

mit der Konstanten ϱ, oder zu

$$\omega = \psi(u, v)$$

die Lösung:

$$\omega = \psi\left(\frac{u + v \sin\alpha}{\cos\alpha}, \frac{v + u \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

gehört.

Die beliebig wiederholte Anwendung dieser Transformation liefert unbegrenzt viele neue Flächen $k = -1$ mit stets wachsender Zahl von willkürlichen Konstanten.

Darboux hat diesen Prozess vollständig ausgeführt[269]). Seine Untersuchungen führen zu dem folgenden Satze:

Kann man eine Fläche $k = -1$ nebst[270]) der Gruppe der aus ihr durch *Lie*'s Transformation entstehenden bestimmen, so beruht die weitere Anwendung der *Bianchi*'schen, *Bäcklund*'schen und *Lie*schen Transformationen auf die entstandenen Flächen *nur auf Differentiation und Elimination.*

In etwas anderer Form ist dieser Prozess von *Bianchi*[271]) unter direkter Beziehung auf die Theorie der Strahlensysteme und den Algorithmus der von ihm als L_σ und B_σ bezeichneten Transformationen durchgeführt. Der *Darboux*'sche Satz[272]) von der Zusammensetzung der *Bäcklund*'schen Transformation aus der von *Lie* und *Bianchi* erhält dann die Gestalt:

---

265) B_0 ist *Bianchi's komplementare* Transformation, Math. Ann. 16, p. 577.

266) *Bäcklund*, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Math. Ann. 14 (1880), p. 285; 19 (1882), p. 387.

267) *Darboux*, Leçons 3, p. 438.

268) *Lie*, Archiv for Math. og Naturv. 4 (1879), p. 510, vgl. *Bianchi*, p. 459.

269) *Darboux*, Paris, C. R. 97; J. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 1, vgl. Leçons 3, p. 458 ff.

270) Hierzu ist wieder die Lösung einer *Riccati*'schen Gleichung erforderlich, deren explicite Form bei *Darboux*, Leçons 3, p. 461.

271) *Bianchi*, p. 451.

272) Fussnote 267.

$$B_\sigma = L_\sigma B_0 L_\sigma^{-1};$$

eine wichtige Rolle spielt dabei der *Bianchi'sche Vertauschbarkeitssatz:* Ist

$$F_1 = FB_{\sigma_1}, \quad F_2 = FB_{\sigma_2},$$

so ist:

$$F_3 = B_{\sigma_1} B'_{\sigma_2} = FB_{\sigma_2} B'_{\sigma_1},$$

d. h. es giebt zwei bestimmte Transformationen, B'_{σ_2}, B'_{σ_1}, welche F_1 und F_2 in *dieselbe* Fläche F_3 verwandeln[273]). Eine besonders anschauliche Darstellung gewinnt dieser Transformationsprozess, wenn man die beiden Flächen F und die aus ihr durch B_0 hervorgehende F_0 als Brennflächen des *pseudosphärischen Strahlensystems* PP_0 auffasst (Nr. **13**; III D 5, Nr. **35**).

30. Die Flächen konstanter positiver Krümmung. Zu jeder Fläche F konstanter positiver Krümmung liefert ein schon 1878 von *Hazzidakis*[274]) gegebenes Verfahren durch Quadratur eine neue Fläche derselben Art. Sind nämlich die geodätischen Linien der Fläche durch die in den Parametern u, v lineare Gleichung $au + bv + c = 0$ dargestellt, so liefern die Quadraturen:

$$dx_1 = (Ldu + Mdv)\,S,$$

$$dy_1 = (Mdu + Ndv)\,S,$$

$$dz_1 = ((Lu + Mv)\,du + (Mu + Nv)\,dv)\,S,$$

$$S = \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

eine Fläche derselben konstanten Krümmung. Die geometrische Deutung dieser Transformation gab wiederum *Lie*[275]). Die Haupttangentenkurven von F zerlegen F selbst sowie ihr sphärisches Bild auf der *Gauss*'schen Kugel *in infinitesimale Rhomben*[276]) (III D 5, Nr. **38**), und aus jeder Einteilung dieser Art auf der Kugel folgt durch Quadratur eine Fläche F. Man erhält daher durch „Aufwickelung" der Fläche F auf die Kugel vermöge des Systems ihrer Haupttangentenkurven eine *neue* Einteilung der Kugel, welche eine zugehörige Fläche F' liefert.

---

273) *Bianchi,* p. 461 ff.

274) *J. N. Hazzidakis*, Über einige Eigenschaften der Flächen von konstantem Krümmungsmass, J. f. Math. 88 (1880), p. 71; vgl. auch *J. Weingarten*, Festschrift d. techn. Hochschule Berlin 1884, p. 39.

275) *Lie,* Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung, Archiv for Math. og Naturv. 4 (1879), p. 345 und 4, p. 355.

276) Dies ist der *Dini*'sche Satz: *Dini,* Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni, Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 175

Aber dieser Prozess ist ein *reziproker* und daher zur Gewinnung neuer Flächen nicht brauchbar[277]).

Die in der vorigen Nummer gebildeten Transformationen *Bianchi's* und *Lie's* würden dagegen für Flächen $k = +1$ den Durchgang durchs Imaginäre erfordern. Neuerdings hat aber *Bianchi* auch für diesen Fall eine *reelle* Darstellung gegeben[278])

Schon *Beltrami*[279]) hatte gezeigt, dass die Normalflächen F einer Normalenkongruenz, deren Strahlen mit den rechtwinkligen Triëdern des Koordinatensystems auf einer Ausgangsfläche (superficie di partenza) F_0 fest verbunden sind, bei allen Biegungen der letzteren in die Normalenflächen der deformierten Kongruenz übergehen. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn die Kongruenz aus den Tangenten derjenigen geodätischen Linien einer zu einer Rotationsfläche isometrischen besteht, welche den Meridianen entsprechen; die Normalenflächen sind dann die Flächen *Weingarten's*. *Guichard*[280]) zeigte nun, dass für ein Rotationsparaboloid F_0 die Kongruenz der Brennpunktsstrahlen bei den Deformationen der F_0 in eine Normalenkongruenz übergeht, deren aus dem Brennpunkte entspringende Orthogonalfläche eine Minimalfläche ist[281]). Bei der Ausführung derselben Konstruktion am verlängerten Rotationsellipsoid, resp. zweischaligen Rotationshyperboloid ergiebt sich dagegen eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung. Da die *Schar der Parallelflächen* zu *einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung* auch eine Fläche konstanter

277) Bei dieser Transformation entsprechen die Krümmungslinien und Haupttangentenkurven von F_1 denen von F. Übrigens erkennt man den involutorischen Charakter von *Hazzidakis'* Transformation einfacher dadurch, dass man als Fundamentalgrössen von zwei Flächen mit konstantem $k = +1$ die beiden Systeme

$$E = \sin^2 h\theta,\ F = 0,\ G = \cos^2 h\theta,\ R_1 = \operatorname{cotg} h\theta,\ M = 0,\ R_2 = \operatorname{tg} h\theta$$

$$E' = \cos^2 h\theta,\ F' = 0,\ G' = \sin^2 h\theta,\ R_1' = \operatorname{tg} h\theta,\ M_1 = 0,\ R_2' = \operatorname{cotg} h\theta$$

in Bezug auf Krümmungslinienparameter u, v ansehen kann, wenn

$$\Delta_2 \theta + \cos h\theta \sin h\theta = 0;$$

den geodätischen Linien der einen entsprechen die Schattenlinien der andern.

278) *Bianchi,* Sopra le superficie a curvatura costante positiva, Roma Lincei Rend. (5) 8 (1899), p. 141, 223, 371, 484.

279) *Beltrami,* Ricerche di analisi applicata, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 281; bei *Bianchi*, p. 270 wird dieser Satz auch auf allgemeinere Deformationen der Ausgangsfläche erweitert.

280) *C. Guichard,* Sur la déformation des quadriques de révôlution, Paris, C. R. 128 (1899), p. 232. Vgl. *G. Tzitzéica,* Bull. sciences math. 23 (1899), p. 153.

281) *Bianchi* schliesst hieran eine Transformation der Minimalflächen in Analogie mit der Transformation der Flächen konstanter Krümmung, Roma Lincei Rend. (5) 8 (1899), p. 151.

positiver Krümmung enthält[282]), so lässt sich nach *Bianchi*[283]) umgekehrt jede Fläche mit konstantem $k = +1$ auf ∞^3 Arten aus einer dieser Rotationsflächen zweiten Grades F_0 herleiten. Dabei zeigt sich, dass zu jeder Fläche F, deren $k = +1$ ist, noch eine *zweite* F' (durch Spiegelung der Kongruenz an F_0) gefunden werden kann. In dem Übergang von F zu F' besteht jetzt die neue Transformation *Bianchi*'s, welche aus F zunächst ∞^3 Flächen F_0, also auch ∞^3 Flächen F', vermöge eines unbeschränkt integrabelen Systems linearer homogener partieller Differentialgleichungen liefert[284]) (II A 5, Nr. **14**).

Da ähnliche Untersuchungen auch für Flächen negativer konstanter Krümmung gelten, muss natürlich ein naher Zusammenhang mit der *Bäcklund*'schen Transformation bestehen[285]). In der That zeigt sich nun auch, dass diese neue Transformation *Bianchi*'s in *zwei successive imaginäre Transformationen dieser Art* zerlegt werden kann[286]). Insbesondere gilt auch hier der Satz: Gelingt für die vorgelegte Fläche F die *vollständige* Integration des Systems der Gleichungen, welche zur Transformation von F in F_1 notwendig sind, so erfordert *die fortgesetzte* Anwendung des Prozesses auf jede gewonnene F_1 nur Eliminationen und Differentiationen. Damit ist auch für die Flächen konstanter positiver Krümmung eine ebenso durchsichtige geometrische Transformation erreicht, wie für die von negativer[287]).

3) Untersuchung vollständiger isometrischer Gruppen.

31. Vollständige Systeme isometrischer Flächen. Kennt man für eine Fläche *alle* zu ihr isometrischen, so entsteht eine *isometrische Gruppe* (Nr. 2), in dem Sinne, dass man zu *jeder* Fläche derselben *alle* isometrischen kennt; man kann als *Typus der Gruppe* die einfachsten

282) *O. Bonnet,* Note sur une propriété de maximum rélative à la sphère, Nouv. Ann. de math. 12 (1853), p. 443 (III D 5, Nr. 35).

283) *Bianchi,* Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 185.

284) *Bianchi,* ibid. p. 49, 66 (Citat nach dem Separatabzug).

285) *Bianchi,* ibid. p. 21.

286) *Bianchi,* ibid. p. 82.

287) Auf weitere hiermit in Verbindung stehende Untersuchungen *Bianchi*'s hier einzugehen, ist nicht möglich, vgl. Ann. di mat. (3) 5 (1901), p. 166, sowie den kurzen Abriss der neuen Transformation in *Bianchi,* p. 641. — Übrigens hat fast zu derselben Zeit *Darboux* in den Paris. C. R. (Ann. éc. norm. (3) 6 (1899), p. 465) die *Guichard*'schen Sätze im Sinne der Transformationstheorie verwandt und so ähnliche Resultate wie *Bianchi* hinsichtlich der Beziehungen zur *Bäcklund*'schen Transformation gewonnen.

der in ihr enthaltenen Flächen bezeichnen. Bis zum Jahre 1860, wo *Weingarten* seine Untersuchungen auf das Problem der Flächen richtete, für die eine solche vollständige Gruppe durch explicite Prozesse (Eliminationen und Quadraturen) gefunden werden kann, war nur die aus den Developpabelen bestehende Gruppe bekannt[288]).

Von nun an treten in Rücksicht auf die Ermittelung weiterer Gruppen die *Weingarten'schen Flächen W* hervor, bei denen eine Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 stattfindet (III D 5, Nr. **17**). Wählt man die Variabelen u, v so, dass $v =$ const. die *eine* Schar der Krümmungslinien, $u =$ const. die Kurven sind, auf denen der zugehörige Krümmungsradius R_1 konstant ist, so ist das Längenelement des von den Mittelpunkten der Krümmungskreise R_1 gebildeten Mantels der *Centrafläche*[289]) der W-Fläche:

$$ds^2 = dR_1^2 + (F(R_1))^2 dv^2, \tag{1}$$

wobei

$$F(R_1) = e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}}$$

ist; d. h. dieser Mantel[290]) der Centrafläche der W-Fläche ist zu einer *Rotationsfläche* isometrisch, deren Meridiankurve *nur* von der Form der durch die für W-Flächen charakteristischen Relation zwischen R_1 und R_2 bestimmten Funktion $F(u_1)$ abhängt[291]). Und umgekehrt[292]) lässt *jede zur Rotationsfläche*

$$ds^2 = du_1^2 + (Fu_1)^2 dv^2 \tag{1a}$$

isometrische Fläche F sich als der eine Mantel der Evolute einer bestimmten Klasse von W-Flächen ansehen, wenn man setzt:

$$R_1 = u_1 \tag{2}$$

$$\frac{1}{R_1 - R_2} = \frac{F'(u_1)}{F(u_1)},$$

womit zugleich die Beziehung zwischen R_1 und R_2, d. h. das *Gesetz* der Klasse dieser W-Flächen durch Elimination von u_1 folgt. Eine

288) Die Bemerkung von *E. Bour,* J. éc. polyt., cah. 39 (1860), p. 13 in Betreff der Bestimmung *aller* zu einer Rotationsfläche isometrischen Flächen beruht auf einem Irrtum.

289) Auch Evolutenfläche, surface développée, superficie sviluppata (*U. Dini,* Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 25) (III D 5, Nr. 8).

290) Entsprechendes gilt natürlich für den andern Mantel, der allerdings bei den *Kanal-* oder *Röhrenflächen* in Wegfall kommt (III D 5, Nr. **17**).

291) *J. Weingarten,* Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, J. f. Math. 59 (1861), p. 382.

292) *Weingarten,* ibid. p. 388.

Ausnahme tritt nur dann ein, wenn *entweder* die in (1a) zu Grunde liegenden geodätischen Linien $v =$ const. von F *gerade* sind (also F Regelfläche ist), *oder* F developpabel ist[293]). Im zweiten Falle liegt eine besondere Aufgabe nicht vor; im ersten werden die zugehörigen W-Flächen von konstanter Krümmung. Bei negativem k ist die *typische Rotationsfläche* das *Catenoid* (III D 5, Nrr. **19**, **26**, **36**), und man muss zu den *Centra*flächen aller Flächen von negativem konstantem k noch die zum Catenoid isometrischen *Regelflächen*[294]) hinzufügen; bei positiver Krümmung sind die isometrischen Regelflächen imaginär.

Hierdurch ist die *Bestimmung sämtlicher zu einer gegebenen Rotationsfläche isometrischen Flächen* auf die *aller W-Flächen* einer *gegebenen Klasse* zurückgeführt. Diese Aufgabe aber reduziert sich vermöge der sphärischen Abbildung einer W-Fläche auf die *Ermittelung eines gewissen Koordinatensystems auf der Kugel*[295]). Ist nämlich

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 \tag{3}$$

das Längenelement der sphärischen Abbildung der auf ihre Krümmungslinien bezogenen W-Fläche, so wird nach *Weingarten*:

$$e = e^{2\int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad g = e^{2\int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}},$$

d. h. es ist die Aufgabe zu lösen, das Längenelement der Kugel auf *alle* Arten in die Gestalt

$$d\sigma^2 = \frac{du^2}{p^2} + \frac{dv^2}{(\varphi' p)^2} \tag{4}$$

zu setzen, wenn

$$\begin{cases} R_1 = \varphi(p) \\ R_2 = \varphi(p) - p(\varphi' p) \end{cases} \tag{5}$$

gesetzt wird. Und die zugehörige W-Fläche ist durch *Quadraturen* bestimmt, wenn das Kurvensystem auf der Kugel *bekannt* ist[296]); zugleich erhalten die *beiden* zugehörigen Centraflächen die Längenelemente:

$$ds_1{}^2 = g\,(R_1 - R_2)^2 dv^2 + dR_1{}^2 = p^2 dv^2 + (\varphi' p)^2 dp^2,$$
$$ds_2{}^2 = e\,(R_1 - R_2)^2 du^2 + dR_2{}^2 = (\varphi' p)^2 du^2 + (p\varphi'' p)^2 dp^2.$$

Diese allgemeinen Sätze geben sofort die Bestimmung einiger isometrischen Gruppen.

---

293) *Weingarten,* ibid. p. 390.

294) Vgl. *U. Dini,* Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 25. Es handelt sich also um die Regelflächen mit dem Längenelement $du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2$.

295) *J. Weingarten,* J. f. Math. 62 (1863), p. 160.

296) Ist nur das Längenelement (4) gegeben, so hat man nach *Darboux* 3, p. 320 noch eine *Riccati*'sche Gleichung zu lösen.

Man kennt *erstens alle* Einteilungen der Kugel, bei denen

$$d\sigma^2 = dv^2 + g\,du^2$$

wird; sie werden von den grössten Kreisen $u = \text{const.}$ und ihren Orthogonalkurven gebildet. Hier ist also nach (4):

$$g = \frac{1}{p^2}, \quad \varphi'(p) = 1,$$

also:

$$R_1 = a + \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad R_2 = a;$$

man erhält die *W-Kanalflächen,* welche aber nur die triviale Gruppe der *Developpabelen* liefern.

Man kennt *zweitens* alle *isothermen* Teilungen der Kugel (III D 3, Nr. **20**), die zugehörigen *W*-Flächen sind die *Minimalflächen.* In diesem Falle sind — wie überhaupt bei allen Flächen mittlerer konstanter Krümmung — die beiden Mäntel der Centrafläche *zu einander isometrisch,* und die vollständige Gruppe ihrer isometrischen Flächen hat zum Typus die *Rotationsfläche der Evolute der Kettenlinie* [297]) (III D 4, Nr. 27).

Eine *dritte* Klasse fand *Weingarten* [298]) durch die Bestimmung aller Koordinatensysteme des Längenelementes (III D 3, Nr. **15**)

$$ds^2 = \frac{du^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

auf der Kugel (Orthogonalsystem mit konstanter Summe resp. Differenz der geodätischen Abstände von zwei willkürlichen Kurven auf der Kugel); die zugehörige *W*-Fläche, für die

$$p = \sin\frac{\omega}{2}, \quad \varphi'(p) = \cos\frac{\omega}{2}$$

zu setzen ist, hat nach (5) das Gesetz:

$$2(R_2 - R_1) = \sin 2(R_1 + R_2).$$

Auch hier sind die beiden Evolutenmäntel zueinander isometrisch und der Typus der isometrischen Gruppe ist das *Rotationsparaboloid* [299]).

297) Die Biegungen der Evolutenfläche der Umdrehungsfläche der Kettenlinie (Catenoid oder Alysseid nach *Bour,* J. éc. polyt., cah. 39, s. oben p. 422) untersucht *A. Razzaboni,* der unter der Annahme, dass für irgend eine Kurve C des Catenoids die gebogene Kurve C' vorgeschrieben ist, die zugehörige Minimalfläche bestimmt, deren Evolute die gedachte Fläche ist; in Übereinstimmung mit Nr. **19** ergeben sich dabei *zwei* Flächen, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 254.

298) *Weingarten,* J. f. Math. 62 (1862), p. 170; vgl. *O. Bonnet,* J. éc. polyt., cah. 42, p. 95; *Darboux,* Leçons 3, p. 322. Mit der wirklichen Biegung dieser Flächen beschäftigt sich *B. Calò,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 195.

299) Bei *Weingarten,* ibid. p. 171 erscheint als Typus die Flächengruppe:

$$x = \alpha u \sin\frac{v}{\alpha}, \quad y = \alpha u \cos\frac{v}{\alpha}, \quad z = \int\sqrt{1 - u^2 - \alpha^2}\,du,$$

Die geometrische Konstruktion dieser W-Flächen, deren explicite Gleichung bereits durch *Weingarten*[300]) gefunden wurde, gab *Darboux*[301]). Betrachtet man eine Translationsfläche T, deren erzeugende Kurven C und C_1 entgegengesetzt gleiche *konstante Torsion* haben, so bestimmen die Schnittlinien der Schmiegungsebenen von C und C' in jedem Punkte von T ein Strahlensystem, unter dessen Normalenflächen sich jene Flächen befinden. Und sind

$$\xi_1 + i\xi, \quad \eta_1 + i\eta, \quad \zeta_1 + i\zeta$$

drei Funktionen der komplexen Variabeln $u + iv$, die durch die Gleichung

$$(\xi_1 + i\xi)^2 + (\eta_1 + i\eta)^2 + (\zeta_1 + i\zeta)^2 = c^2$$

verbunden sind, so liefern die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v}, \quad \text{etc.}$$

bei *negativem reellem* $c = -1/k^2$ alle zu dem *Rotationsparaboloid*

$$z = \frac{k^2}{2}(x^2 + y^2)$$

isometrischen Flächen[302]).

Eine vierte Gruppe entsteht nach *Weingarten*[303]) durch die Anwendung eines *neuen Koordinatensystems,* bei dem u der Abstand der Tangentenebene, $2v$ das Quadrat der Entfernung ihres Berührungspunktes vom Anfang ist (III D 3, Nr. 35). So ergiebt sich der Satz: Alle zu den Flächen des *Liouville*'schen Längenelementes (III D 3, Nr. 18)

$$ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2)(\alpha^{2/3} + \beta^{2/3})$$

isometrischen können durch einen einfachen Prozess aus den Minimalflächen hergeleitet werden.

Von demselben Koordinatensysteme ausgehend — und hiermit beginnen die wesentlichsten neueren Fortschritte — zeigte *Weingarten* weiter, dass die Flächen[304]), für die

---

die für $\alpha = 1$ ein imaginäres Rotationsparaboloid liefert; *Darboux* erhält Leçons 3, p. 333 ein *reelles* dadurch, dass die willkürlichen Kurven auf der Kugel konjugiert imaginär genommen werden (s. unten p. 425).

300) *Weingarten,* ibid. Fussnote 308.

301) *Darboux,* Leçons 3, p. 373; auch 4, Note XI, p. 514 (III D 5, Nr. 17).

302) Über die Bedeutung der Gleichungen bei reellen $c \gtreqless 0$ siehe *Darboux,* Leçons 3, p. 372 und *Bianchi,* p. 330.

303) *Weingarten,* Über eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, Götting. Nachr. 1878, p. 28; sie bildete das erste Beispiel einer Gruppe, in der sich keine Rotationsfläche befindet.

304) *Weingarten,* Paris, C. R. 112 (1891), p. 607. Durch Einführung einer neuen Konstanten im Ansatz von *Weingarten* verallgemeinert *E. Goursat* da-

$$(6)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}(R_1+R_2)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}R_1R_2=0,$$

wo φ eine gegebene Funktion der u, v ist, *die vollständige Gruppe der Flächen des Längenelementes*

$$(7)\qquad \left(d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right)^2+2u\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+2v\left(d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right)^2=ds^2$$

bilden, und gewinnt durch den Ansatz

$$\varphi=uv-\frac{\beta}{2}u^2-\frac{u^3}{3}$$

mittels Quadraturen *alle* zu den Flächen des Längenelementes

$$ds^2=t^2dv^2+(t^2-1)\,dt^2$$

isometrischen Flächen mit der typischen reellen Rotationsfläche[299]):

$$x=\alpha t\cos\frac{v}{\alpha},\quad y=\alpha t\sin\frac{v}{\alpha},\quad z=\int\sqrt{t^2-\alpha^2-1}\cdot dt.$$

Durch eine synthetische auf kinematischen Prinzipien beruhende Entwicklung erhält *Darboux*[305]) *Weingarten*'s partielle Differentialgleichung (6) aufs neue und verallgemeinert dessen Resultate für den Ansatz:

$$\varphi(u)=uv-\psi(u)-\frac{u^3}{3},$$

der sich auf die Flächen des Längenelementes

$$(8)\qquad ds^2=dt^2+2\,(t+\psi'(v))\,dv^2$$

bezieht, womit die Bestimmung aller hierzu isometrischen Flächen auf die Lösung der *Laplace*'schen Gleichung (II A 5, Nr. **53**)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2}$$

zurückgeführt wird. Bei geeigneter Annahme von $\psi(v)$ ergeben sich dann die bereits angeführten Fälle wieder, insbesondere auch die von *Baroni* schon früher behandelten[306]).

---

selbst p. 707, das Verfahren so, dass auch für unendlich viele Werte der Konstanten a *alle* Flächen des Längenelementes

$$ds^2=du^2+(u+av^2)\,du^2$$

durch Quadratur mittels bekannter Methoden gefunden werden können. Man vgl. *E. Goursat,* Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionelle à la distance d'un point fixe un plan tangent, Americ. Journ. of math. 10 (1888), p. 187, sowie in Bezug auf die *Weingarten*'sche Gleichung (6) des Textes *E. Goursat,* Sur un théorème de *Weingarten,* et sur la théorie des surfaces applicables, Toulouse Ann. 5, E. p. 1 (1891).

305) *Darboux,* Leçons 4, p. 308 ff.

306) *E. Baroni,* Superficie in cui la somma dei raggi di curvatura è proporzionale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente, Giorn. di mat.

Insbesondere bemerkt *Darboux*[307]), dass das Paraboloid, das mit einer seiner Erzeugenden den imaginären Kreis berührt (paraboloide à plan directeur isotrope) unter den Flächen des Längenelementes (8) enthalten ist. Von nun an richten sich die Bemühungen der französischen Mathematiker insbesondere auf die allgemeinen Paraboloide. Wir erwähnen da *Thybaut*'s[308]), an die durch *Weingarten*'s Preisschrift veranlasste Verwendung der Lehre von den Strahlensystemen sich anschliessende Arbeit, welche das Paraboloid betrifft, dessen Axe den imaginären Kreis schneidet; nach *E. Cosserat*[309]) reduziert sich die Bestimmung seiner Flächengruppe auf das Problem der Flächen konstanter Krümmung.

Die neuesten Arbeiten von *Darboux* und *Guichard*[310]), welche mit den zu den *Rotationsflächen*, dann zu den *allgemeinen Flächen zweiten Grades* isometrischen sich beschäftigen, zeigen, dass das soeben erwähnte, allerdings bis jetzt nicht völlig gelöste, Problem durch die vielfachen Beziehungen, in die es mit scheinbar weit abliegenden Fragen tritt, eine neue Bedeutung erlangt hat; eine weitere Ausführung ist aber in Kürze hier nicht möglich.

D. Die infinitesimale Isometrie.

32. Infinitesimale Deformation und Isometrie der Flächen. Eine von Biegungsparametern stetig abhängende Gruppe isometrischer Flächen (Nr. **19**) besitzt unendlich kleine Deformationen, durch welche eine Fläche in eine benachbarte *gebogen* wird. Unter einer *unendlich kleinen, infinitesimalen Deformation* einer Fläche versteht man über-

---

28 (1890), p. 349; in Zusammenhang mit *P. Appell*'s Arbeit, Americ. Journ. of math. 10 (1888), p. 175. Eine Zusammenfassung der Resultate von *Darboux, Baroni, Goursat* giebt auch *L. Raffy,* vermöge eines fruchtbaren Theorems über Haupttangentenkurven: Sur la déformation générale des surfaces, Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 119.

307) *Darboux,* Leçons 4, p. 334.

308) *A. Thybaut,* Sur la déformation du paraboloide, J. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 45, s. Fussn. 133 und III D 5, Nr. **37**.

309) *E. Cosserat,* Paris, C. R. (1897), p. 741; vgl. auch *C. Guichard,* Paris, C. R. 126 (1898), p. 1616; 130 (1901), p. 398.

310) *C. Guichard*, Sur la déformation des quadriques de révolution, Paris, C. R. 128 (1898), p. 232; andere Sätze von *A. Thybaut,* C. R. 131 (1900), p. 932 und *C. Guichard,* C. R. 125 (1897), p. 596; 132 (1901), p. 398 beziehen sich auf die Ableitung neuer Deformationen aus bekannten der Flächen zweiten Grades. *Darboux'* Arbeiten sind zusammengestellt unter dem Titel: Sur la déformation des surfaces du second dégré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante, J. éc. norm. (3) 6 (1899), p. 465.

haupt den Prozess, durch den jedem Punkte $P(x, y, z)$ von F ein Punkt $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ von F':

$$\bar{x} = x + \varepsilon x_1, \quad \bar{y} = y + \varepsilon y_1, \quad \bar{z} = z + \varepsilon z_1$$

zugeordnet wird, wo ε eine unendlich kleine Konstante[311]). Wird überdies noch verlangt, dass

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$$

bis auf Glieder mit ε^2 (exclusive) ist, sodass

$$(2) \qquad dx dx_1 + dy dy_1 + dz dz_1 = 0$$

sein muss, so hat man eine *infinitesimale Isometrie*[312]).

Dieser Prozess hat einen *grösseren Umfang* wie der der *infinitesimalen Biegung*. Denn bei der letzteren kann eine Kurve auf der Fläche nur dann ungeändert bleiben, wenn sie Haupttangentenkurve derselben ist (Nr. 19). Dagegen ist es möglich, infinitesimale Isome-

---

311) Es ist eine wichtige Aufgabe, die Änderungen der wesentlichen Invarianten der Fläche bei infinitesimaler Deformation zu bestimmen. Schon *Jellett* (Dublin Trans. 22 (1854), p. 348) bestimmte $\delta \frac{1}{R_1 R_2}$ bei der infinitesimalen Isometrie; siehe auch *E. Beltrami*, Bologna Mem. (4) 3 (1882), p. 217, § 12; allgemein entwickeln *Ribaucour* (1876), J. de math. (4) 7 (1891), p. 237 und *E. Cosserat*, Toulouse Ann. 8, E. 2 (1894) die Variation von k und h. Siehe auch *E. Cesàro*, Teoria intrinseca delle deformazioni infinitesime, Napoli Rend. (2) 8 (1894), p. 149, insbes. p. 154.

Mit der Theorie der allgemeinsten Deformationen beschäftigen sich *A. Voss*, Über infinitesimale Flächendeformationen, Deutsche Math.-Verein. 4 (1895), p. 132; *E. Danièle*, Sulle deformazioni delle superficie flessibili ed estensibili, Torino Atti (2) 1 (1899), p. 25, der *Weingarten*'s Differentialgleichung (6) des Textes für diesen Fall erweitert. Teilweis inextensible Flächen betrachtet schon *Jellett* a. a. O. p. 362. Die Theorie der allgemeinen infinitesimalen Deformation ist übrigens in der *Mechanik* (IV 14, Nr. 16) entstanden, man vergleiche:

L. Lecornu, Équilibre des surfaces flexibles et inextensibles, J. éc. polyt. cah. 48 (1880), p. 1; *E. Beltrami*, Sul equilibrio delle superficie flessibili ed inestensibili, Bologna Mem. (4) 3 (1882), p. 218; *G. Morera*, Roma Lincei Trans. (3) 7 (1883), p. 268; *V. Volterra*, ibid. Trans. (3) 8 (1884), p. 214, 244; *F. Kötter*, Über das Gleichgewicht biegsamer unausdehnsamer Flächen, Diss. Halle 1883 und J. f. Math. 103 (1888), p. 44; *E. Danièle*, Sul equilibrio delle reti, Palermo, Circolo 13 (1898), p. 13.

312) Die infinitesimale Deformation ist also die erste Annäherung der von einem Parameter ε abhängigen Transformationen:

$$\bar{x} = x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots;$$

wird die Bedingung der Isometrie hinzugefügt, so kann man diese Transformationen mit beliebiger Annäherung durch Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung mittelst *Quadraturen* ermitteln, wenn das Problem der infinitesimalen Isometrie vollständig gelöst ist, *Darboux*, Leçons 4, p. 5.

trieen anzugeben, bei denen eine solche Kurve fest bleibt, ohne als Haupttangentenkurve der deformierten Fläche sich zu erhalten[313]). Auch wird bei der infinitesimalen Isometrie nach *Ribaucour*

$$\delta\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) = 0$$

bis auf Glieder in ε^2, während bei einer infinitesimalen Biegung $\delta(k)$ *identisch* verschwindet.

Nach (2) bilden die Flächen $F(xyz)$ und $F'(x_1 y_1 z_1)$ ein *Moutard*-sches[314]) oder *Ribaucour*'sches Flächenpaar und die Aufgabe der infinitesimalen Isometrie besteht in der Aufsuchung solcher Paare. Jede infinitesimale Isometrie liefert aber auch ein isometrisches Flächenpaar[315]) mit den Koordinaten:

$$\xi_1 = x + tx_1, \quad \eta_1 = y + ty_1, \quad \zeta_1 = z + tz_1,$$
$$\xi_2 = x - tx_1, \quad \eta_2 = y - ty_1, \quad \zeta_2 = z - tz_1,$$

denn es ist für jedes *konstante* t:

$$d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2 = d\xi_2^2 + d\eta_2^2 + d\zeta_2^2.$$

Man löst die Gleichung (2) bei gegebenen x, y, z durch den *Darboux*'schen Ansatz[316]):

$$(3) \qquad \begin{cases} dx_1 = c\,dy - b\,dz, \\ dy_1 = a\,dz - c\,dx, \\ dz_1 = b\,dx - a\,dy, \end{cases}$$

woraus für

$$b = p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad a = -q_1 = -\frac{\partial z_1}{\partial y}$$

mit Hülfe der Integrabilitätsbedingungen (II A 5, Nr. 58) von (3) die *Jellett*'sche Gleichung[317])

313) *Weingarten,* Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, J. f. Math. 100 (1887), p. 296 u. 309. Da es also infinitesimale Deformationen giebt, die nicht unendlich kleine Elementarstufen endlicher Biegungen sind, scheint es angemessen, infinitesimale Biegung und Isometrie zu unterscheiden.

314) *Moutard,* Paris soc. Philom. Bull. (1869), p. 45; Paris, C. R. 70 (1870), p. 834; 96 (1883), p. 766; *A. Ribaucour,* Paris Soc. Philom. Bull. (1869), p. 37.

315) *Weingarten,* J. f. Math. 100, p. 300. Umgekehrt bilden für zwei isometrische Flächen $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$; $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$; $x = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$, $x_1 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}$ etc. ein *Moutard*-sches Paar und die *Mittelfläche* derselben ist einer infinitesimalen Isometrie fähig, bei der jeder Punkt in der Verbindungslinie der korrespondierenden Punkte verschoben wird; vgl. *Bianchi,* p. 288. Die Tangenten einer Fläche, welche senkrecht zur Verschiebungsrichtung bei einer infinitesimalen Isometrie stehen, bilden ein W-Strahlensystem (*Bianchi,* p. 316).

316) *Darboux,* Leçons 4, p. 8.

317) *Jellett,* Fussn. 180, p. 347.

$$rt_1 + tr_1 - 2ss_1 = 0$$

entsteht, welche nach *Darboux*[318]) aussagt, dass die Haupttangentenkurven von F bei orthogonaler Projektion auf F' ein konjugiertes System der letzteren bilden.

Eine *zweite* Behandlung ergiebt sich vermöge der Benutzung der *Lelieuvre*'schen Formeln[319]) (Einführung der Haupttangentenkurvenparameter u, v von F).

Sind $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ drei partikuläre Lösungen der *Moutard'-Laplace*'schen Gleichung (II A 5, Nr. 53):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta,$$

und ω ihre allgemeine Lösung, so kann man die Koordinaten x, y, z von F auf die Form

$$a_x = \int du\,(a\theta\theta_u) - \int dv\,(a\theta\,\theta_v) \tag{4}$$

bringen[320]); die Fläche F' ist dann durch

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 \tag{5}$$
$$= \int du \left(\frac{\partial\omega}{\partial u} a_\theta - \omega \frac{\partial a_\theta}{\partial u}\right) - \int dv \left(\frac{\partial\omega}{\partial v} a_\theta - \omega \frac{\partial a_\theta}{\partial v}\right)$$

bestimmt, dabei ist:

$$M = -f + \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u \partial v},$$

wo f der Koeffizient von $2dudv$ des sphärischen Bildes der Haupttangentenkurven von F und $\varrho^2 k = -1$ ist.

Weingarten[321]) zerlegte die Gleichung (2) in:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

---

318) *Darboux,* Leçons 4, p. 10.

319) *L. Lelieuvre,* Bull. scienc. math. 12 (1888), p. 126 (III D 3, Nr. 9). Ähnliche Formeln zur Darstellung einer Fläche in Bezug auf ihre Minimalkurven geben *E. Cosserat,* Paris, C. R. 125 (1897), p. 159; noch einfacher *E. Goursat,* Paris soc. math. Bull. 26 (1898), p. 8.

320) Die Gleichungen (4), (5) sind Identitäten in Bezug auf die willkürlichen Koeffizienten a, die Klammerausdrücke rechts sind dreireihige Determinanten, $a_x = a_1 x + a_2 y + a_3 z$, $a_\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$, $\theta_u = \frac{\partial\theta}{\partial u}$; vgl. *Darboux,* Leçons 4, p. 24; *Bianchi,* p. 295.

321) *Weingarten,* Berlin. Ber. 1886, p. 83; J. f. Math. 100 (1887), p. 299.

und findet mittels der invarianten *Verschiebungs-* oder *charakteristischen Funktion*[322]):

$$\varphi = \frac{1}{2T}\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

welche der Gleichung

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N\frac{\partial \varphi}{\partial u} - M\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{kT}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L\frac{\partial \varphi}{\partial v} - M\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{kT}\right) + Th\varphi = 0$$

genügen muss, die x_1, y_1, z_1 durch Quadraturen.

Die Gleichung (6) wird nach *Bianchi* durch Einführung des sphärischen Bildes von F in die Form[323])

$$L\varphi_{22} - 2M\varphi_{12} + N\varphi_{11} = 0$$

gebracht. Da nun der Abstand der Tangentenebene von F vom Anfang der Koordinaten den Gleichungen[324])

$$\psi_{11} + L = 0,$$
$$\psi_{12} + M = 0,$$
$$\psi_{22} + N = 0$$

genügt, so erhält man, wenn φ als Abstand der Tangentenebene einer Fläche Φ mit demselben sphärischen Bilde wie F angesehen wird, deren Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L_1, M_1, N_1 sind, an Stelle von (6) die Gleichung in der *Jellett*'schen Form:

$$(7)\qquad N_1 L - 2MM_1 + L_1 N = 0,$$

oder:

$$\varphi_{11}\psi_{22} - 2\varphi_{12}\psi_{12} + \varphi_{22}\psi_{11} = 0.$$

Die beiden durch parallele Normalen zugeordneten Flächen F und Φ heissen wegen der durch (7) bedingten Reziprozität *associiert*[325]). Die Entfernung der Tangentenebene vom Anfang für die *eine* Fläche ist eine charakteristische Funktion der *andern*, und die Developpabelen der Kongruenz der Verbindungslinien korrespondierender Punkte von F und Φ schneiden jede dieser Flächen in konjugierten Systemen mit gleichen Invarianten der betreffenden *Laplace*'schen Differential-

322) So *Bianchi*, p. 289. Die Invariante φ bedeutet nach *V. Volterra* (Roma Lincei Rend. (4) 1 (1884), p. 274: Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestensibili) die nach der Normale von F genommene Drehungskomponente des Flächenelementes von φ. Vgl. auch *A. Voss*, Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche, Münch. Ber. 1897, p. 229.

323) Die Bedeutung der Symbole φ_{ik} bei *Bianchi*, p. 292.

324) Siehe *Weingarten*, Festschrift d. techn. Hochschule, Berlin 1884.

325) Der Begriff *associierter* Flächen wird eingeführt von *Bianchi*, Roma Lincei Rend. (5) 1 (1892), p. 41; vgl. *Bianchi*, p. 293.

gleichung[326]). Endlich kann auch die Gleichung (7) durch die *Lelieuvre*'sche Transformation und die Substitution[327])

$$\varphi \sqrt{\varrho} = \theta$$

wieder auf die *Moutard*'sche Normalform

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M\theta \tag{8}$$

gebracht werden[328]).

Nach (7) entsprechen den Haupttangentenkurven von F konjugierte Systeme gleicher Invarianten von Φ. Und da umgekehrt zu jedem solchen System auf einer willkürlichen Fläche Φ eine Fläche F mit *Moutard*'scher Zuordnung gehört, so ist die *Bestimmung der infinitesimalen Isometrieen einer Fläche Φ identisch mit der Bestimmung aller konjugierten Systeme gleicher Invarianten*[329]). Hieraus geht auch hervor, dass die infinitesimalen Isometrieen irgend einer Fläche aus denen einer ihrer *projektiven Umformungen* gefunden werden können[330]). Bei *Darboux* finden sich noch andere Transformationen, die in Bezug auf das Problem der infinitesimalen Isometrie invariant sind, so ausser der dualistischen Umformung die zusammengesetzte Inversion[331]). Insbesondere kann man für jede durch *Bianchi*'s Prozess aus einer Fläche konstanter Krümmung entstehende Fläche (Nr. 29) die sämtlichen infinitesimal isometrischen bestimmen, falls dies für die ursprüngliche geschehen ist[332]). Die infinitesimale Isometrie der

326) *Bianchi*, p. 295.

327) Bei positiv gekrümmten Flächen erreicht man auf reellem Wege eine ähnliche Normalgleichung durch Einführung der *isotherm konjugierten* Systeme, *Bianchi*, p. 296 (III D 3, Nr. 42).

328) Eine *vierte* Behandlung des Problems beschränkt sich auf die Ermittelung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der infinitesimal deformierten Flächen; sie führt insbesondere bei den Regelflächen zum Ziel (*Bianchi*, p. 307), deren allgemeine auf Haupttangentenkurven bezogene Darstellung durch G. *Königs*, Paris, C. R. 106, p. 57 bekannt ist.

329) *E. Cosserat*, Paris, C. R. 115 (1892), p. 1252; Sur les congruences de droites, Toulouse Ann. 7, Nr. 60 (1892); vgl. *A. Voss*, Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 39 (1891), p. 207 ff.; *Darboux*, Leçons 4, p. 51. Man vgl. auch *Bianchi*'s Satz: das konjugierte System von F, das den Haupttangentenkurven der bei einer infinitesimalen Isometrie associierten Fläche φ entspricht, bleibt bei dieser Isometrie *konjugiert*, *Bianchi*, p. 299.

330) Direkter Beweis bei *Darboux*, Leçons 4, p. 76 vermöge der Eigenschaften der identischen Kovariante bei der Transformation von Ebenen und Punktkoordinaten (I B 2, Nr. 2).

331) *Darboux*, Leçons 4, p. 80 ff. inversion composée; noch allgemeiner p. 83.

332) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1891), p. 19 und 223; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 40; daselbst auch die partielle Differentialgleichung für die Isometrien der Flächen mit konstantem k.

Flächen zweiten Grades reduziert sich auf die der Kugel, deren Bestimmung schon *Ribaucour* mit Hülfe der Minimalflächen gegeben hat[333]. Die der Kugel nach *Moutard* zugeordneten Flächen sind umgekehrt durch eine *äquidistante* infinitesimale Isometrie ausgezeichnet[334]. Die infinitesimale Isometrie der *Minimalflächen* führt nach *Darboux*[335] auf die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \theta\,(U - V).$$

Es sei hier endlich noch hingewiesen auf die allgemeineren Untersuchungen über infinitesimale Deformationen, welche den infinitesimalen Berührungstransformationen (III D 8) entsprechen, und auf deren Anwendung auf *geometrisch-physikalische Theorieen*[336].

33. Das Problem der sphärischen Abbildung. Das *allgemeine Problem*[337] verlangt die Bestimmung derjenigen Flächen F, für die das Längenelement

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

der sphärischen Abbildung *gegeben* ist. Man hat dann zuerst die Koordinaten X, Y, Z des betreffenden Kugelpunktes (wenn sie nicht direkt gegeben sind) aus der zugehörigen *Riccati*'schen Gleichung zu bestimmen, sodann die Fundamentalgrössen L, M, N aus den für diesen Zweck in Bezug auf die sphärische Abbildung umgeformten *Codazzi*'schen Gleichungen[338] (III D 3, Nr. 23), und endlich die x, y, z vermöge der *Quadraturen*

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}(eg - f^2) = \dfrac{\partial X}{\partial u}(fM - gL) + \dfrac{\partial X}{\partial v}(fL - eN), \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v}(eg - f^2) = \dfrac{\partial X}{\partial u}(fN - gL) + \dfrac{\partial X}{\partial v}(fM - eN) \end{cases}$$

zu ermitteln. Ein besonders einfacher, von *Dini*[339] zuerst bemerkter Fall ist der, wo die Abbildung der *Haupttangentenkurven* von F gegeben, also $L = N = 0$ ist, während M aus den *Codazzi*'schen

---

333) *Ribaucour*, Étude, p. 63.

334) *Darboux*, Leçons 4, p. 15; vgl. *A. Mehling*, Diss. Würzburg 1898.

335) *Darboux*, Leçons 4, p. 93.

336) *H. Bruns*, Das Eikonal, Leipz. Abh. 21 (1895), p. 323; *F. Hausdorff*, Infinitesimale Abbildungen in der Optik, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 79.

337) *U. Dini*, Supra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni, Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 175.

338) Diese reduzieren sich hier auf *zwei*; die dritte liefert das Krümmungsmass der Kugel und ist eine Identität.

Gleichungen durch Quadratur folgt; die Gleichungen (1) werden dann für $k = -1/\varrho^2$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}(eg - f^2) = \varrho \left(f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(eg - f^2) = \varrho \left(f\dfrac{\partial X}{\partial v} - g\dfrac{\partial X}{\partial u}\right), \end{cases}$$

und das Längenelement der somit durch Quadratur bestimmten Fläche[340]) F wird:

$$ds^2 = \varrho^2 (edu^2 - 2f du dv + g dv^2).$$

Ist dagegen die sphärische Abbildung eines *konjugierten* Systems von F gegeben, so bleibt ausser den Quadraturen noch eine *Laplace*'sche Gleichung zu lösen.

Unter dem *speziellen Problem der sphärischen Abbildung* versteht man die Aufgabe, alle Flächen zu bestimmen, die ein gegebenes sphärisches Bild der *Krümmungslinien* haben. *Darboux* hat seit 1868 sich mit diesem für die Lehre von den infinitesimalen Isometrieen, den isometrischen Flächenpaaren[341]) und den Krümmungslinien wichtigem Probleme beschäftigt, und verschiedene Lösungen desselben gegeben[342]).

Ist die Tangentenebene von F im Punkte P[343]):

$$(3) \qquad (\alpha + \beta) X + i(\beta - \alpha) Y + (\alpha\beta - 1) Z + \xi = 0,$$

wo ξ eine Funktion der *Bonnet*'schen Variabeln α, β (III D 3, Nr. 7), so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$(4) \qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = 0,$$

wenn

339) *Dini*, ibid. p. 183. Durch Einführung der isotherm konjugierten Systeme bei Flächen positiver Krümmung entwickelt *Bianchi*, p. 136, einen ähnlichen Satz.

340) Vgl. z. B. *Bianchi*, p. 125; 141.

341) Über den Zusammenhang desselben mit den cyklischen Systemen *Ribaucour*'s vgl. *Bianchi*, p. 345.

342) *Darboux*, Bestimmung der Flächen, deren Krümmungslinien zum Bilde konfokale Ellipsen und Hyperbeln haben, Paris, C. R. 68 (1869), p. 253; dort auch der Satz, dass, wenn zwei Flächen $x = f$, $y = \varphi$, $z = \psi$ und $x = F$, $y = \Phi$, $z = \Psi$ dasselbe sphärische Bild der Krümmungslinien haben, dasselbe auch von der *Resultante* $x = af + bF$, $y = a\varphi + b\Phi$, $z = a\psi + b\Psi$ gilt; Lösung mit Hülfe der Ebenenkoordinaten Paris, C. R. 94 (1882), p. 120, 158, 1290, 1343 und 96 (1883), p. 366; sodann allgemeine Behandlung des Problems Ann. éc. norm. (3) 5 (1888), p. 78 (III D 3, Nr. 35).

343) Dies ist *O. Bonnet*'s auf die Minimalkurven der Kugel bezogenes Koordinatensystem, J. de math. (2) 5 (1860), p. 227.

$$p = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial \xi}{\partial \beta}$$

gesetzt ist.

Die Koordinaten des zu P gehörigen Kugelpunktes p sind ferner:

(5) $$X = \frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad Y = i\,\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad Z = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1},$$

und als Funktionen der Parameter u, v eines Orthogonalsystems auf der Kugel gegeben. Sollen sie den Krümmungslinien von F entsprechen, so folgt aus (4):

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial v} = 0$$

oder:

(6) $$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial v},$$

(7) $$\frac{\partial p}{\partial u} = \lambda^2 \frac{\partial q}{\partial u}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\lambda^2 \frac{\partial q}{\partial v};$$

also nach (5) und (6):

(8) $$\frac{\partial\left(\frac{X - Yi}{1 - Z}\right)}{\partial u} = \lambda^2 \frac{\partial\left(\frac{X + Yi}{1 - Z}\right)}{\partial u},$$

womit λ bekannt ist; zugleich wird bei reellen Lösungen mod. $\lambda = 1$. Zur Ermittelung von ξ muss man noch p und q auf die allgemeinste Weise aus (7) bestimmen, oder die Gleichung

(9) $$\frac{1}{\lambda q}\frac{\partial^2 \lambda q}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}$$

lösen. Dies ist aber dieselbe Differentialgleichung, auf die *Darboux*[344]) das Problem der infinitesimalen Isometrie einer auf ihre Haupttangentenkurven bezogenen Fläche zurückführte; ein Zusammenhang, der auf den Berührungstransformationen beruht, welche Haupttangentenkurven in Krümmungslinien verwandeln[345]) (III D 8).

Die Fälle, in denen sich die Gleichung

(10) $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta$$

---

344) *Darboux*, Leçons 1, p. 24 und 4, p. 171; vgl. *G. A. Nitsche*, Diss. Leipzig 1898, p. 64.

345) In der That ordnet diese *Lie*'sche Transformation den infinitesimalen Isometrieen einer Fläche mit bekannten Haupttangentenkurven eine andere Fläche mit bekannnten Krümmungslinien zu, für die das Problem der sphärischen Abbildung gelöst ist. — Und ebenso entspricht der Lösung des Problems der infinitesimalen Isometrie für alle collinear verwandten Flächen die des Problems der sphärischen Abbildung für alle durch reziproke Radien verwandten, *Darboux*, Leçons 4, p. 177.

vollständig nach der Methode von *Laplace* lösen lässt, sind nach *Darboux* bekannt. Da aber nach (8) mod. $\lambda = 1$ bei reeller Zuordnung sein muss, so entsteht die Frage nach den integrierbaren Gleichungen dieses besonderen Charakters; es ist *Darboux* gelungen, dieselbe zu erledigen[346].

34. Die isometrischen Flächenpaare. Die Bedingung isometrischer Flächenpaare F, F' führt auf die totale Differentialgleichung:

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 \text{ (Nr. 32)},$$

oder für:

$$x - x_1 = \xi_1, \quad x + x_1 = \xi_2 \text{ etc.}$$

auf:

$$(2) \qquad d\xi_1 d\xi_2 + d\eta_1 d\eta_2 + d\zeta_1 d\zeta_2 = 0,$$

mithin auf die *Moutard'sche* Zuordnung (vgl. Nr. 13). Die weitere Verfolgung dieses Gesichtspunktes liefert die merkwürdige Gruppe der zwölf Flächen[347]), und die Möglichkeit, aus jedem Flächenpaare fünf andere durch eine bereits 1869 von *Ribaucour*[348]) gegebene Konstruktion abzuleiten.

Für die Aufgabe, aus einem Paare isometrischer Flächen F, F' durch Transformation neue Paare F, F′ herzuleiten, hat schon *Peterson*[349]) 1868 eine, durch *Stäckel*[350]) weiter entwickelte Methode gegeben.

Ist nämlich:

$$ds^2 = ds_1^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

so setze man, um der für F, F′ erforderlichen Beziehung $ds^2 = ds_1^2$ zu genügen, für die Koordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1 dieser Flächen die Gleichungen

$$dX = P\frac{\partial x}{\partial u}du + Q\frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$dX_1 = P\frac{\partial x_1}{\partial u}du + Q\frac{\partial x_1}{\partial v}dv$$

an. Vermöge der Integrabilitätsbedingungen müssen die unbekannten Funktionen P, Q der Gleichung

346) Vgl. *Darboux,* Leçons 2, p. 23—218; 4, p. 178 ff.

347) *Darboux,* Leçons 4, p. 48 ff.

348) *Ribaucour,* Étude, p. 229.

349) *Peterson,* p. 50 vgl. *B. Mlodzieiowski,* Bull. sciences math. (2) 15 (1891), p. 97.

350) *P. Stäckel,* Über Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 (1896), p. 255, insbesondere p. 273 ff. Vgl. auch *C. Guichard,* J. de math. (5) 2 (1896), p. 174.

$$\frac{\partial P\frac{\partial\theta}{\partial u}}{\partial v} = \frac{\partial Q\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\partial u}$$

für $\theta = x, y, z; x_1, y_1, z_1$ genügen; man erhält so bei Voraussetzung des gemeinsamen konjugierten Systems (Nr. 2) von F und F' für P, Q zwei lineare Differentialgleichungen, die in gewissen Fällen eine einfache Behandlung gestatten.

P. Adam[351]) bemerkte, dass aus der Isometrie von F und F' auch die von

$$\mathrm{F}\begin{cases} X = x + b(z+z_1) - c(y+y_1) \\ Y = y + c(x+x_1) - a(z+z_1) \\ Z = z + a(y+z_1) - b(x+x_1) \end{cases}$$

$$\mathrm{F}'\begin{cases} X_1 = x_1 - b(z+z_1) + c(y+y_1) \\ Y_1 = y_1 - c(x+x_1) + a(z+z_1) \\ Z_1 = z_1 - a(y+y_1) + b(x+x_1) \end{cases}$$

folgt. Daran knüpfte *Stäckel*[352]) die allgemeine Frage nach der Transformationsgruppe, welche dem *Liouville*'schen Satze zufolge (Nr. 6)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (idx_1)^2 + (idy_1)^2 + (idz_1)^2$$

in

$$\varrho^2\,[dX^2 + dY^2 + dZ^2 + (idX_1)^2 + (idY_1)^2 + (idZ_1)^2]$$

verwandelt, d. h. nach den *konformen Transformationen* der Mannigfaltigkeit $x, y, z; x_1, y_1, z_1$.

Im allgemeinen erfordert die Befriedigung der Bedingung (1) die Lösung der Gleichung:

(3) $$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 = dy_1^2 + dz_1^2,$$

wenn man

$$x = \xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad x_1 = i\xi_4$$

setzt, d. h. die Bestimmung von *Flächen* Ξ im Raume von *vier* Dimensionen, die auf die Ebene y_1, z_1 isometrisch abgebildet sind. Diesen an die Vorstellungen der *nicht-euklidischen Geometrie* (III A 1) und der *Liniengeometrie Plücker*'s (III C 9) anknüpfenden Weg hat neuerdings *Guichard*[353]) eingeschlagen, der in charakteristischen Fällen die Gleichung (3) integriert, und so dem Problem der isometrischen Paare neue Gesichtspunkte eröffnet.

---

351) *P. Adam,* Paris soc. math. Bull. 23 (1895), p. 26.

352) *P. Stäckel,* Paris, C. R. 121 (1895), p. 396; sur un groupe continu de transformations avec 28 paramètres (von diesen ∞^{28} Transformationen sind indess nur ∞^{15} wesentlich); vgl. *C. Guichard,* J. de math. (5) 2 (1896), p, 215.

353) *C. Guichard* in der preisgekrönten Arbeit: Sur la déformation des surfaces, J. de math. (5) 2 (1896), p. 123.

Verlangt man insbesondere, dass

$$(4) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1$$

wird, so findet sich, vermöge einer auf die Krümmungslinien der auf der *Hypersphäre* (4) gelegenen Fläche $\Xi\,(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ bezogenen Untersuchung, für die Flächen F und F' die Beziehung, dass der Abstand d eines Punktes P von F von einem festen Punkte und der Abstand d_1 des korrespondierenden Punktes P' von F' von einer festen Ebene durch die Gleichung

$$d^2 - d_1^2 = \text{const.}$$

verbunden ist.

Eine besonders merkwürdige Isometrie besteht endlich darin, dass die Entfernung korrespondierender Punkte P, P' von F und F' *unveränderlich* ist. Bilden die Richtungen PP' eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, so hat man einen bereits von *Ribaucour*[354]) untersuchten Fall; die Kongruenz der Strahlen PP' ist eine *isotrope* (Nr. **13**), ihre Mittelfläche steht mit der Kugel in *Moutard'scher* Beziehung und die explicite Gleichung dieser Flächenpaare lässt sich nach *Caronnet*[355]) leicht angeben; ist das Gebiet der Richtungen PP' eindimensional, so entstehen gewisse Paare von Regelflächen, die mehrfach untersucht sind, und sich leicht konstruieren lassen[356]).

E. Geometrische und mechanische Modelle zur Lehre von der Abbildung und Abwickelung der Flächen.

35. Geometrische und mechanische Modelle. Zu anschaulichen Vorstellungen führt die Betrachtung der krummen Fläche als Grenze eines umbeschriebenen Polyeders (I A 3, Nr. **11**). Demgemäss lassen sich manche Hauptsätze der Biegungstheorie durch die Deformation eines ungeschlossenen Polyeders veranschaulichen[357]). Besonders wichtig wird dabei das gemeinsame konjugierte System zweier isometrischer Flächen; da dasselbe jede der Flächen in *ebene* infinitesimale Vierseite zerlegt, so kann man die Formänderung als Deformation eines Polyeders mit

---

354) *A. Ribaucour,* Étude, p. 60.

355) *Th. Caronnet,* Sur des couples de surfaces applicables, Paris soc. math. Bull. 21 (1893), p. 134.

356) *Caronnet,* ibid.; *X. Antomari,* Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 58; *E. Genty,* ibid. p. 36; *A. Demoulin,* ibid. 23 (1895), p. 71; *P. Adam,* ibid. 23, p. 219.

357) *E. Kretschmer,* Die krumme Fläche für die Theorie der Krümmung als Grenze eines eingeschriebenen Polyeders, Programm Friedr. Wilhelmsgymnasium Posen, 1875.

ebenen infinitesimalen viereckigen Seitenflächen ansehen[358]). Auch *Gauss'* Satz von der Erhaltung des Krümmungsmasses findet nun seine Erläuterung, denn für die vier an einem Punkte anstossenden Kantenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ solcher konjugierten Vierseite und den Flächeninhalt df eines derselben findet beim Grenzübergang die Gleichung[359])

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi - kdf$$

statt. Auch für technische Fragen kann diese Auffassung nützlich werden[360]).

Sodann finden die konformen Abbildungen physikalisch in mehrfacher Weise Anwendung und Realisierung durch *stationäre elektrische Strömungen* (V 15 ff.). Die Stromkurven und die Kurven konstanten Potentials bilden ein Orthogonalsystem, dessen konforme Abbildungen auf irgend eine Fläche wieder eine mögliche Strömungsbewegung liefern[361]). Übrigens kann man auch durch ein elektrolytisches Verfahren diese Kurvensysteme direkt sichtbar machen[362]). In instruktiver Weise hat *Finsterwalder*[363]) die konforme Abbildung durch *deformierbare Geflechte* aus drei Scharen von unter unveränderlichen Winkeln

358) Das gemeinsame konjugierte System (*Peterson's* Biegungslinien, *Peterson,* p. 58) ist indess nicht immer *reell*; so z. B. gerade für den Fall der isometrischen Minimalflächen, vgl. Fussn. 14.

359) Vgl. *E. Kretschmer,* Fussn. 357; auch *S. Finsterwalder,* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsche Math.-Verein. 6 (1899), p. 61; sodann *L. Natani* in *Joachimsthal's* Anwendung der Differentialr., p. 233; *R. Sturm,* Ein Analogon zu *Gauss'* Satz von der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 21 (1883), p. 379; in weiterer Ausführung *P. Pizzetti,* Sui poliedri deformabili, Roma Lincei Rend. (5) 7 (1898), p. 19.

360) *M. Lévy,* Sur une application industrielle du théorème de Gauss, Paris, C. R. 86 (1878), p. 111.

361) So für die elektrische stationäre Strömung *G. Kirchhoff,* Berlin Ber. 1875, p. 487; *A. Töpler,* Ann. Phys. Chemie 160 (1877), p. 375; in weiterer Ausführung bei *F. Klein,* Über *Riemann's* Theorie der algebraischen Funktionen ihre Integrale, Leipzig 1882; Autogr. Vorlesungen über *Riemann'sche* Flächen, I, Göttingen 1894, p. 13 ff. In Bezug auf die Anwendungen auf hydrodynamische Probleme vgl. z. B. *G. Kirchhoff,* Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig 1876, p. 273 ff.; *E. Beltrami,* Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 329; Opere 1, p. 318; *H. Lamb,* Hydrodynamics, Cambridge 1895, p. 114, 253; für nicht wirbelfreie Bewegungen ist die konforme Abbildung übrigens von beschränkter Anwendbarkeit, vgl. *E. Zermelo,* Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 201.

362) *A. Guébhard,* Sur une méthode expérimentale propre à déterminer les lignes de niveau, Paris, C. R. 90 (1884), p. 984; vgl. auch Journ. phys. 2 (1882), p. 205.

363) *S. Finsterwalder,* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsche Math.-Verein. 6 (1899), p. 48.

sich kreuzenden Drähten veranschaulicht, welche auf stetig gekrümmten Flächen ausgebreitet werden können, und damit eine Reihe weiterer Untersuchungen geschaffen, die im folgenden noch kurz dargelegt werden sollen.

Bei der Verbiegung einer *Lamelle*, d. h. eines aus Flächenelementen gebildeten Streifens mit einer bestimmten *Axe* in eine *ebene* Lamelle wird nach *Minding* die geodätische Krümmung der Lamellenaxe gleich der gewöhnlichen Krümmung der Axe der ebenen Lamellen. Besteht nun ein „*Geflecht*“ solcher Lamellen aus ebenen geradlinigen Elementen, die zu je vier durch einen Punkt gehend, Seiten und Diagonalen eines Vierseits bilden, so erhält man durch Deformation derselben „*Häute*“, die sich auf jeder Fläche positiver oder negativer konstanter Krümmung ausbreiten lassen. Eine andere Flächenklasse wird gebildet aus dem Geflecht von Lamellentripeln; endlich liefert das Geflecht aus zwei Scharen geradliniger Lamellen, die durch zu einander orthogonale Diagonaldrähte geeignet verbunden sind, bei der Deformation die *Liouville'schen* Flächen.

Ganz anders verhalten sich die Geflechte, bei denen die Flächenelemente der Lamellen nicht wie vorhin, tangential, sondern „*hochkant*“, d. h. senkrecht zu der betreffenden Fläche angeordnet werden, auf welcher ihre Axen nun *Versteifungsrippen* bilden. Betrachtet man auch hier geradlinige Lamellen, so entstehen bei der Deformation Häute, auf denen jene Rippen die *Hauptangentenkurven* bilden; insbesondere lassen sich so auch die *Minimalflächen* veranschaulichen, wenn man für die Erhaltung rechter Winkel zwischen den Rippen sorgt[364]).

In naher Beziehung zu diesen mechanisch-geometrischen Modellen stehen die aus gegeneinander beweglichen starren Gliedern gebildeten *Netze* und deren Gestaltsveränderungen unter dem Einfluss gegebener Kräfte. Es sei damit zugleich hingewiesen auf die mannigfachen Untersuchungen, die auch analytisch von weitergehenden Gesichtspunkten aus über solche biegsame unausdehnbare und dehnbare Netze geführt sind[365])

Modelle zur Demonstration der Flächenbiegung und der Theorie der Flächen konstanter Krümmung (III D 5, Nr. 32 ff.) sind von 1882—1885 unter Leitung von *A. Brill*[366]) sowohl aus Gips als auch aus

364) In ähnlicher Weise lassen sich auch *Stäckel*'s Rotationsflächen (Fussn. 15) zur Darstellung bringen. Modelle von verbiegbaren Minimalflächen sind von *S. Finsterwalder* angegeben.

365) Siehe Fussn. 311.

366) Man vgl. den Katalog von mathemat. Modellen von *J. Brill*, Darm-

biegsamen Metallstreifen zum Auflegen auf andere Flächenstücke, desgleichen auch von *Finsterwalder*[367]) und anderen hergestellt.

Es sei endlich noch hervorgehoben, dass alle diese Modelle nicht nur für Demonstrationen, sondern auch in heuristischer Beziehung von Wichtigkeit sind.

---

stadt 1892, jetzt: Katalog mathem. Modelle, veröffentlicht durch die Buchhandlung von *M. Schilling,* Halle a. S. 1903, p. 102—111; sowie den Katalog mathemat. Modelle, München 1892, p. 291.

367) „Häute" aus Papierstücken von konstanter negativer Krümmung, Katalog, München, p. 293. Übrigens hat schon *J. C. Maxwell* 1854, Scient. Papers 1, p. 80 die Flächen in Rücksicht auf ihre Verbiegung als Grenze eingeschriebener Polyeder betrachtet (vgl. Fussn. 359); daselbst auch p. 86, 98 die in Fussn. 358 *Peterson* zugeschriebenen „lines of bending", sowie p. 95 der in Fussn. 12 erwähnte Satz über das gemeinsame System der Biegungslinien auf zwei isometrischen Flächen.

(Abgeschlossen im August 1903.)

III D 7. BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN.

VON

HEINRICH LIEBMANN

IN MÜNCHEN.

Literatur.

S. Lie und *F. Engel,* Theorie der Transformationsgruppen II und III, Leipzig 1890 und 1893 (Lie-Engel, Trf. II, III).

É. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891, deutsch von H. Maser, Leipzig 1893 [Kap 11, p. 247—294].
S. Lie und *G. Scheffers,* Geometrie der Berührungstransformationen I, Leipzig 1896 (Lie-Scheffers, Btr.).
E. von Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig 1900, [Kap. VIII, p. 256—275, Kap. XI, p. 372—398].
A. R. Forsyth, Theory of differential equations 1, Cambridge 1890, [p. 230—247]; 5, Cambridge 1906, [p. 315—370].
J. E. Campbell, Introductory treatise on Lies Theory of finite continous transformation groups, Oxford 1903 [p. 259—267].
S. Lie, Gesammelte Abhandlungen (Band III im Erscheinen begriffen).

I. Grundlagen.

1. Vorbemerkung. Die Lehre von den Berührungstransformationen (B.-T.) ist in der Math. Enc. schon mehrfach nach ihrer formalen Seite wie in Einzelausführungen behandelt worden (II A 5 *von Weber,* vgl. Nr. **9, 24, 40, 41, 42** und III AB 4b *Fano,* Nr. **13, 15, 24**). Wiederholungen sind daher unvermeidlich, doch sollen vollständig behandelte Theorieen hier nur soweit berücksichtigt werden, als dies der Zusammenhang der Darstellung erfordert.

Unsere erste Aufgabe wird darin bestehen, die verschiedenen Fragen zu besprechen, die zur Entstehung dieses mathematischen Gebietes geführt haben. Es zeigt sich, daß die analytischen Formeln und Theoreme, in denen die allgemeine Grundlage der Berührungstransformationen gegeben ist, im wesentlichen bereits in den Untersuchungen über die kanonischen Substitutionen der Mechanik usw. vorlagen, als *Lie* zu seinen Untersuchungen gelangte. *Lie*s Tätigkeit ist in verschiedenen Nachrufen[1][2][3], auf die wir uns zu stützen haben, eingehend gewürdigt worden. Viele Einzelheiten über die Geschichte der Berührungstransformationen vor *Lie* sind auch in *Lie-Scheffers,* Btr. eingehend dargestellt; insbesondere ist auf *Euler* hinzuweisen, dessen Leistungen später [Nr. **14**] auch hier zu besprechen sind.

1) *M. Nöther, Sophus Lie,* Math. Ann. 53 (1900), p. 1—41.

2) *F. Engel,* Nekrolog auf *Sophus Lie,* Leipz. Ber. 51 (1899), p. XI—LXI.

3) *F. Engel, Sophus Lie* (Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften), Bibl. Math. (3) 1 (1900), p. 166—204. Das Verzeichnis enthält zugleich eine Angabe des Inhalts und gibt die Beziehungen der verschiedenen Arbeiten zueinander an. Über weitere Nachrufe (*Bianchi, Burnside, Darboux* usw.) ist referiert im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 30, Berlin 1899. Alle diese Autoren heben unter den wissenschaftlichen Leistungen von *Lie* vor allem auch die Begründung der Lehre von den Berührungstransformationen hervor.

2. Ableitung aus den Differentialgleichungen für die charakteristischen Streifen. Die Klammerrelationen. Die Berührungstransformationen sind, dem historischen Entwicklungsgang gemäß, einzuführen als Transformationen, welche eine bestimmte Forderung erfüllen sollen. Transformiert man die zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1 \ldots p_n) = C \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

gehörigen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(2)\quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{dF}{dx_i}, \quad \frac{dz}{dt} = \sum_1^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i},$$

welche die „charakteristischen Streifen" (II A 5, Nr. **34**, s. auch unten Nr. 8) darstellen mit Hilfe der Formeln $\left(\text{wo } x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \text{ usf.}\right)$:

$$(3)\quad \begin{aligned} x_i' &= X_i(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ z' &= Z\,(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ p_i' &= P_i(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n); \end{aligned}$$

bezeichnet man die Ausführung dieser Substitution durch [ ], wendet man endlich den Klammerausdruck an

$$(4)\qquad [U, V] \equiv \sum_1^n \left\{ \frac{\partial U}{\partial p_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial p_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right\},$$

so wird, wenn man die Abkürzungen gebraucht

$$\frac{du}{dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{d[u]}{dX_i} = \frac{\partial [u]}{\partial X_i} + P_i \frac{\partial [u]}{\partial Z},$$

$$\frac{dZ}{dx_i} = \sum_1^n {}^k P_k \frac{dX_k}{dx_i} + \lambda_i, \quad \frac{\partial Z}{\partial p_i} = \sum_1^n {}^k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} + \mu_i,$$

also

$$\frac{du}{dx_i} = \sum_1^n {}^k \left\{ \frac{d[u]}{dX_k}\frac{dX_k}{dx_i} + \frac{\partial [u]}{\partial P_k}\frac{dP_k}{dx_i} \right\} + \lambda_i \frac{\partial [u]}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = \sum_1^n {}^k \left\{ \frac{d[u]}{dX_i}\frac{\partial X_k}{\partial p_i} + \frac{\partial [u]}{\partial P_k}\frac{dP_k}{dx_i} \right\} + \mu_i \frac{\partial [u]}{\partial Z},$$

vermöge (2)

$$\frac{du}{dt} = \sum_1^n {}^k \left\{ \frac{d[F]}{dX_k}[X_k, u] + \frac{\partial [F]}{\partial P_k}[P_k, u] \right\} + \frac{\partial [F]}{\partial Z} \sum_1^n {}^i \left(\mu_i \frac{d[u]}{dX_i} - \lambda_i \frac{\partial [u]}{\partial P_i}\right).$$

Soll also wieder

$$dX_i : dZ : dP_i = \frac{\partial[F]}{\partial P_i} : \sum_1^n {}^i P_i \frac{\partial[F]}{\partial P_i} : -\frac{d[F]}{dX_i}$$

werden, unabhängig davon, wie die Funktion F gewählt ist, so muß sein

$$(5)\quad \begin{cases} [X_k, X_i] = 0, \quad [X_k, Z] = 0, \quad [P_i, P_k] = 0, \\ [P_k, X_i] = 0 \quad \text{für } i \neq k, \\ [P_k, X_k] = \varrho \quad \text{für jedes } k, \\ [P_k, Z] = \varrho P_k \end{cases}$$

und außerdem $\lambda_i = \mu_i = 0$ oder

$$(5\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{dZ}{dx_i} - \sum_1^n {}^k P_k \dfrac{dX_k}{dx_i} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial p_i} - \sum_1^n {}^k P_k \dfrac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0. \end{cases}$$

Wir haben so auf der einen Seite die *Klammerrelationen* (vgl. II A 5, *von Weber*, Nr. 24) erhalten, auf der anderen Seite $2n$ Forderungen, die ihnen äquivalent sind, wie wir später sehen werden [Nr. 5].

Für den Fall solcher Differentialgleichungen, die von z frei sind, und solcher Transformationen, bei denen X_i, P_i ebenfalls von z frei sind, erhält man, wenn man noch fordert,

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial p_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial x_i},$$

mit anderen Worten, wenn man verlangt, daß der Faktor ϱ gleich 1 wird, die bekannten kanonischen Substitutionen [vgl. II A 5, *von Weber*, Nr. **31** und Nr. **5** und **6** dieses Artikels].

Wir kommen später [Nr. 5] darauf zurück, daß mit den kanonischen Substitutionen, die als Spezialfall der Berührungstransformationen anzusprechen sind, doch auch wieder die allgemeinen Berührungstransformationen gegeben sind.

3. Die Berührungstransformationen bei Jacobi. Aequationes directrices. *Jacobi*[4]) hat sich bereits die Frage nach der „allgemeinsten Transformation einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung" vorgelegt. Diese Frage ist, was *Jacobi* aber nirgends sagt[5]), so zu verstehen:

---

4) *C. G. J. Jacobi*, Paris C. R. 5 (1851), p. 61 = Werke 4, p. 36; Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von *Clebsch* (Berlin 1866), p. 468 = Werke 5 (1890), p. 432.

5) *S. Lie* hat zu den Formeln (7) und (8) die Bemerkung gemacht: „*Jacobi*

Eine gegebene Differentialgleichung (1) mit $C = 0$ soll durch ein System von Gleichungen (2) transformiert werden, so daß aus (1) wird

$$\Phi(z', x_1', \ldots, x_n', p_1', \ldots, p_n') = 0. \tag{1'}$$

Dabei wird aber noch verlangt, daß, wenn

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, auch

$$p_i' = \frac{\partial z'}{\partial x_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

werden soll. Außerdem soll dabei die Differentialgleichung (1) beliebig wählbar sein, so daß es richtiger wäre, nicht von *einer*, sondern von *allen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu sprechen.

Jacobi vermeidet es, diese Forderung in die zugleich einfachere und durchsichtigere Form[6]) (vgl. Nr. 4)

$$dz' - \sum_1^n{}_i\, p_i' dx_i' = \varrho(dz - \sum_1^n{}_i\, p_i dx_i) \tag{6}$$

zu kleiden, was aber auf die weitere Rechnung keinen Einfluß hat.

Man denke sich jetzt aus (2) die p_i' und p_i eliminiert, wobei eine Reihe von *aequationes directrices* entstehen wird:

$$\omega_k(x_1, \ldots, x_n, z, x_1', \ldots, x_n', z') = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Aus diesen sollen jetzt die $x_1', \ldots, x_n', z', p_1', \ldots, p_n'$ als Funktionen der $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ bestimmt werden. Zu diesem Zweck denke man sich (7) zusammengefaßt zu

$$\omega \equiv \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \cdots + \lambda_m \omega_m = 0$$

und daraus gefolgert

---

betrachtet ebenfalls alle diese Transformationen, und zwar behauptet er, daß dieselben die allgemeinsten Umformungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Auf diese Behauptung, deren Richtigkeit jedenfalls nicht *a priori* einleuchtend ist, soll hier nicht eingegangen werden. Im übrigen gibt *Jacobi* keine explizite Definition des Begriffs: allgemeinste Umformung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung". Math. Ann. 8 (1875), p. 223. Seltsamerweise nennt *Jacobi* die Transformationen mit *einer* Gleichung (7), also mit $k = 1$, allgemeiner, als die mit *mehreren* Gleichungen, auch sagt er einfach, daß seine Theoreme keines Beweises bedürfen, er stellt die Formeln (7) und (8) apodiktisch auf. — Genaueres über die Auflösbarkeitsbedingungen der Formeln (7) und (8) bei *von Weber,* p. 259. (S. a. Fußnote 10.)

6) Die Definition der Berührungstransformationen durch die Forderung (6) zuerst bei *Lie,* Gött. Nachr. 1872, p. 480 = Gesammelte Abhandlungen 3, p. 20.

$$\frac{d\omega}{dx_i} = \sum_1^m {}^k \lambda_k\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \omega_k}{\partial z}\right) + \sum_1^m {}^k \frac{d\lambda_k}{dx_i}\omega_k = \sum_1^m {}^k \lambda_k\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \omega_k}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dx_i'} = \sum_1^m {}^k \lambda_k\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} + p_i' \frac{\partial \omega_k}{\partial z'}\right) + \sum_1^m {}^k \frac{d\lambda_k}{dx_i'}\omega_k = \sum_1^m {}^k \lambda_k\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i'} + p_i' \frac{\partial \omega_k}{\partial z'}\right) = 0.$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} p_i = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial z} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial \omega_k}{\partial z}}, \\[2ex] p_i' = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_i'} + \lambda_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_i'}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z'} + \lambda_2 \dfrac{\partial \omega_2}{\partial z'} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial \omega_k}{\partial z'}}, \end{cases}$$

die zusammen mit (7) auf die gesuchten „allgemeinsten Transformationen" führen.

Wie mag *Jacobi* auf diese Transformationen gekommen sein? Offenbar von einer anderen Frage aus, die ebenfalls auf das Gleichungssystem (7) und (8), d. h. eigentlich auf die Forderung (6) führt.

Er fragt:[7]) *Wie kann man aus einer Form der vollständigen Lösung*

$$z = f(x_1, \ldots, x_n, b, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

von (1) *weitere vollständige Lösungen ableiten*

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})?$$

Da jede Lösung gewonnen werden kann, indem man b gleich einer geeigneten Funktion von $a_1, \ldots, a_{n-1}$ setzt, dann die erste Gleichung nach den a_i differenziert und diese a_i schließlich eliminiert[8]), so hat man jetzt b gleich einer Funktion der a_i und weiterer Parameter zu setzen, dann aus

$$z = f(x_1, \ldots, x_n, b, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} + c_i \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

wobei

$$c_i = \frac{\partial b}{\partial a_i}$$

7) Dynamik, p. 491 = Werke V, p. 420.

8) Die von *Lagrange* herrührende Darstellung des allgemeinen Integrals als Umhüllungsgebilde von vollständigen Integralen findet sich z. B. bei *Goursat,* p. 90, *Lie-Scheffers,* Btr., p. 493 und II A 5, Nr. **30**. Sie ist nichts weiter als die sogenannte „Variation der Konstanten" (II A 5, Nr. 32).

ist, die $a_1, \ldots, a_{n-1}$ zu eliminieren, wobei eben

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

entstehen soll. Wiederum muß die erste Lösungsform sich aus der zweiten ableiten lassen, indem man aus

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} + \gamma_i \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0, \quad \gamma_i = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i}$$

die α_i eliminiert. Hieraus folgt wie oben: Die Substitutionen haben die Form

$$\text{(3a)} \qquad \begin{cases} \alpha_i = A_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c_1, \ldots, c_{n-1}), \\ \beta = B\,(a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c_1, \ldots, c_{n-1}), \\ \gamma_i = \Gamma_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c_1, \ldots, c_{n-1}), \end{cases}$$

wobei die Forderung

$$\text{(6a)} \qquad d\beta - \sum_1^{n-1} {}^i\, \gamma_i d\alpha_i = \varrho(db - \sum_1^{n-1} {}^i\, c_i da_i)$$

erfüllt sein muß, die dann auf entsprechende Gleichungen (7′) und (8′) führt.

Wir wollen an dieser Stelle gleich die *Jacobi*sche Untersuchung im Sinne von *Lie* deuten: *Jacobi* ordnet im Grunde den einzelnen M_n einer vollständigen Lösung die Punkte des Raumes $(b, a_1, \ldots, a_{n-1})$ zu und den charakteristischen Kurven E (Nr. 8) die Elemente E_{n-1} mit den Koordinaten

$$b, \ a_1, \ldots, a_{n-1}, \\ c_1, \ldots, c_{n-1}.$$

Geht man von einer vollständigen Lösung zur anderen über, so werden dabei die Charakteristiken untereinander vertauscht, aber nicht beliebig, sondern so, daß eben die auf einem Integralgebilde gelegenen Charakteristiken, welche die Forderung

$$db - c_1 da_1 - \cdots - c_{n-1} da_{n-1} = 0$$

erfüllen müssen, wieder auf einem Integralgebilde liegen.[9])

4. Kritik der Untersuchungen von Jacobi. Allgemeine Elementvereine. *Jacobi* gibt in der Tat die allgemeinste Form der Berührungstransformationen an, wenn auch nicht die Klammerrelationen,

9) Die Abbildung der ∞^3 Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung des R_3 auf die Linienelemente der Ebene und die Behandlung der Integrationstheorie durch Berührungstransformation in dieser Ebene ist bei *Lie-Scheffers,* Btr., p. 535—555 ausführlich gegeben.

so doch die Darstellungen, wie sie sich aus *aequationes directrices* von der Form (7) ergeben. Es fehlt aber die Feststellung der Bedingungen für die Auflösbarkeit der Gleichungen (7) und (8) nach den beiden Reihen von Veränderlichen.[10])

Vor allem aber fehlt die freie Auffassung der $2n+1$ Koordinaten $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ als Elementkoordinaten. Erst dann, wenn man nicht mehr den Gedanken festhält, daß die p_i partielle Differentialquotienten einer Funktion z sein sollen, wenn der allgemeine Begriff der durch die Forderung

$$dz - \sum_1^n {}^i p_i\, dx_i = 0$$

definierten Elementvereine geschaffen und gedeutet ist, hat die Transformation eine sinngemäße Deutung gewonnen.

Der allgemeinste n-dimensionale Elementverein im R_{n+1} ist gegeben durch Gleichungen von der Form[11])

$$z = f(x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad x_1 = f_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_k = f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$$p_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} - \sum_1^k {}^i p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+1}}, \ldots, p_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \sum_1^k {}^i p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_n},$$

und hierin können, wenn k größer als Null ist, gar nicht, wie dies *Jacobi* doch noch vorauszusetzen scheint, $x_1 x_2, \ldots, x_n$ als unabhängige Veränderliche genommen werden, an ihre Stelle treten vielmehr

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \quad x_{k+1}, \ldots, x_n.$$

So treten im R_3 die folgenden Arten von zweidimensionalen Elementvereinen auf:

Die Elemente einer Fläche

$$z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \; q = \frac{\partial f}{\partial y};$$

die Elemente eines Vereins, dessen Träger eine Kurve ist

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad p = \frac{dg}{dx} + q \frac{df}{dx};$$

die Elemente eines Vereins dessen Träger ein Punkt ist:

$$x, y, z \text{ gegeben}, \quad p, q \text{ beliebig}.$$

5. Beweis der Klammerrelationen mit Hilfe der bilinearen Kovariante. Wir wollen jetzt auf dem durch neuere Arbeiten ge-

---

10) *Lie-Engel,* Trf. II, p. 155; *Lie-Scheffers,* Btr.., p. 54.

11) Die Definition der allgemeinen Elementvereine bei *Lie-Engel,* Trf. II, p. 106. Ebendaselbst die Geschichte dieser Begriffsbildung bei *Lie.*

wiesenen rationellen Weg den Zusammenhang zwischen (6) (5) und (5') erweisen. Nach *F. Engel*[12]) gelangt man am einfachsten zu den grundlegenden Klammerrelationen, wenn man durchweg die bilineare Kovariante benützt, ein Verfahren, das *Darboux*[13]) bereits angewandt hat, wenn auch nicht in vollem Umfang. Aus der ursprünglichen Forderung

$$(6) \qquad dZ - \sum_1^n{}^i P_i dX_i = \varrho \left(dz - \sum_1^n{}^i p_i dx_i\right)$$

folgt sofort

$$\sum_1^n{}^i (dP_i \delta X_i - dX_i \delta P_i) = \varrho \sum_1^n{}^i (dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i)$$
$$+ \delta\varrho \left(dz - \sum_1^n{}^i p_i dx_i\right) + d\varrho \left(\delta z - \sum_1^n{}^i p_i \delta x_i\right).$$

Demgemäß kann die *Lie*sche Forderung auch durch die folgende, vollkommen gleichberechtigte ersetzt werden, die in ihrer Fassung umständlicher aussieht, alle weitere Rechnung aber bedeutend vereinfacht:

Wenn

$$dz - \sum_1^n{}^i p_i dx_i = 0$$

ist, so soll auch

$$dZ - \sum_1^n{}^i P_i dX_i = 0$$

---

12) *F. Engel,* Lies Invariantentheorie der Berührungstransformationen und ihre Erweiterung," Jahresber. d. D. Math.-Ver., Ergänzungsband 5 (1914), stellt im Anschluß und auf Grund neuer Bearbeitung und Erweiterung der Untersuchungen von *S. Kantor,* „Über einen neuen Gesichtspunkt in der Theorie des *Pfaff*schen Problemes, der Funktionsgruppen und der Berührungstransformationen", Wien Ber. 110 (1901), p. 1147 ff. und „Neue Grundlagen für die Theorie und Weiterentwicklung der *Lie*schen Funktionengruppen", ebd. 112 (1903), p. 755 ff. die bilineare Kovariante systematisch in den Mittelpunkt der Betrachtungen. Dabei handelt es sich aber um die durch (13) definierten Berührungstransformationen mit der bilinearen Kovariante

$$\sum (dy_i \delta q_i - dq_i \delta y_i) = \sum (dY_i \delta Q_i - dQ_i \delta Y_i).$$

Ebenso macht *E. Cartan* vielfach Gebrauch von der bilinearen Kovariante bei seinen Untersuchungen über Systeme von Pfaffschen Gleichungen, Bull. sc. math. 29 (1901), p. 232—302; Paris C. R. 134 (1902), p. 1415—1417, 1564—1567; Ann. éc. norm. (3) 27 (1910), p. 109—192.

13) *G. Darboux,* Sur le problème de Pfaff. Bull. math. astr. (6) 2 (1882), p. 14—36, 49—68.

sein und außerdem

$$(9) \qquad \sum_1^n{}^i (dP_i \delta X_i - dX_i \delta P_i) = \varrho \sum_1^n{}^i (dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i).$$

Setzt man hierin

$$\delta x_i = \frac{\partial u}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{du}{dx_i}\delta t = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta t,$$

so folgt mit Anwendung des Klammersymbols (4)

$$\sum_1^n{}^i (dP_i[u, X_i] - dX_i[u, P_i]) = \varrho du.$$

Wendet man diese Formel an für

$$u = x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$$

so erkennt man, daß die Differentiale dP_i und dX_i linear unabhängig sind, weil dies für die rechten Seiten gilt.

Schreibt man also die letzte Gleichung in der Form

$$\sum_1^n{}^i (dP_i[u, X_i] - dX_i[u, P_i]) = \varrho \sum \left(\frac{\partial [u]}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial [u]}{\partial P_i} dP_i\right),$$

worin $[u]$, wie in Nr. 2, die aus u bei Substitution der $X_1, \ldots, X_n, Z, P_1, \cdots, P_n$ entstehende Funktion bedeutet, so folgt:

$$[u, X_i] = \varrho \frac{\partial [u]}{\partial P_i}, \quad [u, P_i] = -\varrho \frac{\partial [u]}{\partial X_i}.$$

Setzt man in du nochmals

$$dx_i = \frac{\partial v}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} dt,$$

so folgt weiter

$$\sum_1^n{}^i ([v, P_i][u, X_i] - [v, X_i][u, P_i]) = \varrho [v, u],$$

also, wenn die Werte der linksstehenden Klammerausdrücke eingesetzt werden,

$$\varrho^2 \sum_1^n{}^i \left(-\frac{d[v]}{dX_i}\frac{\partial [u]}{\partial P_i} + \frac{\partial [v]}{\partial P_i}\frac{d[u]}{dX_i}\right) = \varrho [v, u],$$

oder, wenn wir die Bildung des Klammerausdrucks in den neuen Veränderlichen

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

durch den Akzent bezeichnen,

$$(10) \qquad [u, v] = \varrho [u, v]'.$$

Hiermit ist der invariante Charakter des allgemeinen Klammerausdrucks bewiesen, *bevor* die Klammerrelationen zwischen den Z, X_i, P_i berechnet sind[14]); das wird nur ermöglicht durch Operieren mit der bilinearen Kovariante. Jetzt ergeben sich aus den Klammerrelationen

$$[x_i, x_k] = 0, \quad [z, x_i] = 0,$$
$$[p_i, x_k] = \varepsilon_{ik} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \\ \varepsilon_{ik} = 1 \text{ für } i = k \end{pmatrix},$$
$$[p_i, z] = p_i$$

sofort mit Hilfe von (10) die Klammerrelationen

$$(5) \qquad \begin{cases} [X_i, X_k] = 0, & [Z, X_i] = 0, \\ [P_i, X_k] = \varepsilon_{ik}\varrho, & [P_i, Z] = \varrho P_i. \end{cases}$$

Schließlich kann die Funktionaldeterminante der $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ nach den $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ leicht berechnet werden.[15]) Man bildet zuerst die Funktionaldeterminante mit Fortlassung von Z und z in den beiden Formen

$$\Delta = \begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_n, & X_1, \ldots, X_n \\ p_1, \ldots, p_n, & x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta = \begin{pmatrix} X_1, \ldots, X_n, & -P_1, \ldots, -P_n \\ x_1, \ldots, x_n, & p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix},$$

wobei aber die Differentiation nach den x_i jedesmal „total" auszuführen ist, also in der Form

$$\frac{du}{dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Multipliziert man beide Formen miteinander, so erhält man eine $2n$-reihige Determinante, deren Glieder lauter Klammerausdrücke sind, die mit Ausnahme der Diagonalglieder alle gleich Null sind; die Diagonalglieder sind sämtlich von der Form $[P_i, X_i]$ d. h. gleich ϱ, so daß sich ergibt $\Delta^2 = \varrho^{2n}$, und damit

$$\Delta = \pm \varrho^n.$$

Die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{pmatrix} Z, & X_1, \ldots, X_n, & P_1, \ldots, P_n \\ z, & x_1, \ldots, x_n, & p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$$

läßt sich leicht auf Δ reduzieren; man multipliziert die erste Vertikal-

---

14) *Darboux* (Fußnote 13), p. 62, Formel 26.

15) Bei *Lie* selbst ist die Ableitung viel weniger systematisch. Vgl. *Lie-Engel*, Trf. II, p. 118—123.

reihe mit $p_1, \dots, p_n$ und addiert zu den n folgenden Vertikalreihen. Hierdurch entsteht eine Determinante mit der ersten Zeile

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{dZ}{dx_1}\cdots\frac{dZ}{dx_n}\frac{\partial Z}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial Z}{\partial p_n},$$

wobei die $2n$-reihige Unterdeterminante von $\frac{\partial Z}{\partial z}$ gerade Δ ist. Multipliziert man hier die auf die erste folgenden n Zeilen der Reihe nach mit $P_1, \dots, P_n$, addiert zur ersten und berücksichtigt

$$\text{(5b)}\quad \frac{\partial Z}{\partial z}-\sum_1^n{}_i P_i\frac{\partial X_i}{\partial z}=\varrho,\quad \frac{dZ}{dx_k}-\sum_1^n{}_i P_i\frac{dX_i}{dx_k}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial p_k}-\sum_1^n{}_i P_i\frac{\partial X_i}{\partial p_k}=0,$$

so erhält man

$$\text{(11)}\qquad D=\pm\varrho^{n+1}.$$

Umgekehrt führt der Weg von den Klammerrelationen (5) aus leicht zur Erkenntnis, daß Berührungstransformationen vorliegen.

Um schließlich noch zu zeigen, daß aus $n+1$ unabhängigen Funktionen $Z, X_1, \dots, X_n$, welche die vorgeschriebenen Klammerrelationen erfüllen, die Gleichungen

$$\frac{dZ}{dx_k}-\sum_1^n{}_i P_i\frac{dX_i}{dx_k}=0$$

die zugehörigen P liefern, welche notwendig sind, um zu einer Berührungstransformation zu ergänzen, beachte man, daß

$$\sum_1^n{}_k\left\{\frac{\partial X_i}{\partial p_k}\left(\frac{dZ}{dx_k}-\sum_1^n{}_i P_i\frac{dX_i}{dx_k}\right)-\frac{dX_l}{dx_k}\left(\frac{\partial Z}{\partial p_k}-\sum_1^n{}_i P_i\frac{\partial X_i}{\partial p_k}\right)\right\}$$

$$=[X_i, Z]-\sum_1^n{}_l P_l[X_i, X_l]$$

identisch Null ist, die Gleichungen (5b) also einander nicht widersprechen.[16])

Zu den allgemeinen Berührungstransformationen kann man auch gelangen von den homogenen Berührungstransformationen aus, welche die Bedingung

$$\text{(12)}\qquad Q_1dY_1\cdots+Q_{n+1}dY_{n+1}=q_1dy_1\cdots+q_{n+1}dy_{n+1}$$

erfüllen. Die allgemeinere Forderung

$$\text{(13)}\qquad \sum_1^{n+1}{}_i Q_i dY_i=\sum_1^{n+1}{}_i q_i dy_i+d\Omega(y_1,\dots,y_{n+1},q_1,\dots,q_{n+1})$$

16) *Lie-Engel*, Trf. II, p. 124, Theorem XII.

führt — am einfachsten wieder mit Anwendung der bilinearen Kovariante[17]) — auf die Klammerrelationen[18])

$$(13a)\quad (Q_i, Q_k) = 0,\ (X_i, Y_k) = 0,\ (Q_i, Y_k) = \varepsilon_{ik} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \\ \varepsilon_{ik} = 1 \text{ für } i = k \end{pmatrix}.$$

Soll dann noch $d\Omega \equiv$ sein, so müssen die Y homogen von nullter, die Q homogen von erster Ordnung in den q sein.[19])

Macht man endlich die Substitutionen

$$z = y_{n+1},\ x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n,$$

$$p_1 = \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \ldots, p_n = \frac{-q_n}{q_{n+1}},$$

$$Y_{n+1} = Z(z, x, p), \quad Y_i = X_i(z, x, p),$$

$$\frac{-Q_i}{Q_{n+1}} = P_i(z, x, p), \quad \frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}} = \varrho(z, x, p),$$

so gelangt man zu den allgemeinen Berührungstransformationen in den z, x_i, p_i und erhält außer den schon angegebenen Klammerrelationen (5) noch[20])

$$(5b)\quad [\varrho, X_i] + \varrho\frac{\partial X_i}{\partial z} = [\varrho, P_i] + \varrho\frac{\partial P_i}{\partial z} = [\varrho, Z] + \varrho\frac{\partial Z}{\partial z} - \varrho^2 = 0.$$

6. Die Untersuchung von E. Schering. Die Bedeutung der bilinearen Kovariante für die Erhaltung der Form der kanonischen Gleichungen hat zuerst *E. Schering*[21]) erkannt, indem er sich die Aufgabe stellte: Es sollen in allgemeinster Weise die kanonischen Gleichungen

$$(2a)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

17) *F. Engel* (Fußnote 12), p. 31.

18) Die Klammerrelationen (13a) definieren die eigentlichen kanonischen Substitutionen. Vgl. *Lie-Engel*, Trf. II, p. 130, Theorem XV.

19) *Lie-Engel*, Trf. II, p. 137, Theorem XVI.

20) Die Relationen (5b) hat zuerst *Darboux* angegeben (Fußnote 13), p. 62.

21) *E. Schering*, Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maß von der Bewegung der Körper abhängt, Gött. Abh. 18 (1873), p. 39.

Zur Geschichte der kanonischen Substitutionen bis zu ihrem Abschluß durch die Untersuchungen von *Lie* vgl. man auch *E. O. Lovett*, The theory of perturbations and Lies theory of contact transformations, Quart. Journ. 21 (1898), p. 1—103 und zum Verständnis der Scheringschen Untersuchung die Dissertation von *C. Grötsch*, Störungstheorie und Berührungstransformationen, Leipzig 1898. Vgl. auch *Lie*, Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen, Arch. f. Math. og Naturv. II, Kristiania 1877 und *Th. de Donder*, Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi, Rom. Acc. L. Rend. (5), 20, 1 (1910), p. 400—415. Vgl. Math. Enz. VI 2, 12 *Whittaker*, Nr. 10.

worin H eine beliebige Funktion von $t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ ist, durch die Formeln

$$q_i' = Q_i(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n),$$
$$p_i' = P_i(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

so transformiert werden, daß sie in neue kanonische Gleichungen

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

übergehen. Dabei ist H' eine Funktion von $t, Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n$, die in den Veränderlichen $t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ die Form

$$H' = H - E$$

haben möge.

Er findet als Lösung: Die Funktionen Q_i, P_i und E müssen so gewählt werden, daß die Identität

$$\sum_1^n {}^i (dq_i \delta p_i - dp_i \delta q_i) = \sum_1^n {}^i (dQ_i \delta P_i - dP_i \delta Q_i) + dt\,\delta E - dE\,\delta t$$

bestehen muß.

Dasselbe Ergebnis läßt sich auch in folgender Form aussprechen: Die $2n$ Funktionen P_i und Q_k sind den Bedingungen[22])

$$(Q_i, Q_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (Q_i, P_k) = \varepsilon_{ik} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{ik} = 1 \text{ für } i = k \\ \varepsilon_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \end{pmatrix}$$

zu unterwerfen, wobei unter (u, v) der Klammerausdruck

$$(u, v) = \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial u}{\partial p_i}\right)$$

zu verstehen ist. Die Funktion E kann dann aus

$$(E, Q_i) = \frac{\partial Q_i}{\partial t}, \quad (E, P_i) = \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

bis auf eine willkürliche additive Funktion von t bestimmt werden.

Endlich kann das Ergebnis von *Schering* auch so ausgesprochen werden: Durch Quadratur kann eine Funktion $\Omega(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ bestimmt werden, so daß die Gleichungen

$$z' = z + \Omega, \quad q_i' = Q_i, \quad p_i' = P_i$$

eine den Parameter t enthaltende Berührungstransformation in den Veränderlichen $z, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ darstellen.

---

22) Die *Schering*schen Transformationen haben also mit den kanonischen das gemein, daß die absolute Invarianz der kanonischen Gleichungen (2[a]) gefordert wird; sie sind aber allgemeiner, da die Transformationsformeln auch die Veränderliche t enthalten sollen.

7. Die Berührungstransformationen als Umhüllungstransformationen. In seinem Nachruf auf *J. Plücker* sagt *Clebsch*[23]), daß er die Dualität [III A B 4a, *Fano*, Nr. 12] als besonderen Fall einer höchst allgemeinen Verwandtschaft mit sehr willkürlichem Wechsel des Raumelementes erkannte. „Es können nach dieser vermöge einer *aequatio directrix* $[\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0]$ den Punkten der Ebene Kurven beliebiger Ordnung entsprechen, eine Vorstellung, an welche in neuester Zeit wieder angeknüpft ist." Er hat auch darauf hingewiesen, daß jene Gleichung überhaupt jeder Kurve C der Ebene x, y eine Kurve der Ebene x_1, y_1 zuordnet, nämlich die Umhüllungskurve der ∞^1 Kurven, die den Punkten von C entsprechen, und Formeln aufgestellt, welche zeigen, daß auf diese Weise zwei einander berührenden Kurven stets zwei einander berührende Kurven entsprechen.[24])

In der Tat liegt hier der begriffliche „philosophische" Ausgangspunkt[25]) der *Lie*schen Ideen, der allerdings *formal* nur auf eine andere Deutung der Gleichungen (7) und (8) hinauskommt: Durch die Gleichungen

$$(7) \qquad \omega_i(x_1, \ldots, x_n, z, x_1', \ldots, x_n', z') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

wird jedem Punkt ein $(n + 1 - k)$-dimensionales Gebilde des R'_{n+1} zugeordnet, einer M_n aber

$$z = f(x_1, \ldots, x_n),$$

indem man eben das Umhüllungsgebilde der zugeordneten M_{n+1-k} bildet, wieder eine M_n, die man aus

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dx_i} + \cdots + \lambda_k \frac{d\omega_k}{dx_i} = 0; \quad \frac{d\omega_l}{dx_i} = \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \omega_l}{\partial z}; \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} (i = 1, 2 \ldots n)$$

in Verbindung mit (7) findet. Dann werden die

$$p_i' = \frac{\partial z'}{\partial x_i'}$$

aus den weiteren Gleichungen

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dx_i'} + \cdots + \lambda_k \frac{d\omega_k}{dx_i'} = 0, \quad \frac{d\omega_l}{dx_i'} = \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i'} + p_i' \frac{\partial \omega_l}{\partial z} \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

gefunden, und es folgt: Haben zwei M_n — allgemeiner zwei Elementvereine [Nr. 4] — des R_{n+1} ein Element $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ — gemein, so haben die entsprechenden M_n' — allgemeiner die entsprechenden Elementvereine — ein Element $x_1', \ldots, x_n', z', p_1', \ldots, p_n'$

---

23) *A. Clebsch*, Gött. Abh. 15 (1872), abgedruckt in *Plücker*, Gesammelte mathematische Abhandlungen, hrsg. von *A. Schoenflies* (Leipzig 1895), p. XX.

24) *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwickelungen Bd. 2, Essen 1831, p. 266—267 (Anmerkung).

25) *Clebsch* bezeichnet a. a. O. den „Wechsel des Raumelementes" als eine philosophische Leistung.

gemein. *Lie* bildete diesen Gedanken zunächst im $R(x, y, z)$ aus und betrachtete auch den Fall zweier Gleichungen

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Zuerst hat er, freilich in sehr versteckter Form, in der „Repräsentation des Imaginären in der Plangeometrie" eine Punktgeradentransformation aufgestellt.[26]) Er läßt einem imaginären Punkt

$$X = x + iy, \quad Z = z + ip$$

der XZ-Ebene einen reellen Punkt des xyz-Raumes mit dem „Gewicht" p entsprechen, wobei den ∞^3 reellen Punkten vom „Gewichte" $p = 0$ gewisse ∞^3 Imaginärpunkte zugeordnet sind. Diese werden in der Ebene durch eine Polarität auf ∞^3 Imaginärgerade g und dann weiter auf einen reellen Linienkomplex φ abgebildet. Dadurch ist die Abbildung der Punkte $P(x, y, z)$ auf die Geraden γ eines tetraedralen Linienkomplexes φ (vgl. III C 10, *Zindler*, Liniengeometrie) gegeben, und umgekehrt entsprechen den Punkten P' der Geraden γ Gerade γ' durch P, die wieder einen tetraedralen Komplex bilden [vgl. unten Nr. 12].[27])

8. Die charakteristischen Streifen [vgl. II A 5 *von Weber*, Nr. 34]. In Nr. 2 und 6 ist gezeigt worden, daß die Forderung der Invarianz des Gleichungssystems (2) in der historischen Entwicklung zuerst auf die Berührungstransformationen geführt hat, also eine Frage aus der Theorie der charakteristischen Streifen. Diese Theorie bedarf hier wohl nochmals einer Übersicht sowie einer gewissen Ergänzung. Man kann etwa die folgenden, zum Teil ineinandergreifenden Definitionen der charakteristischen Streifen bzw. der charakteristischen Kurven unterscheiden.

a) Aus der *vollständigen Lösung* (II A 5, Nr. 32) einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als Schnittkurve von einer Integral-M_n des R_{n+1} mit $n-1$ unendlich benachbarten, d. h. wenn

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1 \ldots a_n)$$

eine vollständige Lösung ist, sind die charakteristischen Kurven gegeben durch diese Gleichung und

$$\frac{\partial f}{\partial a_n} + b_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

26) Nr. 1, 2, 3, 4 des Literaturverzeichnisses von *Engel* (Fußnote 3). Inhaltsangabe hier nach *Nöther* (Fußnote 1), p. 3. Über *Nöthers* 1869 gegebene Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum vgl. ebenda, p. 5 und *Lie-Engel,* Trf. III, p. 138, Anmerkung. Diese Abbildung ist ausführlich behandelt in *Salmon-Fiedler,* Analytische Geometrie des Raumes II, 3. Aufl. (Leipzig 1880), p. 516.

27) Über die B.-T. als „Umhüllungstransformationen" vgl. auch *F. Engel,* Zur Theorie der Berührungstransformationen, Math. Ann. 23 (1884), p. 1—44. Ebendaselbst werden unendlichdeutige Transformationen nach *Bäcklund* (s. unten Nr. 16) für die Ebene betrachtet.

b) aus dem *Integrationsproblem.* Im R_3 z. B. sind die charakteristischen Kurven direkt dadurch definiert, daß eine Integralfläche nicht endlichdeutig bestimmbar ist durch die Forderung, sie soll eine vorgegebene charakteristische Kurve enthalten (II A 5, Nr. **34**).

c) aus den *Monge*schen Kegeln oder „*Elementarkegeln*"[28]) — in Verbindung mit den *Monge*schen Plankurven, d. h. (im R_3) den durch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

in Verbindung mit

$$z = p_0 x + q_0 y + u_0$$

bestimmten ∞^3 ebenen Kurven.[29]) „Ein charakteristischer Streifen ist dadurch bestimmt, daß der Punkt des erzeugenden Flächenelementes sich immer auf dem *Monge*schen Kegel bewegt — die charakteristischen Kurven sind also Integralkurven der zugeordneten aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$
$$z' - p - qy' = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} - y'\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

durch Elimination von p und q entstehenden *Monge*schen Gleichung — während sich die Ebene beständig um die Tangente der *Monge*schen Plankurve dreht".

d) allgemein im R_{n+1} als *Elementstreifen* [II A 5, Nr. 9], welche die folgende Bedingung erfüllen[30]): Haben zwei unendlich benachbarte Streifen

$$x_i(t), \quad z(t), \quad p_i(t)$$

und

$$x_i(t) + \delta x_i, \quad z(t) + \delta z, \quad p_i(t) + \delta p_i$$

an einer Stelle korrespondierende vereinigt liegende Elemente, d. h. ist

$$\delta z - \sum p_i \delta x_i = 0,$$

so soll diese Bedingung längs des ganzen Streifens erfüllt sein. Dies führt wegen

$$dz - \sum p_i dx_i = 0$$

durch Elimination von $d\delta z = \delta dz$ aus

$$\delta(dz - \sum p_i dx_i) = 0$$

---

28) Vgl. II A 5, *von Weber,* Nr. 32, Fußnote 186.

29) Diese *Darboux*sche Definition (vgl. *Goursat,* p. 181) hat *C. Carathéodory* von neuem unabhängig entwickelt, Math. Ann. 59 (1904), p. 517—528.

30) Vgl. *Lie-Scheffers,* Btr. p. 551, Satz 9; *G. Kowalewski,* Elementvereine und Streifenelemente im R_{n+1}, Leipzig Ber. 52 (1901), p. 91—104.

und
$$d(\delta z - \sum p_i \delta x_i) = 0$$
gerade auf die Gleichung
$$\sum_1^n (dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i) = 0$$
[vgl. Nr. 5, Formel (9)].

e) Zusammenhang mit der *Variationsrechnung*[31]) und den *Schnittbedingungen* [vgl. unten Nr. 18]. In dem einfachen Fall, daß eine *von z freie* partielle Differentialgleichung erster Ordnung
$$F(x, x_1 \ldots x_n, p, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$
durch Elimination der p aus dieser Gleichung und
$$z' - p - \sum p_i x_i' = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p_i} - x_i' \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$
nur auf *eine Monge*sche d. h. die Koordinaten und ihre ersten Differentialquotienten nach x enthaltende Gleichung
$$z' = \omega(x, x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n')$$
führt, sind die *Projektionen der charakteristischen Kurven* auf $z = 0$ einfach die *Extremalen* des Variationsproblems
$$\int \omega(x, x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n')\, dx = \text{Min.}$$

Um zu allgemeineren Beziehungen zu gelangen, bezeichnen wir mit *Cartan*[32]) eine Kurvenklasse des R_{n+1} mit r Parametern
$$(14) \qquad y_i = f_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
als eine „*Engelsche Klasse*“, wenn unter den *durch Elimination von x* aus den Schnittbedingungen für zwei unendlich benachbarte Kurven
$$(15) \qquad \delta y_i = \frac{\partial f_i}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial f_i}{\partial c_2} dc_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial c_r} dc_r = 0$$
sich ergebenden *Monge*schen (in den Differentialen homogenen) Gleichungen
$$(16) \quad \Omega_\mu(c_1, c_2, \ldots, c_r, dc_1, dc_2, \ldots, dc_r) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$
sich mindestens eine in den Differentialen *lineare* (d. h. also eine *Pfaff*sche) Gleichung befindet.

---

31) Vgl. hierzu II A 8a, *Zermelo* und *Hahn*, Nr. 5; *O. Bolza*, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, p. 132 ff.

32) *E. Cartan*, Le calcul des variations et certaines familles de courbes, S. M. F. Bull. 69 (1911), p. 29—52.

Auf der andern Seite möge aus (14) durch Differentiation nach x und Elimination der Konstanten das (14) zugeordnete System von *Monge*schen Gleichungen

(17) $g_k(y_1' \cdots y_n', y_1 \cdots y_n, x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q,\ q < n)$

folgen.

Dann gilt der Satz: Jede in den Integralkurven von (17) enthaltene *Engel*sche Kurvenklasse wird von Extremalen des zu (17) gehörigen *Mayer*schen Problems gebildet, d. h. von Kurven, welche (17) erfüllen und das Integral

(18) $$\int dy_n$$

bei gegebenen Anfangswerten

$$x = x_0, \quad y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^0$$

und gegebenen Endwerten

$$x = x^1, \quad y_1 = y_1^1, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1}^1$$

zu einem Extremum machen. — Hiermit ist die Beziehung zwischen *Engel*scher Kurvenklasse und Variationsrechnung gegeben.

Führen jetzt die *Monge*schen Gleichungen (17), was „*im allgemeinen*" der Fall ist, durch die Differentiationen und Substitutionen

$$y_n' = p_1 y_1' + \cdots + p_{n-1} y_{n-1}' + p,$$

$$-1 = \sum_1^q \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial y_n'},$$

$$p_i = \sum_1^q \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial y_i'}$$

nach Elimination von $\lambda_1 \ldots \lambda_q, y_1' \ldots y_n'$ auf eine einzige partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y_1 \cdots y_n, p, p_1 \cdots p_{n-1}) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial y_n}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial y_n}{\partial y_i}\right),$$

so fallen die *Extremalen des Variationsproblems* (18) mit den *charakteristischen Kurven* der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zusammen und mit der (einzigen) in (17) enthaltenen *Engelschen Klasse* von ∞^{2n-1} Kurven: *Jede Engelsche Klasse von ∞^{2n-1} Kurven im R_{n+1} besteht notwendig aus den charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, und umgekehrt.*[33])

---

33) *Cartan,* a. a. O. (Fußnote 32) p. 47. Über Beziehungen von Berührungstransformationen der Ebene und Variationsproblemen vgl. a: *F. Engel,* Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdrucke kovariant sind. Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 112 ff.

Sollen z. B. im R_3 ∞^3, im R_4 ∞^5 gegebene Gerade die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sein, so braucht man den betreffenden Komplexen nur die lineare Schnittbedingung aufzuerlegen und findet leicht, daß die Geraden einen *Tangentenkomplex*[34]) bilden müssen, d. h. daß sie die ∞^3 Tangenten einer Fläche oder Treffgeraden einer Kurve — im R_4 die ∞^5 Tangenten einer dreifach oder zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bilden müssen.

Eine *Engel*sche Klasse mit $2n - 2p + 1$ Parametern dagegen besteht aus Kurven, die auf den charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines p-gliedrigen Involutionssystems [II A 5, Nr. 38] liegen.

Auf die Frage der „Schnittbedingungen einer Kurvenschar" werden wir später im einzelnen eingehen [Nr. **18**].

f) Allgemeinste Definition durch *eine Eigenschaft der Linienelemente.* Bei der unten in Nr. **12** behandelten Geradenkugeltransformation werden die Flächenelemente einer gewissen *Pfaff*schen Gleichung abgebildet auf die Minimalstreifen. Dabei werden die Linienelemente

$$x,\ y,\ z,\quad z' = y - xy',$$

---

34) *H. Liebmann,* Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung im R_3 und R_4 mit geradlinigen Charakteristiken, Leipz. Ber. 64 (1912), p. 405. Übrigens wirft schon *P. Dubois-Reymond,* „Beiträge", p. 67 die Frage auf, welcher Art die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, deren Charakteristiken gerade Linien sind. Bei *Lie-Scheffers,* Btr. p. 641 wird der Satz für den R_3 bewiesen; es läßt sich zeigen, daß er ganz allgemein gilt. In diesem Zusammenhang, nämlich unter dem Gesichtspunkt der Aufgabe: „Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit charakteristischen Kurven vorgeschriebener Beschaffenheit aufzustellen", ist auch die Dissertation von *Ph. Engelhardt,* Würzburg 1910, zu nennen: Untersuchungen über die im Schlußwort des *Lie*schen Werkes „Geometrie der Berührungstransformationen" angedeuteten Probleme. Vollständig behandelt sind bei *Lie-Scheffers* Btr., Kap. 14 die sechs Aufgaben: Bestimmung aller Differentialgleichungen

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

deren Charakteristiken auf allen Integralflächen 1) Haupttangentenkurven, 2) Krümmungslinien, 3) geodätische Linien sind. Ferner 4) die Integralflächen sollen als Normalen lauter Geraden eines gegebenen Komplexes haben, 5) die Charakteristiken sollen Gerade sein, 6) die Integralflächen sollen ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem vorgelegten Linienkomplex angehören. Anknüpfend an die Bemerkung „daß sich die Probleme, die durch Kombination je zweier dieser Probleme hervorgehen, durch geometrische Betrachtungen vollständig lösen lassen" [a. a. O. p. 687] löst *Engelhardt* die Problemkombinationen (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5) vollständig, alle anderen sinngemäßen Kombinationen werden aber auch geometrisch diskutiert, wenn auch die Aufstellung der Funktion F nicht immer durchführbar ist

welche die *Pfaff*sche Gleichung erfüllen, abgebildet auf die Linienelemente der Geraden

$$x_1 + iy_1 = -z + x^2(y - y'),$$
$$x_1 - iy_1 = \quad y',$$
$$z_1 = \quad y + xy',$$

und es ist

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = d(-z + x^2(y - y'))dy'$$
$$+ (d(y + xy'))^2 = -x^2(dy')^2 + x^2(dy')^2 = 0;$$

den ∞^1 *Linienelementen* im $R(x, y, z)$, die auf einem Flächenelement der *Pfaff*schen Gleichung

$$dz + xdy - ydx = 0$$

oder

$$p = y, \quad q = -x$$

liegen, entsprechen also die *Linienelemente* der charakteristischen Kurven der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung[35])

$$p_1^2 + q_1^2 + 1 = 0;$$

daher sind die linearen Büschel von Linienelementen, die die *Pfaff*sche Gleichung einem Punkt zuordnet, als Äquivalent der charakteristischen Kurven der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung anzusprechen, und es entsteht die folgende Frage: *Gegeben ist ein System von Mongeschen Gleichungen*

$$(19) \quad \begin{aligned} x'_{k+i} &= \omega_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, z, x_1' \ldots x_k'), \\ z' &= \omega\,(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, z, x_1' \ldots x_k'), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k),$$

wie sind die charakteristischen Kurven oder ihr Äquivalent zu definieren? Die Definition soll ganz unabhängig davon sein, ob das System (19) auf eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung führt oder nicht.

Die Antwort lautet:[36]) Die zum System (19) gehörigen charakteristischen Kurven

$$x = x(t), \quad x_i = x_i(t), \quad z = z(t)$$

sind dadurch bestimmt, daß die Bedingungen für die vereinigte Lage korrespondierender Linienelemente unendlich benachbarter Kurven durch Elimination von t auf eine in den Differentialen der Parameter lineare Gleichung führen; m. a. W., es müssen sich die Multiplikatoren

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k}, \mu$$

35) Vgl. *Lie-Scheffers,* Btr. p. 451.

36) Briefliche Mitteilung von *F. Engel.*

so bestimmen lassen, daß die Gleichung

$$(20)\quad \lambda_1(\delta x_1 - x_1'\delta x) + \cdots + \lambda_k(\delta x_k - x_k'\delta x) + \mu_1(\delta x_{k+1} - \omega_1 \delta x) + \cdots$$
$$\cdots + \mu_{n-k}(\delta x_n - \omega_{n-k}\delta x) + \mu(\delta z - \omega\delta x) = 0$$

von t frei wird.

Im R_3, wo das Gleichungssystem

$$dy - y'dx = 0, \quad dz - \omega(x, y, z, y')dx = 0$$

den Ausgangspunkt bildet, kommt man auf

$$\frac{d\lambda}{dt}(\delta y - y'\delta x) + \frac{d\mu}{dt}(\delta z - \omega\delta x) + \lambda\left(\frac{d}{dt}\delta y - \frac{dy'}{dt}\delta x\right)$$
$$+ \mu\left(\frac{d}{dt}\delta z - \frac{d\omega}{dt}\delta x\right) \equiv 0,$$

und dabei ist mit *Vertauschung der Differentiationsfolge*

$$\frac{d}{dt}\delta y = \delta y'\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\delta z = \delta z'\frac{dx}{dt} = \delta\omega\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\omega}{\partial y} + \omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man die drei Forderungen

$$\frac{d\lambda}{dt} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0, \quad \lambda + \mu\frac{\partial\omega}{\partial y'} = 0$$

und hieraus die eine

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\omega}{\partial y'} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial y'}\right)\frac{dx}{dt} = 0.$$

Ist nun ω nicht linear in y', so darf $t = x$ gesetzt werden, und man erhält in der Tat die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung[37])

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y'} + y'\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial y'} + \omega\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial y'} + y''\frac{\partial^2\omega}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial y'}\right) = 0,$$

welche in Verbindung mit

$$z' = \omega(x, y, z, y')$$

die Charakteristiken ergibt.

Ist aber ω in y' linear

$$\omega \equiv \alpha(x, y, z) + y'\beta(x, y, z),$$

so kommt

$$\frac{dx}{dt}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = 0$$

und hieraus

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = y'\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \omega\frac{dx}{dt} = 0, \quad z' = \alpha + \beta y',$$

d. h. die *Punkte* bzw. die linearen Büschel von Linienelementen.

---

37) In diesem Zusammenhang, nämlich als *Monge*sche Kurve mit „linearer Schnittbedingung" abgeleitet bei *F. Engel*, Fußnote 101, p. 208.

9. Die infinitesimalen Berührungstransformationen. Die infinitesimalen Berührungstransformationen lassen sich durch *charakteristische Funktionen* W erzeugen.[38]) Soll nämlich

$$z' = z + \zeta\delta t, \quad x_i' = x_i + \xi_i\delta t, \quad p_i' = p_i + \pi_i\delta t$$

sein, so führt die Grundforderung (6) auf

$$d(z + \zeta\delta t) - \sum(p_i + \pi_i\delta t)\, d(x_i + \xi_i\delta t) = (1 + \sigma\delta t)\left(dz - \sum p_i dx_i\right)$$

oder

$$d\zeta - \sum p_i d\xi_i - \sum \pi_i dx_i = \sigma\left(dz - \sum p_i dx_i\right).$$

Soll diese Relation identisch erfüllt sein, so zeigt sich, daß die Zuwachsgrößen mit Hilfe der charakteristischen Funktion

$$W = -\zeta + p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \cdots + p_n\xi_n$$

sich darstellen lassen; es wird

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \zeta = \sum p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W,$$

$$\pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{dW}{dx_i},$$

die Bahnen der Elemente sind also, wie der Vergleich mit (2) zeigt, die charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichungen

$$W(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = c.$$

Der Zuwachs von $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ bei einer infinitesimalen Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion W ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta f &= \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W\right) + \sum \frac{\partial W}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\} \\ &= \left([Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta t. \end{aligned}$$

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p, \ldots, p_n) = 0$$

gestattet daher die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion F.

Die infinitesimalen Berührungstransformationen können auch benützt werden, wenn man auf kürzestem Weg und im Sinne von *Lie* ohne Benützung der *bilinearen Kovariante* [Nr. 5] zu den Relationen (5) gelangen will.[39])

Bezeichnet man durch den Akzent (′) die neuen Veränderlichen, so folgt aus (5)

$$\zeta' - \sum p_i'\xi_i' = \varrho(\zeta - \sum p_i\xi_i),$$

38) *Lie,* Trf. II, p. 250.

39) Briefliche Mitteilung von *F. Engel.*

also

$$W' = \varrho \cdot W$$

und

$$[W, f] - W\frac{\partial f}{\partial z} = [\varrho W, f]' + W[\varrho, f]' - \varrho W \frac{\partial f}{\partial z'},$$

für $W = 1$ also

$$-\frac{\partial f}{\partial z} = [\varrho, f]' - \varrho \frac{\partial f}{\partial z'},$$

daher

$$[W, f] = \varrho [W, f]'.$$

Hieraus ergeben sich, wenn man für W und f irgend zwei Funktionen aus der Reihe (3) wählt, sofort die sämtlichen Klammerrelationen.

Umgekehrt, wenn die Klammerrelationen erfüllt sind, so findet man

$$[W, f] = \varrho [W, f]'$$

und

$$[W, f] - W\frac{\partial f}{\partial z} = \varrho [W, f]' + W\left(\sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i'} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z'} + \sum \beta_i \frac{\partial f}{\partial p_i'}\right),$$

außerdem ist jedenfalls

$$dz - \sum p_i dx_i = \sum \lambda_i dx_i' + \sum \mu_i dp_i' + \nu dz',$$

und wenn man wieder statt der dz, dx_i, dp_i' einsetzt $\zeta\delta t$, $\xi_i\delta t$, $\pi_i \delta t$

$$-W = \varrho \left\{ \sum \lambda_i \frac{\partial W}{\partial p_i'} - \sum \mu_i \left(\frac{\partial W}{\partial x_i'} + p_i' \frac{\partial W}{\partial z'}\right) + \nu \sum p_i' \frac{\partial W}{\partial p_i'}\right\}$$
$$+ W\left(\sum \lambda_i \alpha_i + \mu_i \beta_i + \gamma\right).$$

Da diese Gleichung für jedes W identisch erfüllt sein soll, so folgt

$$\lambda_i + \nu p_i' = 0, \quad \mu_i = 0$$

also

$$dz - \sum p_i dx_i = \nu\left(dz' - \sum p_i' dx_i'\right),$$

außerdem

$$\frac{[W, f]}{[W, f]'} = \frac{1}{\nu} = \varrho.$$

Unter den infinitesimalen Berührungstransformationen sind diejenigen hervorzuheben, welche den *Pfaffschen Ausdruck*

$$dz - \sum p_i dx_i$$

invariant lassen. Die charakteristische Funktion W muß dann eine Funktion von den x_i und p_i allein sein.[40])

Eine infinitesimale Berührungstransformation läßt den Ausdruck

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

dann und nur dann invariant, wenn die charakteristische Funktion in den p_i homogen von erster Ordnung ist, sonst aber eine ganz beliebige Funktion von den $p_1 \ldots p_n$.[41])

40) *Lie-Engel,* Trf. II, p. 259, Theorem 40.

41) *Lie-Engel,* Trf. II, p. 263, Theorem 42.

Auch die infinitesimalen Berührungstransformationen in *bihomogenen Koordinaten*[42]) können durch charakteristische Funktionen erhalten werden. Nimmt man für V irgendeine Funktion, die sowohl in den x_i wie in den u_i homogen von erster Ordnung ist, so wird

$$(21)\quad \begin{cases} \zeta_i = \dfrac{\partial V}{\partial u_i} + \sigma_1 x_i - x_i(P' \log x_i - M' \log u_i) \\ \eta_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} + \sigma_2 u_i + u_i(P' \log x_i - M' \log u_i), \end{cases}$$

wobei σ_1, σ_2, P', M' irgendwelche Konstanten sind. Diese Transformation wird nur dann zur identischen, wenn man

$$V = C(\sum u_i x_i), \ \zeta_i = (C + \sigma_1)x_i, \ \eta_i = (\sigma_2 - C)u_i$$

setzt, wobei C eine neue Konstante bedeutet.

Die Frage nach den infinitesimalen Berührungstransformationen ordnet sich der *allgemeineren* unter nach den infinitesimalen Punkttransformationen

$$\delta x_i = \xi_i(x_1 \ldots x_n)\delta t$$

bzw.

$$\delta f(x_1 \ldots x_n) = X(f)\delta t$$

$$X(f) = \sum_1^n \xi_i(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

welche den Pfaffschen Ausdruck

$$(22)\quad \Delta = \sum_1^n a_\nu(x_1 \ldots x_n)\,dx_\nu$$

absolut oder *modulo eines vollständigen Differentiales* invariant lassen; sie ist von *F. Winkler*[43]) im Anschluß an frühere Untersuchungen von

42) *T. J. Dohmen*, Darstellung der Berührungstransformationen in Konnexkoordinaten. Diss. Greifswald 1905. Bei dieser Darstellung sind die homogenen Punkt- und Ebenen-Koordinaten, $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ und $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ des R_n, wenn Punkt und Ebene vereinigt liegen, durch die Gleichung

$$\sum_1^{n+1} x_i u_i = 0$$

verknüpft. Will man diese Koordinaten zur Darstellung der Berührungstransformationen anwenden, und sind die x_i' in den x und u homogen von den Ordnungen α und β, die u_i' entsprechend homogen von den Ordnungen γ und δ, so darf die Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

nicht übersehen werden. Vgl. *Lie-Engel,* Trf. III, p. 530.

43) Diss. Greifswald 1905. Vgl. *Engel,* Leipzig Ber. 51 (1899), p. 303 ff. und *von Weber,* p. 332—339; *R. Palm,* Zur Invariantentheorie eines Pfaffschen Ausdrucks, Diss. Greifswald 1914.

F. Engel vollständig behandelt worden *ohne Reduktion von* (22) *auf eine Normalform.* Mit Benützung der Identität

$$(23) \qquad X(V) + Y(U) = c_2 U + c_1 V + Y(u) + X(v),$$

in welcher

$$X(\Delta) \equiv c_1 \Delta + du$$
$$Y(\Delta) = c_2 \Delta + dv$$

sein soll, kann gezeigt werden, daß die erzeugende charakteristische Funktion

$$U = -\sum_1^n \alpha_\nu \xi_\nu$$

für die verschiedenen Probleme durch Integration eines vollständigen Systems gewonnen werden kann.

10. Neuere Untersuchungen über endliche Berührungstransformationen. Die Frage nach den Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene ist nach Methoden von *S. Lie* und *F. Engel* beantwortet worden.[44])

Die charakteristische Funktion $W(x, y, y')$, welche die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt, kann man sich immer gegeben denken durch ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen zwischen W und Differentialquotienten von W; dieses System muß, damit eine Gruppe vorliegt, die Eigenschaft haben, daß, wenn U und V zwei Lösungen sind, auch[45])

$$(24) \quad \{U, V\} = \frac{\partial U}{\partial y'}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial V}{\partial y'}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + y'\frac{\partial U}{\partial y}\right) - U\frac{\partial V}{\partial y} - V\frac{\partial U}{\partial y}$$

eine Lösung ist. Dann läßt sich die *Anzahl* und *Form* der partiellen Differentialgleichungen bestimmen, welche die endlichen Transformationen der Gruppe definieren, und zwar werden diese Differentialgleichungen sowohl wie die unabhängigen Invarianten durch Integration eines vollständigen Systems gefunden.

S. Lattès[46]) hat bei einer endlichen Berührungstransformation die Anfangsglieder für die Reihenentwicklungen der invarianten Mannig-

44) *L. Gasiorowski,* Über die Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene. Diss. Gießen 1914.

45) Der Klammerausdruck $\{U, V\}$ tritt auf bei der Zusammensetzung der infinitesimalen Berührungstransformation mit den charakteristischen Funktionen U und V. Vgl. *Lie-Engel,* Trf. II, p. 321.

46) *S. Lattès,* Sur les multiplicités [Vereine] invariantes par une transformation de contact. S. M. F. Bull. 37 (1909), p. 137—163.

faltigkeiten bestimmt. Ist

$$x_1 = x_2 \cdots = x_n = z = p_1 = p_2 \cdots = p_n$$

ein invariantes Element, so kann die Transformation auf die Form gebracht werden

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{11} x_1 \cdots + a_{1n} x_n + c_1 z + l_{11} p_1 \cdots + l_{1n} p_n + \text{Glieder höh. Ordnung} \\
&\vdots \\
X_n &= a_{n1} x_1 \cdots + a_{nn} x_n + c_n z + l_{n1} p_1 \cdots \quad l_{nn} p_n + \quad " \quad " \quad " \\
Z &= \qquad\qquad\qquad cz \qquad\qquad\qquad + \quad " \quad " \quad " \\
P_1 &= \alpha_{11} x_1 \cdots + \alpha_{1n} x_n + \gamma_1 z + \lambda_{11} p_1 \cdots + \lambda_{1n} p_n + \quad " \quad " \quad " \\
&\vdots \\
P_n &= \alpha_{nn} x_1 \cdots + \alpha_{nn} x_n + \gamma_n z + \lambda_{n1} p_1 \cdots + \lambda_{nn} p_n + \quad " \quad " \quad "
\end{aligned}$$

wobei aber die darin auftretenden Konstanten wegen der Klammerrelationen (5) nicht unabhängig sind, sondern ein System von Gleichungen zu erfüllen haben, das für $n = 2$ schon bei *Hermite*[47]) auftritt in ganz anderem Zusammenhang. Setzt man jetzt

$$\frac{X_i}{x_i} = \frac{Z}{z} = \frac{P_i}{p_i} = S$$

und berücksichtigt nur die Glieder erster Ordnung, so erhält man die Forderung, daß eine $(2n+1)$-reihige Determinante verschwinden muß, in deren Diagonalgliedern das zweite Glied $-S$ ist. Von dieser *Multiplikatorgleichung* ist eine Wurzel gleich c, die anderen sind infolge der zwischen den Konstanten bestehenden Relationen paarweise *assoziiert*, d. h. von der Form

$$S_1, \frac{c}{S_1}; \quad S_2, \frac{c}{S_2}; \ldots; \quad S_n, \frac{c}{S_n}.$$

Jede dieser Wurzeln mit Ausnahme von c liefert einen invarianten Elementstreifen, derart, daß von dem fest bleibenden Ausgangselement $2n$ invariante Streifen ausgehen. Invariante Elementvereine, deren Träger als Punktgebilde r-dimensional ist, erhält man durch lineare Kombination. So liefern z. B. die beiden bei der Berührungstransformation:

$$X = ax + p, \; Y = by + q, \; Z = 2abz + bp^2 + aq^2, \; P = 2bp, \; Q = 2aq$$

invarianten Gleichungssysteme (Streifen)

$$y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

und

$$x = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

die invariante M_2:

$$z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

47) *E. Goursat,* Sur un groupe de transformation, S. M. F. Bull. 30 (1902), p. 158—165, entwickelt diesen Zusammenhang.

Dabei dürfen sich aber unter den Streifen keine assoziierten befinden, außerdem ist die Konvergenz der Reihenentwicklung an verschiedene Bedingungen geknüpft.

S. Lattès[48]) hat auch für Berührungstransformationen der Ebene die sehr viel schwierigere Frage der invarianten Kurven behandelt, die nicht von einem invarianten Linienelement ausgehen, und findet z. B., daß bei der Dualität

$$y + y_1 - xx_1 = 0$$

jede Kurve in sich übergeht, d. h. ihre Linienelemente untereinander vertauscht, die durch die Gleichungen

$$x = g(t) + f(t),$$
$$y = \frac{g^2(0)}{2} + \int_0^t (g - f)(g' + f')\,dt,$$
$$y' = g(t) - f(t)$$

gegeben ist, wobei g eine gerade, f eine ungerade Funktion ist. Nach *P. Suchar*[48a]) können bei allen Berührungstransformationen der Ebene, die reziprok d. h. involutorisch sind (wie z. B. die Dualität), die von den Doppelelementen ausgehenden invarianten Kurven durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden werden.

Im übrigen gehen wir auf die *analytische* Invariantentheorie der Berührungstransformationen, vor allem also die Theorie der Funktionengruppen [II A 5, Nr. **40, 41**] hier nicht nochmals ein, erwähnen nur, daß sie durch *S. Kantor* und *Engel*[49]) eine wesentliche Vereinfachung und Bereicherung erfahren hat, nämlich zur Kovariantentheorie eines allgemeinen *Pfaff*schen Ausdrucks

$$\sum_1^{2n} a_i(x_1, \ldots, x_{2n})\,dx_i$$

erweitert worden ist.

III. Spezielle Berührungstransformationen und sich anschließende Fragen.

11. Fußpunkttransformation, Apsidaltransformation usw. Die Fußpunkttransformation[50]) in der Ebene ist gegeben durch die *aequatio*

48) *S. Lattès,* Sur les substitutions à trois variables et les courbes invariantes par une transformation de contact. C. R. 140 (1905), p. 29—32.

48a) Paris C. R. 155 (1912), p. 389—391.

49) *Kantor* und *Engel,* Fußnote 12), § 7 und 8.

50) *Lie-Scheffers,* Btr., p. 17, 63. Die Umwandlung der *Plücker*schen Zahlen

directrix

$$x^2 + y^2 - xx_1 - yy_1 = 0 \tag{25}$$

und ist ein Spezialfall der auf Veranlassung von *W. Ludwig* durch *H. Wilson*[51]) untersuchten allgemeinen linear-quadratischen Berührungstransformationen

$$x_1\varphi_1(x, y) + x_2\varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) = 0. \tag{26}$$

Wilson hat diese ein-vierdeutige Verwandtschaft im Zusammenhang mit der Theorie der Kegelschnittnetze dargestellt.

Die endliche Fußpunkttransformation ordnet dem Linienelement r, φ, τ, wobei

$$\operatorname{tg} \tau = r\frac{d\varphi}{dr}$$

ist, r und φ die Polarkoordinaten bedeuten und τ den Winkel des Linienelementes mit dem Radiusvektor r, das neue Linienelement zu

$$r_1 = r \sin \tau, \quad \varphi_1 = \varphi + \tau - \frac{\pi}{2}, \quad \tau_1 = \tau.$$

Wiederholte Fußpunkttransformation führt auf

$$r_n = r \sin^n \tau, \quad \varphi_n = \varphi + n\tau - \frac{n}{2}\pi, \quad \tau_n = \tau. \tag{27}$$

Denkt man sich n zunächst durch einen stetig veränderlichen Parameter t ersetzt, dann t unendlich klein, so entsteht die infinitesimale Fußpunkttransformation[52])

$$\delta r = r \log \sin \tau \cdot \delta t, \quad \delta\varphi = \left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)\delta t, \quad \delta\tau = 0$$

mit der charakteristischen Funktion

$$W = r\varphi' \log \frac{r\varphi'}{\sqrt{1 + r^2\varphi'^2}} - \operatorname{arct} r\varphi' + \frac{\pi}{2}. \tag{28}$$

Die Fußpunkttransformation im R_3 hat die *aequatio directrix*:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xx_1 - yy_1 - zz_1 = 0. \tag{29}$$

Die *Apsidaltransformation*[53]) hat ihre Quelle in der folgenden

---

[III C 4, *Berzolari*, Nr. 8] bei den Fußpunkttransformationen hat *G. Loria* angegeben: Le transformazioni pedali ed antipedali nel piano e nello spazio. Periodico di Mat. (3) 4 (1904), p. 214—224. Über Fußpunktkurven vgl. III D 1, 2, *von Mangoldt*, Nr. 7.

51) Untersuchung einer linearquadratischen Berührungstransformation. Diss. Rostock 1913.

52) *Lie-Scheffers*, Btr. p. 63, 99.

53) Vgl. *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes II, 3. Aufl. Leipzig 1880, p. 327. Daselbst auch die ältere Literatur über Apsidalflächen (*Mac Cullagh*, *Catalan*). Die Auffassung der Apsidaltransformation als Berührungstransformation ist ausgesprochen bei *Lie* (s. d. folgende Fußnote).

Aufgabe: Gegeben ist ein Punkt O und eine Fläche. Durch O werden alle Ebenen gelegt und die extremen Werte des Radiusvektor dieser ebenen Schnitte in O auf jeder Ebene senkrecht aufgetragen, auf diese Weise entsteht zu jeder Fläche die Apsidalfläche. (Z. B. ist die Apsidalfläche des Ellipsoides, wenn man zum Pol O den Mittelpunkt nimmt, einfach die *Fresnel*sche Wellenfläche.) Hieraus erhält man eine Berührungstransformation, wenn man beachtet, daß OP extremaler Radiusvektor oder *Apsidalradius* einer den Punkt P enthaltenden Fläche ist, sobald die Richtung der betreffenden ebenen Schnittkurve in O auf OP senkrecht steht. Betrachtet man jetzt alle ebenen Schnitte, für die OP Apsidalradius ist, so erkennt man, daß dem Punkt P ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OP zugeordnet wird, dessen Ebene auf PO senkrecht steht. So erhält man die *aequationes directrices* der Apsidaltransformation

$$(28)\qquad \begin{cases} xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = 0, \end{cases}$$

und es ist beachtenswert, daß man mit Benützung dieser Berührungstransformation die Gleichung der Apsidalfläche aufstellen kann, ohne erst die Apsidalradien der ebenen Schnitte berechnen zu müssen.

Sie kann verallgemeinert werden zu der Transformation[54])

$$(29)\quad \begin{cases} (xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 - m^2(x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = 0, \end{cases}$$

welche als „Dilatation auf den Kugeln“

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

zu bezeichnen ist. In der Tat wird jedem Punkt P auf dieser Kugel ein Kleinkreis mit dem Mittelpunkt P zugeordnet, dessen sphärischer Radius

$$a \cdot \mu = a \cdot \arccos m$$

ist.

Diese Dilatationen[55]) bilden eine Gruppe, und es mag erwähnt

54) *S. Lie*, Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie, Leipzig Ber. 47 (1895), p. 394—508.

55) Die Dilatation besteht in der Verschiebung der Linienelemente auf ihren Normalen um die konstante Strecke a, die *aequatio directrix* lautet

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = a^2.$$

Die infinitesimale Dilatation oder Parallelverschiebung (Kurven gehen dabei in ihre Parallelkurven über) hat die charakteristische Funktion [Nr. 9]

$$W = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Vgl. hierzu *Lie-Scheffers*, Btr., p. 96. Die infinitesimale Paralleltransformation kann entsprechend verallgemeinert werden zu einer gewissen Linienelementtrans-

werden, daß *Lie*, ohne diese Deutung zu geben, gerade diese Gruppe auch benützt, um die *Dualität* als Glied einer Gruppe von Transformationen darzustellen.[54]) Deutet man x, y, z als homogene Punktkoordinaten der Ebene, so gibt die erste Gleichung (29) für

$$m = 0$$

die Dualität.

Gleichungen zwischen

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad xx_1 + yy_1 + zz_1, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

geben überhaupt die allgemeinsten Berührungstransformationen, die wie Fußpunkttransformation, Apsidaltransformation und Dilatation (s. Fußnote 55):

$$(30) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$$

mit den Rotationen um den Anfangspunkt vertauschbar sind.[56])

Diesen „klassischen Berührungstransformationen" begegnet man auch bei der Aufgabe:

Alle Berührungstransformationen zu bestimmen, bei denen die Flächen so transformiert werden, daß die entsprechenden Normalen einander schneiden.[57])

Man erhält derartige Berührungstransformationen, wenn mau durch

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \varphi^2(x, y, z)$$

den Raum X, Y, Z in den Raum x, y, z überführt und dann durch

$$(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2 = \varphi_1^2(x, y, z)$$

den letzteren in $X_1 Y_1 Z_1$; denn bei der ersten Transformation wird jedem Flächenelement (X, Y, Z, P, Q) ein bestimmter Punkt auf seiner Normale zugeordnet und damit ein bestimmtes Linienelement

---

formation für andere Formen

$$ds = W(x, y, y')dx$$

des Bogenelementes. *F. Engel*, Leipz. Ber. 53 (1901), p. 404—412 und Jahresber. d. D. Math.-V. 19 (1910), p. 306—317.

56) Diese Berührungstransformationen werden auch gebraucht zur Lösung der Aufgabe: Das allgemeinste Flächenpaar S, T zu bestimmen, das bei der Beschreibung der Rotation eines Körpers um einen festen Punkt dasselbe leistet, wie Zentralellipsoid und invariante Ebene [IV 6 *Stäckel*, Nr. **34** a], d. h. die Bewegung soll so dargestellt werden können, daß die mit dem Körper fest verbundene Fläche S sich auf einer im Raume festen Fläche T abwälzt. Vgl. *E. Laura*, Sopra le transformazioni di contatto che vengono transformate in se stesse dal gruppo delle rotazioni attorno ad un punto. Torino atti 43 (1908), p, 1053—1070.

57) *L. Raffy*, Sur certaines transformations de contact, S. M. F. Bull. 37 (1909), p. 37—50.

x, y, z, x', y', z', und diesem Linienelement entspricht wieder ein bestimmtes Flächenelement des anderen Raumes.

Die gesuchten Transformationen lassen sich im allgemeinen aus einer *aequatio directrix* bestimmen, deren Form durch Integration einer partiellen Differentialgleichung sich finden läßt.[58])

Bei infinitesimalen Transformationen mit der geforderten Eigenschaft müssen die Bahnkurven als charakteristische Streifen der partiellen Differentialgleichungen, die man durch Konstantsetzen der charakteristischen Funktion erhält [Nr. **9**], natürlich auf den Integralflächen Krümmungslinien seien, eben weil zwei unendlich benachbarte Normalen einander schneiden sollen.

12. Die Liesche Geradenkugeltransformation. [Vgl. III A B 4b, *Fano*, Nr. **13** und III D 3, *von Lilienthal*, Nr. **35**.] Aus der in Nr. **7** erwähnten Berührungstransformation hat *Lie* die Transformation[59])

$$(31)\qquad \begin{cases} x_1 + iy_1 + z_1 + z = 0, \\ x(x_1 - iy_1) - z_1 - y = 0 \end{cases}$$

abgeleitet, die auf die Gleichungen führt

$$(32)\qquad \begin{aligned} x_1 + iy_1 &= -z + \frac{x(xp + yq)}{q + x}, \\ x_1 - iy_1 &= \frac{y - p}{q - x}, \\ p_1 &= \frac{1 + qx}{q - x}, \\ q_1 &= -i\frac{xq - 1}{q - x}, \end{aligned}$$

und den ∞^4 Geraden des $R(x, y, z)$

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

die Kugeln

$$\left(x_1 - \frac{\varrho + s}{2r}\right)^2 + \left(y_1 + i\frac{\varrho - s}{2r}\right)^2 + \left(z_1 - \frac{\sigma - 1}{2r}\right)^2 = \left(\frac{\sigma + 1}{2r}\right)^2$$

zuordnet.

Die Transformation verwandelt die Haupttangentenkurven auf Flächen des $R(x, y, z)$ in Krümmungslinien auf den zugeordneten Flächen des $R_1(x_1, y_1, z_1)$. Speziell werden dabei den Haupttangentenkurven auf der *Kummer*schen Fläche, der Singularitätenfläche eines quadratischen Linienkomplexes, die Krümmungslinien auf den allge-

58) *J. Drach*, Sur les congruences de normales et les transformations de contact, Par. C. R. 148 (1909), p. 1082.

59) Darstellung und Geschichte dieser Transformation vor allem bei *Lie-Scheffers*, Btr., Kap. 10, und was die Anwendung auf die Theorie der algebraischen Flächen betrifft, bei *Salmon-Fiedler*, (Fußnote 53)), p. 514ff.

meinen Zykliden zugeordnet, und auf diesem Wege ließen sich die gesuchten Haupttangentenkurven bestimmen, die sich damit als algebraische Kurven 16. Ordnung erwiesen haben.

Bei der Transformation entsprechen den *Punkten* des $R(x, y, z)$ die *Minimalgeraden* des $R_1(x_1, y_1, z_1)$, und umgekehrt den Punkten des R_1 die Geraden des Nullsystems

$$xdy - ydx + dz = 0.$$

Hieran knüpft die allgemeine Fragestellung: Was für Arten von Berührungstransformationen gibt es überhaupt, die den Punkten $P(x, y, z)$ einen Geradenkomplex des $R_1(x_1, y_1, z_1)$ und umgekehrt den Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ einen Geradenkomplex des $R(x, y, z)$ zuordnen? *Lie*[60]) findet die folgenden sechs:

1. Beide Komplexe sind tetraedral, die *aequationes directrices* sind zwei bilineare Gleichungen.
2. Ein Komplex ist linear, der andere besteht aus den Treffgeraden eines Kegelschnitts. (Nimmt man hierfür den imaginären Kugelkreis, so entsteht die Geradenkugeltransformation.)
3. Ein Komplex ist linear, der andere besteht aus den Tangenten einer Fläche zweiten Grades.
4. Beide Komplexe bestehen aus den Tangenten je einer abwickelbaren Fläche.
5. Der eine Komplex ist ein spezieller linearer (d. h. alle Geraden, die eine gegebene treffen), der andere besteht aus den Tangenten einer abwickelbaren Fläche.
6. Beide Komplexe sind spezielle lineare.

In den Fällen 1—3 ist die Zuordnung notwendig algebraisch, in den übrigen nicht. Man beachte, daß nur dann (Fall 2 und 3) eine *nicht lineare Monge*sche Gleichung (die nicht in mehrere lineare zerfällt) für die ∞^1 Linienelemente durch die Punkte des einen Raumes verbunden ist mit einer *Pfaff*schen Gleichung für die ∞^1 Linienelemente durch die Punkte des anderen Raumes, wenn diese letztere nicht integrabel ist, d. h. wenn ein nichtspezieller linearer Komplex zugeordnet wird.[61])

E. Duporcq[62]) hat den Fall 3) synthetisch untersucht und fest-

60) Leipz. Berichte 49 (1897), p. 687—740.

61) *S. Lie,* Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen. Herausgegeben von *F. Engel,* Math. Ann. 59 (1904), p. 193—313. Vgl. p. 309, Satz 30. Bei einer B.-T. können die Linienelemente einer Pfaffschen Gleichung nur dann denen einer nicht linearen Mongeschen zugeordnet werden, wenn die erstere nicht integrabel ist.

62) Sur une généralisation de la transformation de *Lie.* S. M. F. Bull. 27 (1899), p. 146.

gestellt, daß durch die Zuordnung von fünf Punkten des $R(x, y, z)$ zu fünf Tangenten einer F_2 des $R_1(x_1, y_1, z_1)$ die Transformation 16-deutig festgelegt ist; *R. Bricard*[63]) gibt analytische Entwickelungen dazu.

Die Beiträge von *Lovett*[64]) zur Geradenkugeltransformation haben nichts Neues zutage gefördert. *P. Franck*[65]) hat gezeigt, daß konjugierte Richtungen auf einer Fläche des Geradenraumes sich in harmonisch durch die Krümmungslinien getrennte des Kugelraumes verwandeln. Weitere Untersuchungen, deren Ergebnisse dem Gebiet der Liniengeometrie [III C 10, *Zindler*] angehören, stellt *Lagally*[66]) an.

J. L. Coolidge[67]) hat die Geraden-Kugeltransformation für den Fall der elliptischen Geometrie behandelt oder, was dasselbe ist, diejenige Transformation, bei der den Punkten des einen Raumes die Tangenten einer nullteiligen Fläche zweiten Grades im anderen Raume entsprechen (Fall 3. der Liste von *Lie*). Dann besteht eine einfache Beziehung zwischen den senkrechten Abständen zweier Geraden und dem Winkel, unter dem die ihnen entsprechenden Kugeln einander schneiden. Sind nämlich $x_0, x_1, \ldots, x_5$ die sechs *Klein*schen[67a]) Linienkoordinaten, zwischen denen die Gleichung

$$\sum x_i^2 = 0$$

besteht, so ist

$$J = \frac{\Sigma x_i y_i}{x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5} \tag{33}$$

eine Invariante. Ihre Bedeutung ist

$$\operatorname{tang} d_1 \cdot \operatorname{tang} d_2$$

im Geradenraum, wobei d_1 und d_2 die beiden senkrechten Abstände der Geraden x und y sind, und im Kugelraum

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\vartheta : \sin^2 \tfrac{1}{2}\vartheta',$$

63) Nouv. Ann. (4) 5 (1905), p. 221.

64) *E. Lovett,* Paris C. R. 129 (1899), p. 20—23, 144—147, gibt eine erneute Ableitung der Geradenkugeltransformationen durch Spezialisierung der Berührungstransformationen mit zwei bilinearen *aequationes directrices*. Vgl. auch Annali di mat. (3) 7 (1902), p. 39 ff.; der hier gemachte Versuch einer Ableitung von Geradenkugeltransformationen im R_n ist für $n > 3$ verfehlt, weil die Mannigfaltigkeiten nicht von derselben Dimension sind.

65) *P. Franck,* Hamb. Mitt. 4 (1905), p. 177—203.

66) *M. Lagally,* Über Flächen mit sphärischen Krümmungslinien, vom kugelgeometrischen Standpunkt aus betrachtet, und die entsprechenden Flächen des Linienraumes. Diss. München 1903. Vgl. auch *E. Bompiani*, Rom Linc. Rend. 21 (1912), p. 697.

67) *J. L. Coolidge,* The metrical aspect of the line-sphere transformation. Am. Math. Soc. Trans. 12 (1911), p. 43—69.

67a) *F. Klein,* Diss. Bonn 1868, abgedruckt in Math. Ann. 23, p. 539—578; Math. Ann. 2 (1879), p. 198—226 (p. 203).

wobei ϑ der Winkel ist, unter dem die Kugeln x und y einander schneiden, ϑ' der Winkel, unter dem jede das Spiegelbild der anderen am Koordinatenanfang schneidet.

Die *Lie*sche Transformation ist schließlich noch aus zwei Gründen von besonderem Interesse, *erstens*, weil sie den ∞^4 Kugeln ∞^4 Kurven zuordnet, und dies legt die Frage nahe: Wie muß die Gesamtheit von ∞^4 Flächen beschaffen sein, damit sie durch eine Berührungstransformation in Kurven übergeführt [Nr. **21**] werden können?; *zweitens* sei auf den folgenden Umstand hingewiesen: Im allgemeinen ist im beschränkten Gebiete jede Berührungstransformation eine eineindeutige Transformation der Flächenelemente x, y, z, p, q. Hier aber zeigt sich, daß den Flächenelementen

$$x, y, z, \quad p = y, \quad q = -x$$

der zum linearen Komplex des $R(x, y, z)$ gehörigen *Pfaff*schen Gleichung

$$xdy - ydx + dz = 0$$

je ∞^1 Flächenelemente entsprechen, nämlich die Minimalstreifen

$$(34)\qquad \begin{aligned} x_1 + iy_1 &= -z + x^2(t + y), \\ x_1 - iy_1 &= -t, \\ z_1 &= -xt + y, \\ p_1 &= \frac{x^2 - 1}{2x}, \\ q_1 &= -i\frac{x^2 + 1}{2x}, \end{aligned}$$

wobei t willkürlich ist.

Wir wollen an dieser Stelle nur erwähnen, daß, wenn eine partielle Differentialgleichung, (es ist hier die Gleichung

$$p_1^2 + q_1^2 + 1 = 0)$$

in eine *Pfaff*sche Gleichung (hier

$$p = y, \quad q = -x, \quad \text{d. i.} \quad xdy - ydx + dz = 0)$$

übergeht durch eine Berührungstransformation, dabei den Charakteristiken (hier den Minimalgeraden) die Punkte des anderen Raumes zugeordnet werden.

13. Die orientierten Berührungstransformationen. *E. Study* hat wohl gelegentlich seiner Besprechung von *Lie-Scheffers*, Btr. zum ersten Male darauf hingewiesen, daß die Einführung orientierter Elemente eine unabweisbare Notwendigkeit ist. [Vgl. Fußnote 76).]

Im Anschluß an weitere von *E. Study*[68]) aufgeworfene Fragen hat

68) *E. Study*, Über mehrere Probleme der Geometrie, die dem Problem der konformen Abbildung analog sind. Bonn. Ges. f. Natur- und Heilkunde, Ber. 5. Dez. 1904.

Blaschke[69]) diejenige *unendliche* Gruppe *orientierter* Berührungstransformationen in der euklidischen Ebene behandelt, die gleichsinnig parallele Kurven in ebensolche überführen und dabei die *syntaktischen* Paare von Linienelementen — die Paare gleich orientierter Linienelemente mit gemeinsamer Normale — in ebensolche Paare verwandeln. Jeder solchen *syntaktischen* Berührungstransformation (oder Berührungstransformation der Optik[70])) ist eine Berührungstransformation der Evoluten eindeutig zugeordnet, welche „*im weiteren Sinne umfangstreu*" ist, d. h.: Verwandelt sich bei der syntaktischen Transformation ein syntaktisches Paar mit dem Abstand q in ein Paar mit dem Abstand kq, so muß k notwendig eine Konstante sein, und die von den Normalen einer Kurve umhüllte Kurve geht in die entsprechende Evolute über. Der (durch die Orientierung) gemessene Umfang u' dieser Evolute ist gleich ku, wenn u der Umfang der abgebildeten Evolute ist. Bildet man die Speere (d. h. die orientierten Geraden) der Ebene auf die Punkte eines auf der xy-Ebene senkrecht stehenden Kreiszylinders ab, indem man die Speere um die zu ihnen durch den Schnittpunkt von Zylinderachse und xy-Ebene gezogenen orientierten Parallelen um einen rechten Winkel dreht, und den Durchdringungspunkt des Speeres (Durchdringung von innen nach außen) mit dem Zylinder als Bild des Speeres nimmt, so entsprechen den *flächentreuen Punkttransformationen* des Zylinders in der Ebene *Berührungstransformationen,* die in erweitertem Sinne umfangstreu sind.[71])

Liebmann[72]) hat nachgewiesen, daß den flächentreuen Punkttransformationen auf der Fläche mit dem Bogenelement

$$(35)\qquad \begin{cases} ds_1{}^2 = e_1 dp^2 + 2f_1\,dp\,d\varphi + g_1 d\varphi^2, \\ \sqrt{e_1 g_1 - f_1{}^2} = \dfrac{\partial f}{\partial p} \end{cases}$$

die in *weiterem Sinne umfangstreuen* Berührungstransformationen auf der Fläche mit dem Bogenelement

$$(36)\qquad ds^2 = dp^2 + f(p, \varphi)\,d\varphi^2$$

entsprechen. Insbesondere werden a. a. O. die beiden nichteuklidischen

69) *W. Blaschke,* Über einige unendliche Gruppen orientierter Berührungstransformationen. Math. Ann. 69 (1909), p. 204—217.

70) Vgl. III A B 4 b, *Fano,* Nr. 24, *h'.*

71) Diese synthetische Konstruktion bei *W. Blaschke.* Weitere Anwendungen dieser Konstruktion bei *Blaschke*: Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene, Arch. Math. Phys. (3) 15 (1910), p. 132—140.

72) *H. Liebmann,* Berührungstransformationen der geodätischen Linien, Münch. Ber. 1912, p. 579—601.

Geometrien synthetisch behandelt; bei ihnen kann, wie oben, als Feld der flächentreuen Punkttransformation eine dem entsprechende Zylinderfläche benützt werden. In diesem Zusammenhang ergibt sich auch eine synthetische Konstruktion für *äquilonge Speertransformationen*[73]) der hyperbolischen Ebene, die Kreise in Kreise überführen.

E. Müller[73a]) behandelt die Transformation, welche jedem Punkt die ihn enthaltende orientierte Kugel zuordnet, deren Mittelpunkt auf einer bestimmten Ebene Π liegt, sowie Verallgemeinerungen hiervon.

Zu den *äquilongen* Berührungstransformationen der euklidischen Ebene gehört auch die von *Köstlin*[74]) behandelte Geradentransformation, bei der jede Gerade um ihren Schnittpunkt mit der x-Achse gedreht wird, der Drehwinkel soll jedesmal derselbe sein.

14. Weitere Berührungstransformationen. *Lie* hat die Frage: *Wie muß die Form des Bogenelementes beschaffen sein, damit die Schar der ∞^3 geodätischen Kreise mindestens eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet?* vollständig beantwortet.

Die Kurven *konstanter geodätischer Krümmung* (geodätische Kreise in *Minding*s Bezeichnung, vgl. III D 3, *von Lilienthal,* Nr. 38) werden durch die Differentialgleichung dritter Ordnung definiert

$$y''' - \frac{3}{2}y'^{-1}y''^2 + 2\frac{R}{Z}y' - 2\frac{T}{Z}y'^3 = 0. \tag{37}$$

Dabei ist

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2}$$

das Bogenelement, und

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \quad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}.$$

Soll auch nur eine der verlangten infinitesimalen Berührungstransformationen existieren, die keine erweiterte Punkttransformation ist, so muß die Fläche *konstante Krümmung* haben, und dann ist die Anzahl der voneinander unabhängigen infinitesimalen Berührungstrans-

73) Über die unendliche Gruppe der äquilongen Transformationen vgl. III A B 4b, *Fano,* Nr. **24**, e. Die entsprechenden Berührungstransformationen des Raumes sind untersucht worden von *J. L. Coolidge,* The equilong transformations of space. Am. math. soc. Trans. 9 (1908), p. 178 ff., und im Zusammenhang mit anderen Fragen von *W Blaschke,* Über einige unendliche Gruppen von Transformationen orientierter Ebenen im euklidischen Raum, Arch. Math. Phys. (2) 16 (1909), p. 182—189.

73a) *E. Müller,* Über tripolare Ebenenkoordinaten und ein Analogon zur Bonnet'schen Transformation. Wien. Ber. 123 (1514), p. 441—492. Vgl. auch *Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 185.

74) *E. Köstlin,* Über eine Transformation ebener Kurven, Württemb. Math. Naturw. Mitt. (2) 8 (1906), p. 62—99.

formationen gerade *zehn.*[75]) Gestattet die Schar der ∞^3 geodätischen Kreise aber nur infinitesimale Punkttransformationen, so sind diese *konform,* und zwar ergeben sich entweder zwei unabhängige Transformationen, wenn

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{\left[A(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-n}\right]^2}$$

oder nur *eine,* wenn

$$ds^2 = \omega(x+y)e^{ax}\,dx\,dy.^{76})$$

A. Voss[77]) behandelt die beiden Aufgaben:

1. Alle Kurvenpaare C, C_1 der Ebene zu bestimmen, derart, daß die Normale von C in $P(x, y)$ und die Tangente von C_1 in $P_1(x_1, y_1)$ einander in einem Punkt der y-Achse treffen, ebenso die Tangente von C und die Normale von C_1. Dies führt auf eine Berührungstransformation mit der *aequatio directrix*

$$(38) \qquad \Omega = (x_1^2 - c)((x^2 - c) - c(y_1 - y)^2 = 0,$$

75) *Lie-Scheffers,* Btr., p. 150. Die Flächen konstanter Krümmung lassen sich durch B.-T. so auf die Ebene abbilden, daß geodätische Kreise in Kreise übergehen; die zehngliedrige Gruppe der Kreise der Ebene. welche außer den Bewegungen und der Transformation durch reziproke Radien noch die *Laguerre*schen Linieninversionen enthält, ist in III AB 4b, *Fano,* Nr. **13** und **14** besprochen. *G. Scheffers* (Leipz. Ber. 51 (1899), p. 145) hat sie auch synthetisch bestimmt. Die Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene mit euklidischer Maßbestimmung in ihrem Zusammenhang mit der konformen Gruppe des Raumes [vgl. *Lie-Scheffers,* Btr., p. 426] und ebenso bei nichteuklidischer Maßbestimmung hat *W. Ludwig* synthetisch behandelt, Palermo Rend. 23 (1907), p. 307—319, ebenda 26 (1908), p. 303—314. Die Berührungstransformationen der orientierten Kreise sind als Untergruppe in einer 15-gliedrigen Gruppe von Linienelementtransformationen der Ebene enthalten, welche jede Turbine, d. h. die Menge der orientierten Linienelemente, deren Punkte auf einem Kreis liegen, während ihre Richtungen mit denen der Kreiselemente einen festen Winkel einschließen, wieder in eine Turbine überführen. Dieser 15gliedrigen Gruppe läßt sich in derselben Weise die Gruppe der ∞^{15} Kollineationen [III AB 4b, Nr. 5] des R_3 zuordnen, wobei den ∞^4 Turbinen die ∞^4 Geraden entsprechen. Vgl. *E. Kasner,* The group of turns and slides and the geometry of turbines, Am. Journ. Math. 33 (1911), p. 193—202.

76) *Lie,* Bestimmung des Bogenelements aller Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten. Arch. for Math. 9 (1884), p. 46—61. Am Beispiel dieser Transformationen, nämlich der zehngliedrigen Gruppe (Fußnote 75), hat *Study* zuerst die Notwendigkeit der Einführung *orientierter Elemente* und *orientierter Berührungstransformationen* entwickelt in der Besprechung von *Lie-Scheffers,* Btr. (Gött. Gel. Anzeigen 159 (1897), p. 436—445).

77) Über Kurvenpaare im Raum, München Ber. 39 (1909), 19. Abhandlung. Daselbst p. 92 und 103.

und den Differentialinvarianten[77a])

$$J_1 = x\frac{1+y'^2}{y'}, \quad J_2 = \frac{x}{y'} + \frac{cy'}{y}.$$

2. Alle Kurvenpaare zu bestimmen, bei denen die Tangenten und die Normalen zugeordneter Punkte sich je in einem Punkt der y-Achse treffen.

Dies führt auf

$$\Omega \equiv (c-1)[(y_1-y)^2 + cx^2] + cx_1^2 = 0. \tag{39}$$

Hierher gehört auch die Berührungstransformation, welche jedem Punkt die m^{te} Polare in bezug auf eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung zuordnet.[78]) Die *aequatio directrix* ist vom Grade $n-m$ in x_1, y_1 und vom Grade 1 in x, y; übrigens stellt nicht jede derartige *aequatio directrix* eine solche Polarkurve dar.

Von Berührungstransformationen des Raumes sei die sogenannte *Legendre*sche[79]), in Wirklichkeit von *Euler* herrührende mit der *aequatio directrix*

$$xy_1 - yx_1 + z - z_1 = 0 \tag{40}$$

genannt, die jedem Punkt die zugehörige Ebene eines Nullsystems oder linearen Komplexes zuordnet, ferner die *Euler*sche Transformation[80]) mit den *aequationes directrices*

$$y_1 - y = 0, \quad xx_1 + z_1 - z = 0. \tag{41}$$

77a) Über den Zusammenhang von Differential- und Integralinvarianten, insbesondere bei Berührungstransformationen vgl. auch *S. Lie*, Leipzig Ber. 49 (1897), p. 342—347, 369—410; *A. Guldberg*, Christiania Vidensk. Selsk. skr. 1902, Nr. 5.

78) *Lie-Scheffers*, Btr., p. 66.

79) *Lie-Scheffers*, Btr., p. 645. *P. Stäckel*, Über die sogenannte *Legendre*sche Transformation, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 517. Bei *Euler*, Institutionum calculi integralis vol. III (1770) treten diese Berührungstransformationen (40), (41) in folgender Form auf [§ 83]. Die erstere (40):

$$z = px + qy - \int(xdp + ydq)$$

d. i.

$$z_1 = z - px - qy, \quad dz_1 = -xdp - ydq = p_1 dx_1 + q_1 dy_1,$$

wenn man

$$x_1 = q, \quad y_1 = -p, \quad p_1 = -y, \quad q_1 = x$$

setzt. Ferner die letztere (41) [§ 109]:

$$z = px + \int(qdy - xdp),$$

d. i.

$$z_1 = z - px, \quad dz_1 = qdy - xdp = q_1 dy_1 + p_1 dx_1,$$

wenn man

$$x_1 = p, \quad y_1 = y, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = q$$

setzt. Die erste Transformation wird z. B. zur Integration der Differentialgleichungen:

$$p \cdot q = 1 \ (\S\ 88), \quad p^2 + q^2 = 1 \ (\S\ 89), \quad f(p, q, x) = 0 \ (\S\ 110)$$

benützt.

80) *Lie-Scheffers*, Btr., p. 646.

Von einzelnen Beiträgen ist noch zu nennen die Dissertation von *Süß*[81]), der die Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene bestimmt, welche mit der achtgliedrigen projektiven Gruppe von Punkttransformationen in der Ebene gleiche Zusammensetzung haben. Alle diese Gruppen sind reduzibel, und es wird angegeben, welcher Typus von Berührungstransformationen einem Typus von projektiven Gruppen gegebener Zusammensetzung entspricht.

U. Amaldi[82]) bestimmt die Typen kontinuierlicher irreduzibler Gruppen von Berührungstransformationen, welche die Flächenelemente x, y, z, p, q imprimitiv und das Büschel von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\varphi(x, y, z, p, q) = \tau$$

dem man die Form

$$y = \tau$$

geben kann, 0, 1, 2, 3 — und unendlich-gliedrig transformiert. Die erste Klasse enthält zwanzig verschiedene Typen, die alle bestimmt werden.

W. Brüggemann[83]) hat im Anschluß an Untersuchungen von *F. Engel*[84]) die imaginäre Berührungstransformation genauer untersucht, welche die projektive Gruppe des R_n in eine reell irreduzible Gruppe von Berührungstransformationen verwandelt. Er bestimmt u. a. die rationalen Kurven achter Ordnung, in welche (für $n = 2$) dabei die Kegelschnitte übergehen.

Die auf eine Bemerkung von *F. Klein*[85]) zurückgehende Behandlung der Rollkurven in der Kinematik [vgl. IV 3, Nr. 8, *Schoenflies*] von *F. Schilling*[86]) ist ein Beispiel zur Betrachtung der Berührungstransformationen als Umhüllungstransformationen [Nr. 7] von ∞^1 Punkttransformationen

$$x_1 = \varphi(x, y, t) \quad y_1 = \psi(x, y, t).$$

Bei der *äußeren Kreisbewegung*, die beim Abrollen eines Kreises vom Radius b auf einem Kreis vom Radius a entsteht, wird dem Punkt

81) *A. Süß*, Diss. Greifswald 1905.

82) Mem. Torino (2) 57 (1907), p. 141—219.

83) Über eine reell irreduzible Gruppe von Berührungstransformationen, Diss. Greifswald 1906.

84) Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie 7, Leipz. Ber. 46 (1892), p. 292.

85) *F. Klein*, Einleitung in die höhere Geometrie. Autographiertes Vorlesungsheft, ausgearbeitet von *F. Schilling*, Leipzig 1893, p. 551—554. *Lie-Scheffers*, Btr., p. 66.

86) Jahresb. d. D. M.-V. 11 (1902), p. 267—69. Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation, Z. f. Math. u. Phys. 54 (1907), p. 281—317, p. 337 bis 364.

$$x = x_1 + a + b$$
$$y = y_1,$$

die durch die Gleichungen:

$$(42)\quad \begin{cases} \Omega_1 \equiv x\cos bt + y\sin bt - x_1\cos at + y_1\sin at - (a+b) = 0 \\ \Omega_2 \equiv -x\sin bt + y\cos bt - x_1\sin at - y_1\cos at = 0, \end{cases}$$

gegebene Epizykloïde als Bahnkurve zugeordnet.

Zwei solche Gleichungen in Verbindung mit

$$\begin{cases} \Omega_3 \equiv \dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(x, t)} + p\,\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(y, t)} = 0, \\ \Omega_4 \equiv \dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(x_1, t)} + p_1\,\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(y_1, t)} = 0 \end{cases}$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(y_1, t)} = \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x_1, y_1, t)} \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(y, t)},$$

die nicht vermöge $\Omega_i = 0$ identisch verschwindet.

Dann wird

$$\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(y_1, t)}(dy_1 - p_1 dx_1) + \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(y_1, t)}(dy - p\,dx) = 0.$$

Die Berührungstransformation der äußeren Kreisbewegung ist dann gegeben durch

$$(43)\quad x = a\cos\lambda + l\cos(\lambda + \mu),\quad y = a\sin\lambda + l\sin(\lambda + \mu),$$
$$p = -\operatorname{cotg}(\lambda + \mu);$$
$$x_1 = -b\cos\lambda_1 + l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1),\quad y_1 = -b\sin\lambda_1 + l_1\sin(\lambda_1 + \mu_1),$$
$$p_1 = -\operatorname{cotg}(\lambda_1 + \mu_1),$$

wobei

$$\lambda_1 = -\frac{a}{b}(\lambda + 2n\pi) - 2n_1\pi,$$
$$\mu_1 = \mu + m\pi,$$
$$l_1 = (-1)^m l$$

ist; n, n_1 und m sind ganze Zahlen. *Schilling* untersucht noch im einzelnen, wie sich die Linienelemente abbilden.[86a]

Die Berührungstransformation, welche die Integralkurven einer *Pfaff*schen Gleichung

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0$$

untereinander vertauscht, hat *R. von Lilienthal*[88]) untersucht. Ist die *Pfaff*sche Gleichung nicht integrabel, so muß die Berührungstransformation eine Punkttransformation sein; ist sie integrabel, so ent-

86a) *Schilling,* a. a. O. p. 305.

87) *R. von Lilienthal,* Math. Ann. 50 (1898), p. 303–313.

steht eine Berührungstransformation, welche jede der ∞^1 Integralflächen für sich invariant läßt.

15. Die Elemente höherer Ordnung. [Vgl. III A B 4 *Fano* Nr. 6.] Die Theorie der Berührungstransformationen erfordert mit Notwendigkeit, daß die Darstellung der Linienelemente und Flächenelemente weiter durchgebildet wird. Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen verzichtet *F. Engel*[88]) neuerdings darauf, die Elemente erster und höherer Ordnung durch Einführung homogener Koordinaten zu einem abgeschlossenen Kontinuum zu ergänzen, beschränkt sich vielmehr in der *Ebene* auf die Betrachtung der Umgebung eines Linienelementes mit *endlichen* Koordinaten x, y, y' (im Raum für die Linienelemente von Kurven: x, y, z, y', z', für Flächenelemente: x, y, z, p, q). Dagegen werden die höheren Differentialquotienten durch andere Koordinaten ausgedrückt, derart, daß sich immer die folgenden Definitionen anwenden lassen, gewissermaßen als *formale Gesetze,* deren *Permanenz die Koordinaten sich fügen sollen,* und mit deren Hilfe sich auf induktivem Wege von den Elementen niedrigster Ordnung, Punkt ($\bar{E}_0$) und Gerade (E_0) aus die höheren Elemente $E_1, E_2 \ldots$ sich aufbauen lassen.

Definition I: Ein Element n^{ter} Ordnung E_n und ein diesem unendlich benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes E_n' bestimmen ein Element $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung E_{n+1}, das *zum Elemente E_n gehört.* Auf diese Weise erhält man *alle* E_{n+1}, die zu E_n gehören.

Definition II: Die beiden unendlich benachbarten Elemente $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung E_{n+1} und E_{n+1}' *liegen vereinigt,*

a) wenn E_n und E_n' zusammenfallen,

b) wenn E_n und E_n' zwar voneinander verschieden sind, aber vereinigt liegen und das Element E_{n+1} bestimmen.

Demnach liegen z. B. zwei benachbarte Linienelemente $(x, y, y';$ $x + dx, y + dy, y' + dy')$ vereinigt, wenn sie denselben Punkt oder dieselbe Gerade als Träger haben, oder wenn der Punkt $(x + dx, y + dy)$, der das zweite Linienelement trägt, auf der Geraden

$$(\eta - y) - y'(\xi - x) = 0$$

liegt, welche das erste Element trägt; denn als vereinigte Lage von $\bar{E}_0$ und E_0 gilt, daß $\bar{E}_0$ auf E_0 liegt.

Auf diesen Definitionen läßt sich die Lehre von den Elementen höherer Ordnung in der Ebene aufbauen.

---

88) Die folgende Darstellung nach *G. Spitz,* Zur Theorie der Elemente höherer Ordnung in der Ebene und im Raum, Diss. Greifswald 1912.

Jedes Element E_k ist *Träger* von

$$\infty^1 E_{k+1}, \quad \infty^2 E_{k+2}, \quad \infty^3 E_{k+3} \text{ usw.}$$

Durch ein E_n sind seine *Träger* $E_{n-1}, E_{n-2}, \ldots, E_0, \bar{E}_0$ eindeutig bestimmt.

Ein Verein V_n von Elementen E_n besteht immer aus ∞^1 Elementen. Diese Elemente haben entweder denselben Träger E_{n-1}, oder die ∞^1 Träger bilden einen Verein V_{n-1}.

Ein E_k trägt $\infty^1 E_{k+1}$, die einen Verein bilden. Von einem anhaftenden E_n sagen wir, daß es „zum Verein E_k gehört", wenn es ein Glied des Vereins von ∞^1 Elementen E_n ist, der aus dem Verein von ∞^1 Elementen E_{n-1} abgeleitet ist, der seinerseits wieder durch wiederholte Ableitung aus dem Verein der ∞^1 dem E_k anhaftenden E_{k+1} gewonnen ist.

Dies soll durch ein *Beispiel* erläutert werden. Eine Gerade E_0:

$$\eta - y - y'(\xi - x) = 0$$

oder

$$\eta = a\xi + b$$

besteht aus dem Verein der ∞^1 Linienelemente

$$x, y = ax + b, \quad y' = a.$$

Jedes Element n^{ter} Ordnung, für welches y und y' die angegebenen Werte haben, hat diese Gerade als *Träger*, es gehört aber dem Verein E_0 nur dann an, wenn

$$y'' = y''' \cdots = y^{(n)} = 0$$

ist.

Ein Element E_n wird durch eine Reihe von Zahlen charakterisiert, die seine Beziehung zu den *übergeordneten Trägern* $E_{n-1}, E_{n-2}, \ldots, E_1$ ausdrücken, wenn man diese Träger als Kerne von Elementvereinen höherer Ordnung auffaßt.

E_n ist seinem übergeordneten Träger E_k gegenüber durch die Zahl l_k charakterisiert, wobei die E_n übergeordneten

$$E_{k+1}, \quad E_{k+2}, \ldots E_{k+l_k}$$

zum Verein E_k *gehören*, das nächste E_{k+l_k+1} aber nicht mehr.

In unserem Beispiel ist

$$l_{n-1} = 1, \quad l_{n-2} = 2 \ldots l_1 = n - 2, \quad l_0 = n - 1, \quad \bar{l}_0 = 1.$$

Jede dieser Zahlen ist mindestens gleich *Eins*, l_{n-1} und l_0 oder $\bar{l}_0$ sind $= 1$.

Charakteristisch sind nun die *Abweichungen von* 1 in dieser Zahlenreihe, d. h. die Indizes

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h \qquad (h < n - 1)$$

und die Werte

$$l_{\mu_1}, \; l_{\mu_2}, \; l_{\mu_\lambda},$$

die alle größer als Eins sind.[89])

Diesen Zahlenreihen müssen die Elementkoordinaten angepaßt werden.

Sind

$$x, \; y, \; y'$$

die Linienelementkoordinaten, so sind z. B. die Koordinaten für *Elemente zweiter Ordnung*

$$x, \; y, \; y', \; \sigma_{2,1} : \sigma_{2,2},$$

wobei

$$dx : dy : dy' = \sigma_{2,2} : \sigma_{2,2}y' : \sigma_{2,1}. \tag{44}$$

Die Elemente zweiter Ordnung eines Punktes erfüllen die Bedingung $\sigma_{2,2} = 0$, die einer Geraden $\sigma_{2,1} = 0$.

Eür die *Elemente dritter Ordnung* kommen noch λ_3 und μ_3 dazu, wobei die Proportionen bestehen

$$dx : dy : dy' : \sigma_{2,1}d\sigma_{2,2} - \sigma_{2,2}d\sigma_{2,1} = \lambda_3\sigma_{2,2} : \lambda_3\sigma_{2,2}y' : \lambda_3\sigma_{2,1} : \mu_3 \tag{45}$$

usw., und es ist (um die Beziehung zu den gewöhnlichen Elementkoordinaten anzugeben)

$$y'' = \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_{2,2}}, \quad y''' = -\frac{\mu_3}{\lambda_3\sigma_{2,2}^3}; \tag{46}$$

aus diesen Formeln kann man erkennen, wann die gewöhnlichen Koordinaten versagen würden.

Von Interesse ist auch die Beziehung zur *Differentialgleichung der Kegelschnitte*[90])

$$9y^{V}(y'')^2 - 45y''y'''y^{IV} + 40(y''')^3 = 0. \tag{47}$$

Es zeigt sich, daß die Elemente erster Ordnung, aufgefaßt als Vereine von E_2, und die E_2, aufgefaßt als Vereine von $\infty^1 E_3$, sie erfüllen, ein Element E_3 aufgefaßt als Verein von $\infty^1 E_4$, aber nur dann, wenn das übergeordnete E_2 einer Geraden oder einem Punkt zugehört ($y'' = 0$ oder $y'' = \infty$, bzw. $\sigma_{2,1} = 0$ oder $\sigma_{2,2} = 0$).

Die Definitionen oder *formalen Gesetze,* nach denen die Linienelemente höherer Ordnung im $R(x, y, z)$ aufzubauen sind, sind komplizierter, da ja dort schon wesentlich verschiedene Vereine von E_1 existieren:

---

89) Damit ist die von *M. Nöther,* Math. Ann. 56 (1903), p. 677—684 „Über die singulären Elemente der algebraischen Kurven“ gemachte Ausstellung, daß ein Element höherer Ordnung nicht durch *eine* Reihe von ganzen Zahlen charakterisiert werden könne, sondern erst durch *zwei,* beseitigt.

90) *G. Spitz,* a. a. O. p. 18.

Vereine von $\infty^1 E_1$ sind die *Elemente einer Kurve* und die *Kegelkappen* (∞^1 Elemente durch einen Punkt), Vereine von $\infty^2 E_1$ die Linienelemente, die alle denselben Punkt als Träger haben.

Wir verweilen noch bei den *Flächenelementen zweiter Ordnung*, die später [Nr. 21] in anderem Zusammenhange gebraucht werden.

Ein Flächenelement zweiter Ordnung wird bestimmt durch ein Flächenelement (erster Ordnung)

$$x, y, z, p, q$$

und zwei unendlich benachbarte

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz, \quad p + dp, \quad q + dq,$$
$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z, \quad p + \delta p, \quad q + \delta q,$$

wobei die drei Elemente vereinigt liegen sollen, d. h. es müssen die drei Bedingungen erfüllt sein

$$\text{(48)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} dz - p dx - y dy = 0, \\ \delta z - p \delta x - y \delta y = 0, \\ dx \delta p - dp \delta x + dy \delta q - dq \delta y = 0. \end{array} \right.$$

Als homogene Koordinaten, welche zu x, y, z, p, q hinzu kommen, um ein Flächenelement zweiter Ordnung zu bestimmen, dienen dann die Determinanten[91])

$$\text{(49)} \qquad r:s:t:u:v = \begin{vmatrix} dy & dp \\ \delta y & \delta p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dy & dq \\ \delta y & \delta q \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dq & dx \\ \delta q & \delta x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dp & dq \\ \delta p & \delta q \end{vmatrix},$$

welche wegen der dritten Gleichung (48) noch die Bedingung erfüllen müssen

$$\text{(50)} \qquad rt - s^2 = uv.$$

Die Kurven erfüllen die Bedingung $u = 0$, die abwickelbaren Flächen die Gleichung $v = 0$, die *Punkte* (als Vereine von ∞^2 Elementen zweiter Ordnung) erfüllen die Bedingungen

$$\text{(51)} \qquad r = s = t = u = 0,$$

die Ebenen dagegen die Bedingungen

$$\text{(52)} \qquad r = s = t = v = 0.$$

Deutet man $r:s:t:u:v$ als homogene Koordinaten in einem $\bar{R}_4$, so sind in diesem $\bar{R}_4$ die *Koordinaten der Elemente zweiter Ordnung ausgezeichnet dadurch, daß sie die Punkte der Fläche* (50) *darstellen.* Eine auf die Elemente zweiter Ordnung erweiterte Berührungstransformation

91) Bezeichnung wie bei *O. Lier* (Über Flächenscharen, die durch Berührungstransformationen in Kurvenscharen überführbar sind, Diss. Greifswald 1909).

gibt im $\bar{R}_4$ eine projektive Transformation, welche die Fläche (50) in sich selbst überführt.

Zwei unendlich benachbarte, vereinigt gelegene Flächenelemente erster Ordnung bestimmen ein Büschel von ∞^1 Elementen zweiter Ordnung.

Ein Verein V_2 von ∞^2 Elementen erster Ordnung, deren Träger ein Punkt, eine Kurve oder eine Fläche sein kann, bestimmt immer einen Verein von ∞^2 Elementen zweiter Ordnung.

Ein Verein von ∞^1 Elementen erster Ordnung bestimmt immer einen Verein von ∞^2 Elementen zweiter Ordnung, wobei jedem E_1 $\infty^1 E_2$ anhaften.

Ein Flächenelement erster Ordnung trägt ∞^3 Elemente zweiter Ordnung, die zusammen einen Verein V_3 bilden. Je ∞^1 oder ∞^2 aus ihnen herausgegriffene bilden ebenfalls einen Verein.

Ein Element *dritter Ordnung* ist definiert durch ∞^1 Elemente zweiter Ordnung, die einem Element $(x, y, z, p, q, r:s:t:u:v)$ unendlich benachbart sind und mit ihm und untereinander vereinigt liegen.[92]) Die Darstellung erfordert bereits 51 Koordinaten (statt $3+2+3+10=18$).

16. Bäcklundsche Transformationen und Bäcklundscher Satz. Die Theorie der „Flächentransformationen" ist in II A 5, Nr. **10** behandelt.[92a]) Die Theorie der *Bäcklundschen Transformationen*, d. h. der *unvollständigen*, durch weniger Gleichungen, als die Anzahl der Elemente beträgt, gegebenen Transformationen hat durch *J. Clairin*[93]) und *E. Goursat*[94]) eine wesentliche Förderung erfahren. Läßt eine *Bäcklundsche Transformation* des R_3 sowohl im $R(x, y, z, p, q)$ wie im $R_1(x_1, y_1, z_1,$

92) *G. Spitz,* a. a. O. p. 36.

92a) Ebenda, Fußnote 54 und 55, findet man Literaturangaben.

93) *F. J. Clairin,* Sur les transformations de Bäcklund. Ann. de l'Éc. Norm. 19 (1902), Suppl. p. 3—63. Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre, Toulouse Ann. (2) 5 (1903), p. 437—458. Er unterscheidet drei Klassen von Transformationen im R_3, wenn vier vermittelnde Gleichungen zwischen $x_1 y_1 z_1 p_1 q_1$ und $xyzpq$ bestehen. Einer Fläche als Elementverein können ∞^3 Flächenelemente entsprechen, unter denen sich nur ein Verein von ∞^2 Elementen befindet und umgekehrt. Weiter können die ∞^3 Elemente, die einem Verein von ∞^2 Elementen des einen Raumes entsprechen, sich in ∞^1 Vereine anordnen lassen, endlich kann diese Beziehung für beide Abbildungen bestehen. Bei *A. R. Forsyth,* Theory of differential equations Vol. VI (Cambridge 1906) ist p. 433 ff. die *Clairin*sche Theorie mit Beispielen dargestellt. Eine Ergänzung dazu gibt *S. Büschgens,* Moskau Math. Ges. 26 (1906), p. 24—36.

94) *E. Goursat,* Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre, Toulouse Ann. (2) 4 (1902), p 299—304. Sur quelques transformations de Bäcklund, Par. C. R. 134 (1902), p. 459—462, 1035—1638.

p_1, q_1) eine infinitesimale Berührungstransformation zu, so kann sie auf die Form gebracht werden: x_1, y_1, p_1, q_1 sind Funktionen von x, y, p, q. Die Forderung, daß $p_1 dx_1 + q_1 dy_1$ ein vollständiges Differential sein soll, führt auf eine *Monge-Ampère*sche Gleichung [II A 5, *von Weber*, Nr. 43]

$$R_{pq}(rt - s^2) + R_{yp}r + R_{xq}t + Ss + R_{xy} = 0, \tag{53}$$

deren Integralflächen wieder in Vereine von Flächenelementen übergehen. *Goursat* untersucht, wann eine vorgelegte Gleichung (53) auf diese Weise entstanden gedacht werden kann, und wie sie auf die Normalform zu bringen ist, ferner wie man die zugehörige Bäcklundsche Transformation bestimmen kann; es gelingt dies durch Quadraturen und Reduktion eines Pfaffschen Systems auf seine Normalform. Die entsprechenden Flächen im R_1 sind ebenfalls durch eine *Monge-Ampère*sche Gleichung bestimmt. Gestattet die Bäcklundsche Transformation nur im R_1 eine infinitesimale Berührungstransformation, so kann sie auf die Form gebracht werden, daß x_1, y_1, p_1, q_1 Funktionen von x, y, z, p, q sind; in diesem Fall sind die Flächen, die wieder in Elementvereine übergehen, im $R(x, y, z)$ durch eine *Monge-Ampère*sche Gleichung definiert; ihr entsprechen im $R_1(x_1, y_1, z_1)$ zwei partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung.

Verwandt mit den Bäcklundschen Transformationen ist die von *Liebmann*[95]) behandelte Transformation der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung D_{12}, d. h. der Differentialgleichung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, insofern als nicht endlichdeutig die Bilder von *allen* Flächenelementen, sondern nur für bestimmte, einer solchen D_{12} angehörigen Elements gegeben werden. Dreht man

---

95) Äquitangential- und Isogonaltransformationen der partiellen Differentialgleichungen D_{12}, Palermo Rend. 29 (1910), p. 1—16. Beide Transformationen können leicht zu Bäcklundtransformationen ergänzt werden. Eine andere Verallgemeinerung der Untersuchungen von *Scheffers* (Fußnote 96) gibt *P. F. Smith:* On osculating elementbands associated with loci of surface-elements, Ann. math. soc. Trans. 11 (1910), p. 301—324. Zwei unendlich benachbarte Flächenelemente vereinigter Lage bestimmen den oskulierenden *parabolischen* Streifen, dessen Träger eine Parabel ist, deren Achse zur z-Achse parallel ist, und dessen Elemente einem parabolischen Zylinder angehören, ferner den *kubischen*, dessen Träger eine Raumkurve dritter Ordnung ist, während seine Elemente einem Kegel zweiter Ordnung angehören. Dieser Kegel soll noch drei feste Punkte enthalten, die unendlich fernen Punkte der Achsen. Hieraus ergeben sich zweimal je zwei Transformationen für partielle Differentialgleichungen, die die Punkte, bzw. die Ebenen der Flächenelemente festhalten, jede Transformation enthält zwei Parameter, und dem Satz, daß die Krümmungskreise der aus einer Kurve durch die Äquitangentialtransformation abgeleiteten Kurve noch eine zweite Kurve oskulieren, stehen vier entsprechende Sätze gegenüber.

alle Flächenelemente um denselben Winkel, und zwar um das zum Linienelement der Charakteristik senkrechte Linienelement des Flächenelementes (*Isogonaltransformation*), oder verschiebt man sie um dieselbe Strecke längs der Tangente der Charakteristik (*Äquitangentialtransformation*), so entsteht eine neue D_{12}. Die Transformationen sind Nachbildungen von Berührungstransformationen, welche *Scheffers* für die Ebene aufgestellt hat.[96])

O. Rölcke[97]) hat die *Bäcklundsche Transformation*

$$(54)\qquad \begin{cases} (x_1-x)p+(y_1-y)q-(z_1-z)=0,\\ (x_1-x)p_1+(y_1-y)q_1-(z_1-z)=0,\\ 1+pp_1+qq_1=\cos\varkappa\sqrt{1-p^2-q^2}\sqrt{1-p_1^{\,2}-q_1^{\,2}},\\ (x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=a^2 \end{cases}$$

analytisch genauer untersucht, die Flächen konstanter negativer Krümmung $-\sin^2\varkappa : a^2$ in Flächen derselben konstanten negativen Krümmung verwandelt. *Lie*[98]) hat dies bereits für $\varkappa=\frac{\pi}{2}$ bewiesen und bei der Betrachtung dieser von *L. Bianchi*[98]) herrührenden Transformation als Transformation von Flächenelementen gezeigt, daß die ∞^1 Punktörter der Bilder eines Flächenstreifens und der abgebildete Flächenstreifen dieselbe konstante Torsion besitzen, wenn einer der Flächenstreifen konstante Torsion hat und die Tangentialebenen Schmiegungsebenen sind. Es zeigt sich, daß dieser Satz allgemein gilt[98]), ferner daß die Forderung: Die Flächenstreifen sollen in Raum und Bildraum als Tangentialebenen die rektifizierenden Ebenen der Trägerkurve haben, sich nicht erfüllen läßt. Soll eine Kurve mit ihrer unendlich benachbarten geodätischen Parallelen auf allen ∞^1 Streifen, welche die Bilder des Streifens sind, ebenso abgebildet werden, so muß sie Haupttangentenkurve sein.

Von *Bäcklund* rührt auch der Satz[99]) her, daß es außer den erweiterten Berührungstransformationen keine Transformationen gibt, welche alle Vereine von Elementen höherer Ordnung wieder in Elementvereine verwandeln. Bezeichnen wir im R_{m+n} Transformationen, welche die Elementvereine k^{ter} Ordnung ($k\geqq 1$) der n-dimensionalen

96) Die Arbeiten von *G. Scheffers* sind in III AB 4 b, *Fano*, Nr. **24** besprochen.

97) *O. Rölcke*, Über die Bäcklundsche Transformation der Flächen konstanter Krümmung, Diss. Greifswald 1907.

98) *S. Lie*, Arch. f. Math. og Naturv. (1880), p. 328—358; *A. V. Bäcklund*, Om ytor med konstant negativ krökning, Lund 1883. Vgl. III D 6 a, *Voss*, Nr. **30**.

99) *A. V. Bäcklund*, Über Flächentransformationen, Math. Ann. 9 (1876), p. 297—320.

Gebilde wieder in Elementvereine derselben Art verwandeln, als *Oskulationstransformationen*, so gelten im einzelnen die Sätze:

Eine Oskulationstransformation ($k \geqq 1$) *der n-dimensionalen Gebilde des* R_{m+n} *ist, wenn* $m > 1$, *notwendig Punkttransformation.*

Im R_3 ist also z. B. schon eine Transformation der *Linienelemente,* bei der alle Linienelementvereine wieder in Vereine übergehen, notwendig Punkttransformation.[100])

Eine Oskulationstransformation ($k > 1$) *der n-dimensionalen Gebilde des* R_{n+1} *ist notwendig erweiterte Berührungstransformation.*

Diese Sätze schränken also die Möglichkeit der Transformationen höherer Ordnung auf Berührungs- und Punkttransformationen ein. Dagegen können bestimmte Vereine, z. B. bei der Geradenkugeltransformation [Nr. 12] die ∞^3 Linienelementvereine

$$x, y, z, \quad dz + x dy - y dx = 0$$

auf bestimmte Vereine (die Minimalgeraden) abgebildet werden, so daß die Aufgabe: Klassifikation der Berührungstransformationen im R_{n+1} unter dem Gesichtspunkt, *welche Elemente erster Ordnung von Mannigfaltigkeiten* m^{ter} *Dimension* ($m < n$) *dabei wieder in Elemente, welche Vereine wieder in Vereine übergehen,* ferner *Aufstellung der Kriterien für solche Berührungstransformationen* wohl der Behandlung unterzogen zu werden verdient.

III. F. Engels Methode für die Invariantentheorie der Differentialgleichungen.

17. Aufgaben und Methode. Jede *Invariantentheorie* strebt dem Ziele zu, eine wirkliche *Äquivalenztheorie* zu werden, d. h. nicht nur *einige,* sondern *alle* Kriterien für die Überführbarkeit zweier Gleichungssysteme oder Probleme aufzustellen und schließlich auch anzugeben, wie diese Überführung in allgemeinster Weise vorgenommen werden kann. Gelingt dies noch nicht, so muß man sich begnügen, vorläufig einmal invariante Klassen von Problemen festzustellen; von hier aus können dann einzelne Vorstöße in die Äquivalenztheorie vorgenommen werden. Zumeist handelt es sich bei den folgenden Fragen um diese Pionierarbeit: *Eigenschaften der durch Systeme von Differentialgleichungen*

---

100) *F. Engel,* Leipz. Ber. 42 (1890), p. 192—207. Ein anderer Beweis ist durch Untersuchung der *Dimension* der Vereine von Elementen höherer Ordnung, die als gemeinsamen Träger ein Element nächstniederer Ordnung haben, von *Liebmann* erbracht worden. (Leipz. Ber. 51 (1899), p. 354—370). Bei *Lie-Scheffers,* Btr. p. 479 ist dieses Schlußverfahren angewendet für Linienelementvereine im R_3. Für die Ebene hat *E. Pascal* einen direkten Beweis erbracht, Palermo Rend. 18 (1904), p. 363—367.

definierten Gebilde festzustellen, die bei Punkttransformationen oder oft auch bei Berührungstransformationen invariant sind. Das wesentlich Neue daran ist die *Feststellung dieser Eigenschaften aus den Differentialgleichungen selbst* mit Hilfe der „trivialen aber wohl noch von niemandem vollständig ausgenützten Methode" der *Vertauschung der Differentiationsfolge.* Die erforderlichen Eliminationen lassen sich, im Gegensatz zu dem bei anderen Untersuchungen oft als störend empfundenen, ja auch als Grund zur völligen Ablehnung dieser Untersuchungen geltend gemachten Umstand auch *immer ausführen*; endlich gelingt in vielen Fällen auch die Lösung des Äquivalenzproblems innerhalb derselben Klasse.

18. Mongesche und Pfaffsche Gleichungen als Schnittbedingungen.[101]) Liegt im R_n ein System von Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so ergibt sich als Schnittbedinguug für das Schneiden zweier unendlich benachbarter Kurven ein System von Gleichungen, die in den Differentialen der Parameter vom ersten, zweiten usw. Grade sind. Führt man andere Parameter ein, so ändert dieses System seinen Bau nicht, und demnach hat die Aufgabe, die Kriterien dafür zu suchen, *ob unter den Mongeschen Gleichungen, die ausdrücken, daß zwei unendlich benachbarte Kurven der Schar einander schneiden, so und so viele Pfaffsche Gleichungen, so und so viele Mongesche Gleichungen zweiten, dritten . . . Grades enthalten sind*[102]), ihren wohlberechtigten Sinn. Wir haben [Nr. 8, e] in diesem Sinn schon die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung behandelt und stellten ihre Eigenschaft fest, eine „*Engelsche Klasse*" zu bilden.

Ein anderes Problem dieser Art geben *Berührungsbedingungen ebener Kurvenscharen,* z. B.: Wie kann man ohne Kenntnis der endlichen Gleichungen der durch

$$(55) \qquad y_n = \omega(x, y, y_1 \cdots y_{n-1}) \qquad \left(y_i = \frac{d^i y}{d x^i}\right),$$

definierten Kurvenschar entscheiden, ob die Bedingungen für die Berührung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zweier unendlich benachbarter Kurven

101) Die Frage der Schnittbedingungen von Kurvenscharen wird bei *Lie* (Fußnote 61, p. 291; *Lie-Scheffers,* Btr. p. 269) gestreift Die *systematische* Untersuchung und der Ansatz für *diese* und *alle* weiterhin behandelten Fragen findet sich zuerst bei *F. Engel,* Eine neue Methode zur Invariantentheorie der Differentialgleichungen, Leipz. Ber. 57 (1905), p. 161—232. Bei der Darstellung schließen wir uns meist an die auf Veranlassung von *F. Engel* ausgearbeiteten Greifswalder Dissertationen an.

102) *Engel,* a. a. O. (Fußnote 101), p. 168.

$(n-2)$ Gleichungen zweiten Grades in den Differentialen der Parameter ergeben? Dieser Klasse gehört der Fall $\omega = 0$ an, dagegen werden im allgemeinen Differentialgleichungen (55), die der Klasse angehören, sich noch nicht durch Berührungstransformationen in die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $y_n = 0$ überführen lassen.[103])

Für $n = 3$ soll hier der Gedankengang durchgeführt werden; dabei stelle die Gleichung:

$$y = f(x, c_1, c_2, c_3),$$

wozu kommt

$$y_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

die Kurvenschar dar.

Die durch Elimination von x aus

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial c_1} d c_1 + \frac{\partial y}{\partial c_2} d c_2 + \frac{\partial y}{\partial c_3} d c_3 = 0,$$

$$\delta y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial c_1} d c_1 + \frac{\partial y_1}{\partial c_2} d c_2 + \frac{\partial y_1}{\partial c_3} d c_3 = 0$$

sich ergebende Gleichung soll vom zweiten Grad sein. Zur Elimination der Differentiale der Parameter ist noch

$$\delta y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial c_1} d c_1 + \frac{\partial y_2}{\partial c_2} d c_2 + \frac{\partial y_2}{\partial c_3} d c_3$$

zu benützen, und es muß eine Gleichung der Form

$$(56) \quad A \equiv a_{00}\delta y^2 + 2a_{01}\delta y \delta y_1 + a_{11}\delta y_1^2 + 2a_{02}\delta y \delta y_2 + 2a_{12}\delta y_1 \delta y_2 = 0$$

entstehen, die δy_2^2 nicht enthalten darf, damit A infolge von $\delta y = 0$, $\delta y_1 = 0$ zu Null wird. Sie *soll von x frei sein.* Differenziert man und beachtet (*Vertauschung der Differentiationsfolge!*)

$$\frac{d\delta y}{dx} = \delta y_1, \quad \frac{d\delta y_1}{dx} = \delta y_2;$$

außerdem, indem man die Differentialquotienten von ω nach y, y_1, y_2 durch die Indizes 0, 1, 2 bezeichnet:

$$\frac{d\delta y_2}{dx} = \omega_0 \delta y + \omega_1 \delta y_1 + \omega_2 \delta y_2,$$

und dann in dem nach x total differenzierten A die sämtlichen Koeffizienten der entstehenden quadratischen Form gleich Null setzt, so erhält man, wie übrigens immer bei derartigen Problemen, *ein aus*

103) *K. Wünschmann,* Über Berührungsbedingungen bei Differentialgleichungen, Diss. Greifswald 1905.

Differentialgleichungen und endlichen Gleichungen gemischtes System

$$(57)\begin{cases} \dfrac{d a_{00}}{dx} + 2 a_{02}\omega = 0, \quad \dfrac{d a_{01}}{dx} + a_{00} + a_{02}\omega_1 + a_{12}\omega_0 = 0, \\ \dfrac{d a_{11}}{dx} + 2 a_{01} + 2 a_{12}\omega_1 = 0, \\ \dfrac{d a_{02}}{dx} + a_{01} + a_{02}\omega_2 = 0, \quad \dfrac{d a_{12}}{dx} + a_{11} + a_{02} + a_{12}\omega = 0, \quad a_{12} = 0, \end{cases}$$

welches durch Differentiation und Elimination auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für ω führt. Setzt man allgemein

$$(58) \qquad \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + y_1 \frac{\partial g}{\partial y} + y_2 \frac{\partial g}{\partial y_1} + \omega \frac{\partial g}{\partial y_2},$$

und außerdem zur Abkürzung

$$\psi_2 = \frac{d\omega_2}{dx} - 3\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2^2,$$

so kommt

$$(59) \qquad \frac{d\psi_2}{dx} - \frac{2}{3}\omega_2\psi_2 + 6\omega_0 = 0.$$

Wenn (59) erfüllt ist, so läßt sich die quadratische Schnittbedingung auch angeben: Wählt man die Anfangswerte

$$y = y^0, \; y_1 = y_1^0, \; y_2 = y_2^0 \qquad (\text{für } x = x_0)$$

als Parameter, so lautet sie

$$\tfrac{1}{3}\psi_2 (dy^0)^2 - \tfrac{2}{3}\omega_2^0 dy^0 dy_1^0 + 2 dy^0 dy_2^0 - (dy_1^0)^2 = 0.$$

Als Beispiel nennen wir die Differentialgleichung der Kreise

$$y_3 = \frac{3 y_2^2 y_1}{1 + y_1^2},$$

die hierher gehören muß, da die Berührungsbedingung für zwei benachbarte Kreise mit den Mittelpunktkoordinaten a, b bzw. $a + da$, $b + db$ und den Radien c bzw. $c + dc$ die quadratische Gestalt

$$da^2 + db^2 - dc^2 = 0$$

hat. Sie läßt sich bekanntlich in die Differentialgleichung der Parabeln ($y_3 = 0$) mit gemeinsamer, zur y-Achse paralleler Achsenrichtung überführen durch Berührungstransformationen[104]), und *dies gilt überhaupt, sobald die Schnittbedingung eine Mongesche Gleichung zweiten Grades ist für jede Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form*

$$(60) \qquad y_3 = \omega(x, y, y_1, y_2) = \chi_0 + y_2\chi_1 + y_2^2\chi_2 + y_2^2\chi_3,$$

d. h. wenn die die Gleichung (60) erfüllende Funktion ω vom dritten

104) *Lie-Scheffers*, Btr. p. 242—245.

Grad in y_2 ist.[105]) Hiermit ist also auch das *hinreichende* Kriterium für die Äquivalenz gegeben.

Wünschmann untersucht noch die Fälle $n = 4$ und $n = 5$, die zu komplizierten Formeln und Klassifikationen führen.

A. Koppisch[106]) gibt einen Beitrag zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegenüber allen *Punkttransformationen.* Es handelt sich um folgende Aufgaben: Deutet man in der zu

$$y_2 = \omega(x, y, y_1)$$

gehörigen Integralgleichung

$$y = f(x, a, b)$$

y und x als Parameter, so soll die daraus entstehende Differentialgleichung

$$b'' = \varphi(a, b, b')$$

eine bestimmte Form haben, z. B. soll b'' eine ganze Funktion dritten Grades von b' werden, oder allgemeiner eine rationale Funktion von b'. Die Bedingungen, welche ω zu erfüllen hat, sind aufzustellen.

W. Herbst[105]) behandelt für $n = 3$ und $n = 4$ im R_n Kurvenscharen, die ein System von $n - 2$ Pfaffschen Gleichungen erfüllen und bei denen sich als Schnittbedingungen lauter *Monge*sche Gleichungen zweiten Grades ergeben sollen.

19. Ordnung von Kurvenscharen.[107]) Die ∞^4 Geraden des R_3 haben die Eigenschaft, sich in ∞^3 Flächen (die Ebenen) ordnen zu lassen, derart, daß jede Fläche ∞^2 Gerade enthält. Hieraus erwachsen eine Reihe von allgemeinen Fragen, z. B.[108]): Wie kann man *ohne Kenntnis der endlichen Gleichungen*

$$(61) \qquad \begin{cases} y = f(x, a_1, a_2, a_3, a_4), \\ z = g(x, a_1, a_2, a_3, a_4) \end{cases}$$

allein aus den Differentialgleichungen

$$(62) \qquad \begin{cases} y'' = \alpha(x, y, z, y', z'), \\ z'' = \beta(x, y, z, y', z') \end{cases}$$

105) *Wünschmann*, a. a. O. (Fußnote 103) p. 13. Beweis bei *W. Herbst*, Mongesche Gleichungen zweiten Grades als Schnittbedingungen von Kurvenscharen, Diss. Greifswald 1912, p. 18ff.

106) *A. Koppisch*, Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, Diss. Greifswald 1905. *A. Kaiser*, Weiteres zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diss. Greifswald 1913, untersucht den Fall, daß eine Gleichung zweiter Ordnung ein intermediäres Integral hat, welches in y' linear gebrochen ist.

107) Entwickelung der allgemeinen Methode zur Beantwortung dieser Fragen bei *Engel*, Fußnote 101, p. 212.

108) *A. Greul*, Über Scharen von ∞^{2n} Kurven im R_{n+1}, Diss. Greifswald 1905.

einer viergliedrigen Kurvenschar des R_3 feststellen, ob durch jede Kurve (a_1, a_2, a_3, a_4) der Schar *eine*, eine *endliche Anzahl* oder *unendlich viele Flächen* hindurch gehen, die je ∞^2 Kurven der Schar enthalten? Wenn es gelingt, diese Bedingungen zu finden und außerdem für die Flächen etwa ein System Pfaffscher Gleichungen aufzustellen, so ist damit eine Integrationsvereinfachung für (62) gefunden.

Wesentlich bei diesen und ähnlichen Untersuchungen ist die Abbildung auf den $\bar{R}_3$ mit den homogenen Punktkoordinaten

$$da_1 : da_2 : da_3 : da_4.$$

Die Bedingungen des Schneidens zweier unendlich benachbarter Kurven (61) ist gegeben durch

$$(63)\qquad \begin{cases} \delta y = \sum_1^4 \frac{\partial y}{\partial a_i} da_i = 0, \\ \delta z = \sum_1^4 \frac{\partial z}{\partial a_i} da_i = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen, welche die Parameter der auf einer Fläche mit der Kurve $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ liegenden Kurven füllen, seien

$$(64)\qquad \Delta_i(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

und die zu (a_1, a_2, a_3, a_4) unendlich benachbarten, sie schneidenden Kurven gegeben durch

$$(65)\qquad \sum_1^4 \frac{\partial \Delta_i}{\partial a_k} da_k = 0.$$

Jetzt entsprechen einander

$R(x, y, z)$	$\bar{R}(da_1 : da_2 : da_2 : da_4)$
Punkt auf (a_1, a_2, a_3, a_4) mit allen hindurchgehenden unendlich benachbarten Kurven der Schar (63).	Gerade der Schar (63).
unendlich benachbarte Kurve zu (a_1, a_2, a_3, a_4), welche mit ihr auf einer Fläche (64) liegt.	Punkt auf einer Geraden der Schar (63).
Forderung: Durch jeden Punkt (x) auf (a_1, a_2, a_3, a_4) soll eine unendlich benachbarte Kurve (64) gehen, oder *Anordnung in Flächen.*	Forderung: Eine Gerade der Schar (63) soll alle ∞^1 Geraden der Schar (63) schneiden, die den verschiedenen Werten von x entsprechen.

Führt man im $\bar{R}$ die homogenen Linienkoordinaten

$$p_{ik} = da_i \delta a_k - da_k \delta a_i$$

ein, so heißt dies: *Die Elimination von x aus (63) und zwei entsprechenden Gleichungen muß auf eine Gleichung führen*

$$\sum_{ik}^{1\ldots 4} \gamma_{ik}(a_1, a_2, a_3, a_4)(da_i \delta a_k - da_k \delta a_i) = 0,$$

die einen speziellen linearen Komplex darstellen.

Ähnlich wie in der vorigen Nummer ist dann die *Vertauschung der Differentiationsfolge* auf eine Gleichung anzuwenden, die aus der vorigen durch Einführung der Variationen von y, z, y' und z' entsteht und wieder einen speziellen linearen Komplex darstellen soll. Es ergibt sich: Soll durch jede Kurve höchstens eine Fläche hindurchgehen, die ∞^2 Kurven der Schar (62) enthält, so muß das System

$$(66)\quad \begin{cases} dy = (y' + \varrho z')dx - \varrho dz \\ dy' = \left\{\alpha + \varrho\beta + \frac{1}{2} z'\left[\frac{\partial \alpha}{\partial z'} + \varrho\left(\frac{\partial \beta}{\partial z'} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}\right) - \varrho^2 \frac{\partial \beta}{\partial y'}\right]\right\} dx \\ \qquad - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial z'} + \varrho\left(\frac{\partial \beta}{\partial z'} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}\right) - \varrho^2 \frac{\partial \beta}{\partial y'}\right\} dz - \varrho dz' \end{cases}$$

sich durch geeignete Wahl von ϱ in ein unbeschränkt integrables System [II A 5, *von Weber*, Nr. **60**] verwandeln lassen, und man kann die ∞^2 Flächen durch Integration eines anderen Pfaffschen Systems in fünf Veränderlichen bestimmen.[109])

Ordnen sich die Kurven in ∞^3 Flächen an, von denen jede ∞^2 Kurven enthält, während durch jede Kurve ∞^1 Flächen hindurchgehen, so sind die Kurven in die *Geraden* überführbar, auch kann man die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufstellen, welche die Flächenschar bestimmen.[110])

P. Finke[111]) hat noch den Fall von ∞^5 Kurven im R_3 behandelt, die sich in Scharen von je ∞^2 oder ∞^3 zerlegen lassen, so daß die Kurven jeder Schar auf einer Fläche liegen.

20. Systeme Pfaffscher Gleichungen [II A 5, *von Weber*, Nr. **60**]. Die Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen ist deshalb vor allem für die Berührungstransformationen von Bedeutung, weil ja die ganze Lehre von den Berührungstransformationen ein Spezialfall des Pfaff-

109) *Greul*, a. a. O. (Fußnote 108) p. 14.

110) *Greul*, a. a. O. (Fußnote 108) p. 31.

111) *P. Finke*, Über Scharen von ∞^5 Kurven im gewöhnlichen Raume, Diss. Greifswald 1909.

schen Problems ist; für unsere Zwecke kommt dazu, daß zur *Durchführung* gewisser in Nr. **19** und **21** besprochener *Äquivalenztheorien* immer derartige Systeme zu integrieren sind, und daß die Klassifikation der *Pfaff*schen Systeme mit der Untersuchung der *Schnittbedingungen ihrer Integralkurven* zusammenhängt.

A. Werner[112]) hat Systeme von drei *Pfaff*schen Gleichungen in fünf Veränderlichen untersucht

$$dz_k = \alpha_k dx + \beta_k dy \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{67}$$

Es gibt dann ∞^5 Integralkurven von (67), für welche die Bedingung des Schneidens von zwei unendlich benachbarten [Nr. **18**] in den Differentialen der Parameter linear ist. Es können dann zwei Fälle eintreten, wenn eine der hinzukommenden Schnittbedingungen vom zweiten Grad sein soll: entweder kommt noch eine höherer Ordnung hinzu, oder es treten im ganzen neben der linearen drei Schnittbedingungen zweiten Grades auf.

H. Haußleiter[113]) untersucht allgemeiner, wann unter den Integralkurven des Systems

$$D_\nu \equiv dy_\nu - \alpha_{1\nu} dx_1 - \alpha_{2\nu} dx_2 = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots m)$$

und weiterhin

$$D_\nu = dy_\nu - \alpha_{1\nu} dx_1 - \alpha_{2\nu} dx_2 - \alpha_{3\nu} dx_3 = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots m)$$

sich eine Schar befindet, für die die Schnittbedingung in den Differentialen der Parameter linear wird.

Zugleich wird die schwierige Frage der *Reduktion Pfaffscher Systeme* auf Normalformen gefördert.

Sieht man von den Fällen mit Integralfunktionen, d. h. Reduktion auf kleinere Variabelnanzahl ab, so zeigt sich, daß ein System von m Pfaffschen Gleichungen im R_{n+m} entweder auf eine (von willkürlichen Funktionen freie) *Normalform* gebracht werden kann, oder es gibt eine *lineare Schnittbedingung*, unter der Voraussetzung, daß zu den kovarianten linearen partiellen Differentialgleichungen[114]) bei m-mal ausgeführter Klammeroperation jedesmal höchstens eine linear unabhängige Gleichung dazu kommt.[115])

Ein *nicht allgemeines* System von drei Pfaffschen Gleichungen im R_5[116]), ein System also, bei dem die Klammeroperation aus den zwei

112) *A. Werner*, Diss. Greifswald 1908.

113) *H. Haußleiter*, Zur Theorie der Pfaffschen Systeme, Diss. Greifswald 1909.

114) Über die zu einem Pfaffschen System kovarianten linearen partiellen Differentialgleichungen vgl. II A 5, *von Weber*, Nr. 27.

115) *Haußleiter*, a. a. O. (Fußnote 113) p. 56.

116) *Haußleiter*, a. a. O. (Fußnote 113) p. 28. Ebendaselbst, p. 53, ist ein

linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nicht drei weitere linear unabhängige ergibt, kann auf eine der Normalformen

$$(68)\quad \begin{cases} \text{I)}\ dz_1 = 0, \quad dz_2 = 0, \quad dz_3 = 0, \\ \text{II)}\ dz_1 - y dx = 0, \quad dz_2 = 0, \quad dz_3 = 0, \\ \text{III)}\ dz_1 - y dx = 0, \quad dz_2 - z_1 dx = 0, \quad dz_3 = 0, \\ \text{IV)}\ dz_1 - y dx = 0, \quad dz_2 - z_1 dx = 0, \quad dz_3 - z_2 dx = 0 \end{cases}$$

gebracht werden.

21. Flächenscharen des R_3, die sich in Kurvenscharen überführen lassen[117]**).** Jede Schar von ∞^3 Flächen des R_3 kann durch eine Berührungstransformation mit *einer aequatio directrix* zunächst in Punkte, dann durch eine mit *zwei aequationes directrices* in ∞^3 Kurven verwandelt werden. Ersetzt man die Parameteranzahl 3 durch eine größere n, so ist die Überführung in ∞^n Kurven im allgemeinen nicht mehr möglich; solche Fälle wie die *Lie*sche Kugelgeradentransformation [Nr. **12**] sind eine Ausnahme. Um die Überführbarkeit zu entscheiden, braucht man den Hilfssatz[118]): Ein System von ∞^5 Elementen zweiter Ordnung [s. Nr. **15**] kann dann und nur dann in ∞^3 Vereine von je ∞^2 Elementen erster Ordnung (z. B. die Punkte) angeordnet werden, wenn die das System definierenden, von x, y, z, p, q abhängigen Funktionen

$$(69)\qquad r : s : t : u : v = L : -K : H : -N : -M$$

außer der Grundforderung

$$(70)\qquad HL - K^2 = MN$$

die Bedingung erfüllen, daß das System

$$(71)\quad \begin{cases} dz - p dx - q dx = 0, \\ -N dp + L dx - K dy = 0, \\ -N dq - K dx + H dy = 0, \\ H dp + K dq - M dx = 0, \\ K dp + L dq - M dy = 0 \end{cases}$$

Pfaffsches System angegeben, dessen Integralkurven, soweit sie noch eine in dem Differentialen der Parameter lineare Schnittbedingung erfüllen, die Kegelschnitte der Ebene sind.

117) Vgl. *O. Lier* (Fußnote 91) und *W. Broszat,* Über Scharen von ∞^4 Flächen im R_3, die durch Berührungstransformation in Scharen von ∞^4 Kurven überführbar sind. Diss. Greifwald 1907.

118) *Lier,* a. a. O., (Fußnote 91) p. 10.

unbeschränkt integrabel ist. Die Bedingungen hierfür sind nach *Frobenius* aufzustellen.[119])

Sollen dann die Integralflächen einer *Monge-Ampère*schen Gleichung[120])

$$Hr + 2Ks + Lt + Mu + Nv = 0 \tag{72}$$

in *Kurven*, d. h. (72) in die Gleichung $u = 0$ überführbar sein, so muß (72) im $\bar{R}_4$ eine Tangentialebene an die Fläche (70) bedeuten, denn die Berührungstransformationen im R_3 sind ja in den $\bar{R}_4$ lineare Transformationen, welche diese Fläche invariant lassen, und außerdem müssen die Koordinaten der Berührungspunkte, die gerade durch (69) gegeben sind, ein Wertsystem liefern, daß die im eben besprochenen Satz entwickelten Bedingungen erfüllt.

Sind nun z. B. ∞^4 Flächen gegeben, die gerade *zwei Monge-Ampère*sche Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} F_1 &= H_1 r + 2K_1 s + L_1 t + M_1 u + N_1 v = 0,\\ F_2 &= H_2 r + 2K_2 s + L_2 t + M_2 u + N_2 v = 0\end{aligned}\right. \tag{73}$$

erfüllen, so ist notwendig und hinreichend für die Überführbarkeit in Kurven, daß sich eine Gleichung

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$

durch Kombination bilden läßt, deren Integralflächen in Kurven überführbar sind.

Wir wollen das Beispiel der Kugeln vollständig diskutieren. Sie sind gegeben durch die beiden Gleichungen

$$F_1 = s(1 + p^2) - pqr = 0,$$
$$F_2 = s(1 + q^2) - pqt = 0.$$

Setzt man

$$\lambda_1 = \frac{pq + i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + p^2}, \quad \lambda_2 = \frac{pq - i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + q^2},$$

so entsteht durch Kombination die Gleichung

$$r\frac{pq + i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + p^2} - 2s + t\frac{pq - i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + q^2} = 0,$$

---

119) D. h. das Verschwinden der bilinearen Kovariante infolge der Gleichungen selbst, vgl. II A 5, *von Weber,* Nr. **60**. *G. Frobenius,* Über das Pfaffsche Problem, J. f. Math. 82 (1877), p. 230—315.

120) Die folgende Untersuchung berührt sich mit der von *Goursat* vgl. II A 5, Nr. **43**, vgl. zur Theorie der *Monge-Ampère*schen Gleichung auch III A B 4b, *Fano*, Nr. **24**g.

also

$$H : K : L : M : N$$
$$= \frac{(pq + i\sqrt{1+p^2+q^2})}{1+p^2} : -1 : \frac{(pq - i\sqrt{1+p^2+q^2})}{1+q^2} : 0 : 0 : 0.$$

Führt man an Stelle von p die Variable u ein durch

$$p = i(\sin u - q\cos u),$$

so verwandelt sich das Pfaffsche System (71) in

$$\begin{aligned} & dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ (74)\qquad & -i\cos u\,dx + dy = 0, \\ & dx + \frac{i}{\cos u}\,dy = 0, \\ & \frac{i}{\cos u}(-i\,dq\cos u + i\,du(\cos u + q\sin u)) - dq = 0, \\ & -i(-i\,dq\cos u + i\,du(\cos u + q\sin u)) - i\cos u\,dq = 0. \end{aligned}$$

Es ist unbeschränkt integrabel und liefert die *Minimalgeraden*

$$\begin{aligned} y &= i\cos u \cdot x + c_1, \\ z &= i\sin u \cdot x + c_2, \\ p &= i(\sin u - q\cos u). \end{aligned}$$

Die Kugeln sind also in ∞^4 *Kurven transformierbar, weil sie Regelflächen sind, zu deren Erzeugung nur* ∞^3 *Gerade* (die Minimalgeraden) *gebraucht werden.*

Eine Berührungstransformation, welche diese Geraden, die Minimalgeraden, in Punkte überführt, muß dann natürlich die Kugeln in Kurven verwandeln, wie überhaupt jede aus Minimalgeraden bestehende Regelfläche.

Lier hat auch den Fall untersucht, daß die Flächen drei *Monge-Ampère*sche Gleichungen erfüllen.[121]) Sind dann die Flächen durch Berührungstransformationen in Kurven überführbar, dann sind sie sogar in eine Kurvenschar überführbar, die eine der beiden Pfaffschen Gleichungen

$$dz = 0, \quad dz - y\,dx = 0$$

erfüllt.

22. Zwischenformen von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Auch die in II A 5, Nr. 34 am Schluß besprochene und nur gegenüber *Punkttransformationen* invariante Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im R_{n+1} ist der *Engel-*

121) *Lier,* a. a. O. (Fußnote 91) p. 69.

schen Methode besonders zugänglich.[122]) Wir kommen hier auf diese Fragen zurück und erweitern sie. Die *eine* Ausartung besteht darin, daß ein *Ausfall* an charakteristischen Kurven entsteht. Die größte und *„im allgemeinen"* vorhandene Anzahl von Parametern ist $2n-1$, die kleinste, nur bei den linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eintretende ist n; dazwischen können alle möglichen Formen *„semilinearer"* eintreten. Daneben tritt eine *zweite Ausartung*, daß nämlich *nicht singuläre* Integralvereine von ∞^n Elementen erster Ordnung vorhanden sind, die *als Punktgebilde* nicht die entsprechende Dimensionszahl n haben, sondern eine kleinere m. *Lie* hat dieser Frage bereits für den Fall $m = 2 (n > 2)$ seine Aufmerksamkeit zugewendet. Die *erste Ausartung* (beschränkte Parameterzahl ($< 2n-1$) der charakteristischen Kurven) hat die *zweite* (Auftreten von Integralvereinen aus ∞^n Elementen erster Ordnung, aber als *Punktgebilde* von kleinerer Dimension $m < n$) notwendig zur Folge, die zweite dagegen *nicht* die erste.[123])

W. Steingräber[124]) geht bei seiner Untersuchung von der *Monge*schen Gleichung für die charakteristischen Kurven aus; er weist u. a. nach[125]), daß die von *Lie* konstruierte partielle Differentialgleichung erster Ordnung im R_4 mit ∞^4 (statt ∞^5) charakteristischen Kurven

122) *N. Saltykow*, der in einer historisch-kritischen Auseinandersetzung über Untersuchungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Charkow, Math. Ges. (2) 9 (1906), p. 60—292) die Arbeiten *Lies* über dieses Gebiet bespricht, hat an anderer Stelle (Par. C. R. 137 (1903), p. 309—312) an der hier erörterten von *Lie* und *Bäcklund* in Angriff genommenen Klassifikation gerade deshalb Anstoß genommen, weil sie gegenüber *Berührungstransformationen* nicht invariant ist. Das ist aber *unberechtigt*, denn die Klassifikation ist nicht unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten, sondern mit der Endabsicht, Fälle mit *Erniedrigungen des Integrationsproblems* erkennen zu lassen. Vgl. Fußnote 125.

123) Vgl. hierzu *Engel* (Fußnote 90), p. 217 ff.

124) *W. Steingräber*, Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung im R_4, Diss. Greifswald 1906.

125) *Lie*, Über Berührungstransformationen und Differentialgleichungen (Letzte Arbeit), Leipz. Ber. 50 (1898), p. 113—180, p. 166. In dieser Arbeit wird die in dieser Nr. 22 behandelte Frage diskutiert, die er schon im Jahre 1872 (Christiana Videnskab Selskabet Forhandlinger 1872, p. 24—27 = Gesammelte Abhandlungen 3, p. 1—3 in der Note: Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorieen) gestreift hat. Hier wird ausgesprochen, daß eine Erniedrigung des Integrationsproblems eintreten muß, wenn die charakteristischen Streifen keine $(2n-1)$-gliedrige Schar bilden. Die Zwischenstufen, welche auftreten in Form von Differentialgleichungen mit Integralgebilden niederer Dimension („semilinearen" Differentialgleichungen) sind besprochen in Gött. Nachr. 1872, p. 473 ff. = Ges. Abh. p. 23.

nicht allgemein ist; sie umfaßt nicht den Fall, daß charakteristische Kurven einer integrablen *Pfaff*schen Gleichung und einer *Monge*schen Gleichung genügen.

E. Ziemke[126]) entwickelt zunächst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von ∞^{n+m+1} charakteristischen Kurven der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im R_{n+2} und behandelt die Frage nach dem Auftreten von zweidimensionalen Integralvereinen für $m = 1$ und $m = 2$. Übrigens beschränkt er sich auf die Annahme, daß die charakteristischen Kurven einander nicht berühren.

Maßgebend sind die folgenden, auch wieder durch *Vertauschung der Differentiationsfolge* gewonnenen Sätze:

Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung hat gerade ∞^{n+m+1} charakteristische Kurven, wenn unter den Bedingungen, daß zwei unendlich benachbarte von ihnen einander schneiden, gerade $n - m + 1$ *Pfaff*sche Gleichungen enthalten sind. Die Anzahl der *Monge*schen Gleichungen, welche die charakteristischen Kurven erfüllen, muß natürlich $n - m + 1$ sein.[127])

Ist dieses letztere *Monge*sche System so beschaffen, daß es nur *eine* nichtlineare Gleichung enthält, während die übrigen $n - m$ in den Differentialen linear sind, so müssen die letzteren ein unbeschränkt integrables System bilden, damit gerade ∞^{n+m+1} charakteristische Kurven existieren.[128])

Was ferner die *Integral-M_2* betrifft, so kommt ihre Ermittlung im Fall von ∞^{n+2} charakteristischen Kurven auf die Untersuchung eines n-gliedrigen Pfaffschen Systems in $2n + 2$ Veränderlichen hinaus. Es sind nämlich alle möglichen Scharen von je ∞^1 charakteristischen Kurven zu ermitteln, die so beschaffen sind, daß je zwei derselben Schar angehörige unendlich benachbarte einander schneiden. Dieses Pfaffsche System kann aber auf ein System in nur $n + 2$ Veränderlichen zurückgeführt werden.[129])

Liegt eine partielle Differentialgleichung mit ∞^{n+3} charakteristischen Kurven vor, so ist nur die Bedingung heranzuziehen, daß durch jede von ihnen mindestens eine M_2 geht, die ∞^2 charakteristische Kurven enthält.[130])

---

126) *E. Ziemke,* Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit Integralvereinen, die als Punktmannigfaltigkeiten zweifach ausgedehnt sind, Diss. Greifswald 1909.

127) *Ziemke,* a. a. O. (Fußnote 126) p. 15.

128) a. a. O. (Fußnote 126) p. 29.

129) a. a. O. (Fußnote 126) p. 46.

Den Fall *geradliniger* Charakteristiken im R_4 hat *Liebmann*[131]) behandelt und findet:

∞^5 geradlinige Charakteristiken zusammen mit ∞^3 Integral-M_2, die also Ebenen sind, treten dann und nur dann auf, wenn die Charakteristiken die ∞^5 Tangenten einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zweiten Grades sind. Die Integralebenen sind dann nichts anderes, als die Tangentialebenen (T_2) der Kegel, in denen sie von ihren linearen dreidimensionalen Tangentialmannigfaltigkeiten T_3 geschnitten werden.

∞^2 Integralebenen mit ∞^5 geradlinigen Charakteristiken treten auf, wenn die letzteren eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit (als singuläre Lösung) umhüllen, ihre ∞^2 T_2 sind dann die ∞^2 Integralebenen. Einen anderen Fall erhält man, indem man als singuläre Lösung eine von ∞^2 Ebenen umhüllte M_3 nimmt, deren Tangenten dann die Charakteristiken sind; die umhüllenden Ebenen sind dann die Integral-M_2.

130) a. a. O. (Fußnote 126), Kap. 4, p. 47ff.

131) (Fußnote 34), p. 417.

(Abgeschlossen im Oktober 1914.)

III D 8. GEOMETRISCHE THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Von

H. LIEBMANN

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces II (Paris 1889) und III (1894), zitiert mit *Darboux* II, III.

A. R. Forsyth, Theory of differential equations II, Vol. II (Cambridge 1900).

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (Sammlung *Schubert* 50, Leipzig 1905), zitiert mit *Horn.*

E. Picard, Traité d'analyse III (Paris 1896), zitiert mit *Picard* III.

L. Schlesinger, Einführung iu die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen, 2. Auflage (Sammlung *Schubert* XIII, Leipzig 1904).

J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Band III, 4. u. 5. Auflage, bearbeitet von *G. Scheffers* (Leipzig 1914), zitiert mit *Serret-Scheffers* III.

1. Vorbemerkung. Für die Anwendungen auf Geometrie, Mechanik, Hydrodynamik usw. kommt es bei der Bearbeitung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen oft nicht so sehr darauf an, eine analytische Darstellung der durch das System definierten Kurven, der *Bahnkurven,* zu finden, als eine Vorstellung über ihren Verlauf im allgemeinen und ihr Verhalten an einzelnen singulären Stellen sich zu verschaffen. Schon lange hat die analytische Mechanik diesen Weg eingeschlagen [vgl. z. B. IV 6 (*Stäckel*) Nr. **34a**] einerseits, weil hier oft diese qualitative Untersuchung sich leicht durchführen läßt, andererseits weil der quantitative Teil der Aufgabe oft auf unüberwindliche Schwierigkeiten stößt.[1]) Die erwähnte qualitative Untersuchung hat aber wohl erst *Poincaré*[2]) als Programm aufgestellt, und sie ist auf seine Anregung hin namentlich auch für geodätische Linien [III D 3 (*von Lilienthal*) Nr. **14**] weitgehend bearbeitet worden.

Diesem Programm entsprechend, ist die hier gegebene Darstellung aufgebaut, indem zunächst die gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und die dabei für die Untersuchung des Verlaufs bisher aufgewandten Mittel besprochen werden [Nr. **2**—**7**], sodann die bei einigen Aufgaben der Mechanik und der Differentialgeometrie erreichten Erfolge zu betrachten sind [Nr. **8**—**12**].

2. Die topographischen Kurven.[3]) Zwei der Behandlung leicht zugängliche Beispiele von Kurvensystemen, welche die Ebene einfach überdecken und durch Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades definiert sind, geben die *Horizontalen* und die *Falllinien* der Topographie. Betrachtet man die Fläche

$$z = f(x, y),$$

wobei f als eine mit ihren ersten (p, q) und zweiten (r, s, t) Differentialquotienten in dem betrachteten Gebiet stetige Funktion angenommen ist, so wird für das System der Horizontalkurven und ihrer Pro-

---

1) Als Beispiel einer derartigen Untersuchung sei auch die Theorie des sich aufrichtenden Kreisels und des rotierenden Eies auf horizontaler Unterlage genannt [IV 6 (*Stäckel*) Nr. **37**, **38** und Habilitationsschrift von *L. Föppl,* Würzburg 1914].

2) Die einschlägigen Arbeiten von *Poincaré* sind unter dem Titel: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle erschienen
I. J. de math. (3) 7 (1881), p. 375—422. II. J. de math. (3) 8 (1882), p. 251—296.
III. J. de math. (4) 1 (1885), p. 167—244. IV. J. de math. (4) 2 (1886), p. 151—217.
und werden im folgenden mit *Poincaré* I, II, III, IV zitiert.

3) *J. Boussinesq,* Cours d'analyse infinitésimale I, 2 (Paris 1887), p. 229—243. *R. Rothe,* Darstellende Geometrie des Geländes, Leipzig 1914.

jektionen auf der Ebene $z = 0$, das gegeben ist durch

$$f(x, y) = c \quad \text{oder} \quad p\,dx + q\,dy = 0,$$

singulär jeder Punkt, in dem p und q gleichzeitig zu Null werden, wo also die Tangentialebene der topographischen Fläche horizontal ist. Man hat dabei zu unterscheiden zwischen *Gipfel-* und *Tiefpunkten* einerseits ($rt - s^2 > 0$), in denen z ein wirkliches Maximum oder Minimum erreicht, und *Sattelpunkten* ($rt - s^2 < 0$) auf der anderen Seite, wie sie in der Natur durch Gebirgspässe vertreten sind. In ihnen schneidet die Tangentialebene die topographische Fläche reell.

Die Horizontalkurven schließen sich in immer enger werdenden, endlich zum singulären Punkt zusammenschrumpfenden geschlossenen Linien um die Punkte der ersten Art, die auch *Wirbelpunkte* (centre) genannt werden; bei den Sattelpunkten verlaufen sie wie eine Schar ähnlicher Hyperbeln in der Nähe des Mittelpunktes.

Diejenigen Gebiete, in denen die konvexe Seite der Horizontalkurven sich gegen den Berg hinwendet, heißen *Hohlformen*, die anderen *erhabene Formen*. Geschlossene Hohlformen treten in vom Wasser vollkommen ausgearbeitetem (erodiertem) Gelände, z. B. im Mittelgebirge oder in Hügellandschaften, nicht auf, wohl aber im Hochgebirge (als Kare) und auf der Leeseite von Dünen (als sogenannte Windwunden, durch Wirbel des Windes gebohrte Löcher). Im normalen Gelände gibt es also keine Tiefpunkte, nur Gipfel und Sättel.

Die Grenzlinie zwischen beiden Formen von Gelände ist die *Wendepunktslinie*, d. h. der Ort der Wendepunkte der Horizontalkurven, gegeben durch

$$q^2 r + p^2 t - 2pqs = 0.$$

Eine solche Linie verläuft natürlich nur im Gebiet nicht positiver Krümmung, und es gehen von jedem Sattelpunkt zwei Wendepunktslinien aus, welche dort die Haupttangenten der Fläche berühren und sich alle beide in die beiden dort zusammenstoßenden Täler hinab erstrecken.

Mit der Geländeform kennt man auch die Horizontallinien; ihre Orthogonaltrajektorien, die *Falllinien* sind gegeben durch die Differentialgleichung

$$p\,dy - q\,dx = 0.$$

In jeden Gipfel- oder Tiefpunkt hinein verlaufen unendlich viele Falllinien, er ist ein *Knotenpunkt* (noeud) für dieses zweite Kurvensystem. In der Tat, wenn man die Fläche in der Umgebung dieser

Punkte näherungsweise durch

$$\pm z = \frac{mx^2 + ny^2}{2} \qquad (m, n > 0)$$

darstellt, so ergibt sich

$$pdy - qdx = mx\,dy - ny\,dx = 0$$

oder

$$y^m = cx^n.$$

Dagegen ist ein Sattelpunkt des einen Systems zugleich Sattelpunkt für das andere, wie die aus

$$z = \frac{mx^2 - ny^2}{2} \qquad (m, n > 0)$$

sich für die Falllinien ergebende Gleichung zeigt:

$$y^m = cx^{-n}.$$

Linie stärkster (oder schwächster) *Steilheit* heißt der Ort derjenigen Punkte, für die das Gefälle v, gegeben durch

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

größer oder kleiner ist als für benachbarte Punkte auf derselben Horizontalen. Sie ist gegeben durch die Gleichung

$$pq(r - t) + s(p^2 - q^2) = 0.$$

Eine Diskussion hat sich entsponnen über die Begriffe „*Talweg*" und „*Kammweg*". Der Kammweg soll die stets auf einer erhabenen Form gelegene Wasserscheide sein, der Talweg das in einer Hohlform gelegene Bachbett, d. h. die Sammelstätte der von den Talwänden abfließenden Gewässer. Nach *C. Jordan*[4]) wird man dieser physikalischen Definition am meisten gerecht, wenn man hierfür die von einem Sattelpunkt ansteigende oder absteigende Falllinie annimmt; auch gilt als Talweg die vom höchsten Punkt einer Hohlform ausgehende Falllinie. Beide Linien fallen ziemlich genau auf die Linien extremer Steilheit. Beim hyperbolischen Paraboloid

$$z = \frac{mx^2 - ny^2}{2}$$

sind sie überhaupt identisch, indem

$$y = 0, \quad z = \frac{mx^2}{2}$$

---

4) *J. Boussinesq,* Paris C. R. 73 (1871), p. 1368—1371; 75 (1872), p. 835—837. Vgl. auch *P. Breton de Champ,* Mémoire sur les lignes de faîte et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie J. de math. (3) 3 (1877), p. 99—114. *C. Jordan,* Sur les lignes de faîte et de thalweg, Paris C. R. 74 (1872), p. 1475—1459; 75 (1872), p. 625—627, 1023—1025.

Kammweg und Steilkurve ist, ebenso

$$x = 0, \quad z = -\frac{ny^2}{2}$$

Talweg und Steilkurve. Die Falllinien nähern sich „im allgemeinen" asymptotisch dem Talweg.

3. Die singulären Punkte von $Xy' - Y = 0$ [vgl. II A 4a (*Painlevé*) Nr. **27, 28, 29, 30**]. Fragt man nach dem Verlauf der Bahnkurven bei allgemeineren Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades, so ist als einfachstes vollständig integriertes Beispiel das System der W-Kurven [III D 4 (*Scheffers*) Nr. **14**] zu nennen, die durch die *Jacobi*sche Differentialgleichung [II A 4b (*Vessiot*) Nr. **8**] definiert sind:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 + (a_2 x + b_2 y + c_2) y' + (a_3 x + b_3 y + c_3)(xy' - y) = 0.$$

Hier treten unter den drei singulären Punkten neben Sattel- und Wirbelpunkten auch *Strudelpunkte* (*foyers*) auf, in denen die Bahnkurven sich verhalten wie logarithmische Spiralen in ihrem Pol, d. h. sie winden sich unendlich oft um einen Punkt und nähern sich ihm dabei asymptotisch. Die Differentialgleichung

$$(\varkappa x - y) y' - (y + \varkappa x) = 0$$

der logarithmischen Spiralen

$$\varrho = c e^{\varkappa \omega}$$

gehört selbst mit zu dieser Klasse.

Um die singulären Punkte zu untersuchen, d. h. die Punkte, in denen X und Y gleichzeitig zu Null werden, geht *Poincaré* von der Annahme aus, daß die Funktionen analytisch sind und im singulären Punkt mit Gliedern erster Ordnung beginnen.[5][6]) Läßt man dann in

$$(a_1 x + b_1 y + \cdots) y' - (a_2 x + b_2 y + \cdots) = 0$$

5) *Poincaré* I, Kap. 3, p. 385—392; *Picard* III, p. 198—207; *Horn*, p. 333—340. Über Sattelpunkte vgl. auch *H. Dulac*, Paris C. R. 129 (1899), p. 276—279.

6) Figuren, die alle Fälle veranschaulichen, wo X und Y mit Gliedern erster Ordnung beginnen, bei *Liebmann*, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Leipzig 1901, p. 101—102. Ebenda Figuren zu dem entsprechenden Problem im Raum p. 134; desgl. bei *W. Büchel*, Programm der Realschule in Hamburg-Eppendorf (1906). Das räumliche Problem ist in II A 4a (*Painlevé*), Nr. **36** vollständig besprochen im Anschluß an *Poincaré* IV (Fußnote 2) Kap. 16, p. 151—167. Vgl. auch *C. A. Noble*, Am. Math. Soc. Bull. (2) 14 (1908), p. 223—229.

Was das ebene Problem betrifft, sei noch die vollständige Diskussion der Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades erwähnt, bei der y' eine gebrochene Funktion ist, Y und X beide vom zweiten Grad in x und y; *W. Büchel*, Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar (Diss. Jena 1903 und Hamb. Mitt. 4 (1904), p. 138—168); ferner *J. H. M. Falkenhagen*, Über das Verhalten der Inte-

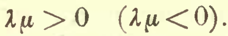
die Glieder höherer Ordnung fort, so kann die verkürzte Gleichung im allgemeinen durch eine lineare Substitution in

$$\lambda x_1\, dy_1 - \mu y_1\, dx_1 = 0$$

verwandelt werden, wobei λ und μ die Wurzeln der Gleichung:

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$$

sind. Die (unverkürzte) Gleichung hat sicher einen Knoten- (Sattel-) punkt, wenn λ und μ beide reell und von Null verschieden sind und



$$\lambda\mu > 0 \quad (\lambda\mu < 0).$$

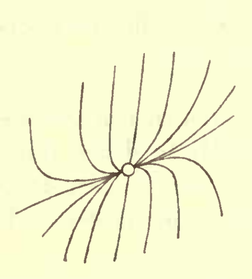


Fig. 1 (Knotenpunkt, *noeud*).

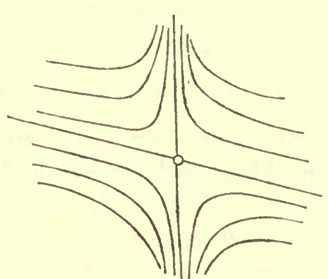


Fig. 2 (Sattelpunkt, *col*).

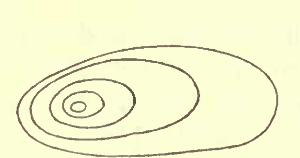


Fig. 3 (Wirbelpunkt, *centre*).

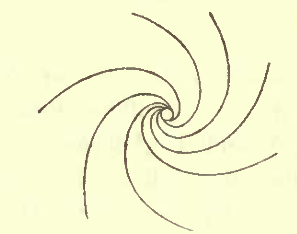


Fig. 4 (Strudelpunkt, *foyer*).

Sind die Wurzeln beide komplex, so tritt sicher ein Strudelpunkt auf, dagegen ist die Entscheidung zwischen Wirbel und Strudel für den Fall

$$\lambda = i\alpha, \quad \mu = - i\alpha$$

sehr schwierig.[7]) Durch reelle Transformation kann in diesem Falle

---

grale eine *Riccati*schen Differentialgleichung [II A 4 b (*Vessiot*) Nr. 8] Nieuw Archief (2) 6 (1904), p. 209—248. Über den Fall, daß die Riccatische Gleichung ein isothermes System [III D 3 (von *Lilienthal*) Nr. 20] bilden vgl. *E. Kasner*, Am. math. soc. bull. (2) 10 (1904), p. 341—346.

7) *Poincaré* III, Kap. 11 (p. 172—196); *Picard* III, p. 207—217; *Horn*, p. 340—344; *Horn*, Arch. Math. Phys. 3 (8) (1904), p. 237—245. Ferner Fußnote 12 (*Bendixson*), p. 53, 61, 75. B. hat auch (p. 26) den Begriff des Wirbelpunktes verallgemeinert; bei Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades,

die Form

$$(x + \cdots)dx + (y + \cdots)dy = 0$$

erreicht werden, oder, mit Einführung von Polarkoordinaten

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \varrho^2 g_2(\omega) + \varrho^3 g_3(\omega) + \cdots,$$

wo die Koeffizienten trigonometrische Reihen mit dem Argument ω, also periodische Funktionen von ω sind. Es ist dann zu untersuchen, ob der Ansatz

$$\varrho = c + c^2 \varrho_2(\omega) + c^3 \varrho_3(\omega) + \cdots$$

ebenfalls periodische Koeffizienten ergibt, (wobei die $\varrho_i(\omega)$ der Reihe nach durch Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von c gewonnen werden) und keine säkularen, d. h. ω explizite enthaltenden Glieder.

Man kann auch wieder einfach durch Koeffizientenvergleichung untersuchen, ob die partielle Differentialgleichung

$$(y + \cdots)\frac{\partial F}{\partial x} + (-x + \cdots)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ein analytisches Integral

$$F = x^2 + y^2 + F_3(x, y) + F_4(x, y) + \cdots$$

zuläßt, wobei die homogenen Polynome steigender Ordnung ebenfalls durch Koeffizientenvergleichung zu bestimmen sind, mit andern Worten, es ist festzustellen, ob der Ansatz auf keinen Widerspruch führt. Ist das nicht der Fall, dann liegt ein Wirbelpunkt vor, andernfalls ein Strudelpunkt.[8])

Auf qualitativem Wege können also nur die Knoten- und Sattelpunkte einwandfrei festgestellt werden, *dagegen erfordert die endgültige Entscheidung zwischen Strudel- und Wirbelpunkten im allgemeinen die vollständige, quantitative Integration.*

Die Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades, bei denen X und Y ganze rationale Funktionen von x und y sind, haben unter dem Gesichtspunkt der abzählenden Geometrie [III C 3

---

wo X und Y nicht mehr analytisch sind im singulären Punkt, kann es vorkommen, daß um ihn geschlossene Bahnkurven sich häufen, ohne eine Schar zu bilden. Ein Beispiel ist, in Polarkoordinaten geschrieben:

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \varrho^3 \sin\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2$$

mit den geschlossenen Bahnkurven

$$\varrho = a : n\pi \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

8) Wenn diese Bestimmungen von ϱ und F möglich sind, dann ist auch die Konvergenz gesichert nach *Poincaré* (Fußnote 6).

(*Zeuthen*)] noch *G. Fouret*[9]) und *Darboux*[10]) weiter betrachtet und im Zusammenhang mit den Konnexkoordinaten von *Clebsch* [vgl. III C 10 (*Zindler*)], *F. Lindemann* und *A. Voss.*[11])

Nach *Voß* gilt der allgemeine Satz:

Ist n die Ordnung der Gleichung

$$Xy' - Y = 0$$

in x und y, p die Ordnung, q die Klasse eines in x und y algebraischen Integrals

$$F(x, y) = 0,$$

α die Anzahl der singulären Punkte der Differentialgleichung, durch welche diese Integralkurve hindurchgeht, so besteht die Beziehung

$$np - \alpha = q.$$

Hieraus folgt z. B., daß jede Integralkurve erster Ordnung (Integralgrade) durch n, jede Integralkurve zweiter Ordnung durch $(2n - 1)$, jede Integralkurve der Ordnung p ohne singuläre Punkte durch $p(n - p + 1)$ singuläre Punkte der Differentialgleichung gehen muß und jedes partikuläre algebraische Integral überhaupt durch mindestens n singuläre Punkte. Ferner ist jedes partikuläre algebraische Integral ohne Singularitäten höchstens von der Ordnung n.

Diese Untersuchungen sind später auf den Fall erweitert worden, daß X und Y mit Gliedern n^{ter} Ordnung $(n > 1)$ im singulären Punkt beginnen, ja, daß sie überhaupt nicht mehr analytische Funktionen sind.[12])

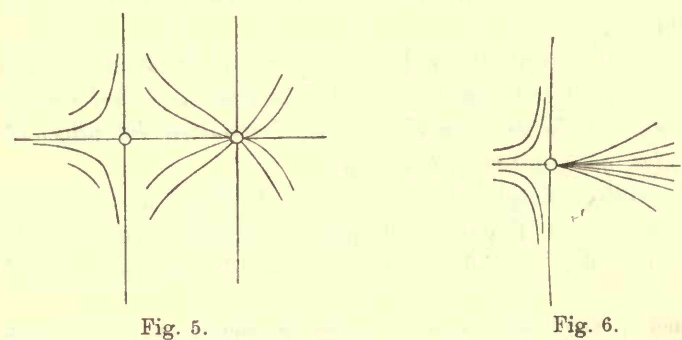


Fig. 5. Fig. 6.

9) Bull. Soc. math. de France 2 (1874), p. 72—83.

10) *Darboux* Bull. (2) 2 (1878), p. 60—96, 123—144, 151—200 und Paris C. R. 86 (1878), p. 533—536, 584—586, 1012—1014.

11) *Clebsch-Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie I (Leipzig 1876), p. 962; *A. Voß,* Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades, Math. Ann. 23 (1884), p. 157—181.

12) Vgl. die zusammenfassende Arbeit von *J. Bendixson,* Sur les courbes définies par des équations differentielles, Acta math. 24 (1901), p. 1—88.

Hier können Verschmelzungen von Singularitäten eintreten. Wenn X und Y Polynome sind und der singuläre Punkt weder Strudel noch Wirbel ist, so ist nach *Bendixson* das allgemeinste Bild folgendes: Um den Punkt lagern sich verschiedene Knotengebiete, welche durch Sattelgebiete getrennt sind. Die Knotengebiete können geschlossen sein, d. h. aus lauter ineinander gelegenen Schlingen bestehen (wie etwa ein System ähnlicher Lemniskaten) oder offen, wenn die Bahnkurven, die im Knoten beginnen, sich ins Unendliche erstrecken. Die eingelagerten Sattelgebiete sind begrenzt in einer im singulären Punkt sich brechenden Bahnkurve, zwischen deren beiden Ästen sich Bahnkurven erstrecken, die nach Art der Hyperbeln verlaufen. Ein Beispiel ist

$$x^2 y' = y, \qquad y = ce^{-\frac{1}{x}}.$$

Hier liegt rechts von der y-Achse ein (offenes) Knotengebiet, links hat man zwei Sattelgebiete (im gewöhnlichen Sattel sind es vier Gebiete). Man kann diese Singularität leicht aus einem gewöhnlichen Sattel und einem gewöhnlichen Knoten bei

$$(x^2 - a^2) y' = y, \qquad \begin{bmatrix} y = 0 & x = +a \cdots \text{Knoten} \\ y = 0 & x = -a \cdots \text{Sattel} \end{bmatrix}$$

für $a = 0$ entstehen lassen (s. Fig. 5 und 6).

Ein einfaches Beispiel sind auch die Kurvenscharen

$$r = \frac{a}{\cos n\varphi} + c$$

oder

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{na \sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi},$$

bei denen sich um die singulären Punkte in leicht angebbarer Weise je n Sattelgebiete und geschlossene Knotengebiete anordnen, dazwischen aber $2n$ offene Knotengebiete. Für $n = 1$ erhält man Konchoïden.

Bendixson zeigt noch, daß jede Differentialgleichung, bei der X und Y analytische Funktionen sind, entweder so reduziert werden kann, daß X und Y mit Gliedern erster Ordnung beginnen, *vorausgesetzt, daß die gegebene Differentialgleichung überhaupt eine Bahnkurve besitzt, die im singulären Punkt mit bestimmter Tangente ankommt* oder aber durch weitere bilineare Substitutionen auf die Form

$$x^m y' = ay + bx + c + \mathfrak{P}(x, y).$$

3a. Asymptotische Darstellung von Integralen. [Vgl. II A 4a (*Painlevé*) Nr. 33, 37.] Auf Grund von Untersuchungen von *J. Horn*[12a])

12a) J. f. Math. 116 (1896), p. 265—306; 117 (1897), p. 104—128, 254—266;

und *A. Kneser*[12b]) seien die folgenden Sätze angeführt, welche die Darstellung der Integrale in der Nähe von Unbestimmtheitsstellen betreffen.

Die durch die Methode der Koeffizientenvergleichung gefundene Reihenentwicklung für die Lösung

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n x^n$$

der Differentialgleichung

$$x^2 y' = ay + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{22}y^2 + \cdots$$

ist im allgemeinen nur für $x = 0$ konvergent. Trotzdem gibt sie Aufschluß über das Verhalten der Lösungen y der Differentialgleichung bei der Annäherung an die Unbestimmtheitsstelle. Ist y ein beliebiges Integral, welches für limes $x = +0$ verschwindet, und setzt man

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + z_n x^n,$$

so ist nämlich

$$\text{limes}\, z_n = 0 \quad \text{für} \quad \text{limes}\, x = +0,$$

und es ist auch

$$\lim_{x=+0} \frac{d^n y}{dx^n} = n!\, C_n.$$

Ohne irgendeine Voraussetzung über analytische Entwickelbarkeit der Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x, y)$ zu machen, beweist *O. Perron* die folgenden[13]) beiden Sätze, welche die Ergebnisse von *Horn* über den Verlauf der reellen Integralkurven umfassen.

Es sei vorausgesetzt, daß $\varphi(x)$ für $0 \leqq x \leqq a$ stetig ist, ferner $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ für $0 < x \leqq a$ und

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^x \frac{dx}{\varphi(x)} = \infty,$$

ferner seien über die Funktion $f(x, y)$ folgende Annahmen gemacht: Sie soll für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden, im Gebiet $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$ stetig sein und einen endlichen Differenzenquotienten i. B. auf y haben,

---

118 (1897), p. 257—274; 119 (1898), p. 196—209, 267—290; 122 (1900), p. 73—83; 143 (1913), p. 212—240.

12b) J. f. Math. 116 (1896), p. 178—212; 117 (1897), p. 72—103; 120 (1899), p. 267—275. Vgl. II B 5 (*Hilb*) Nr. 5.

13) *O. Perron,* Beweis für die Existenz von Integralen einer gewissen Differentialgleichung 1. Ordnung in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle, Math. Ann. 75 (1914), p. 256—273.

mit *konstantem Vorzeichen*, so daß

$$0 < k < \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| < K.$$

Ist das Vorzeichen negativ, so gibt es ein und nur ein reelles Integral, welches für $x = +0$ dem Wert $y = 0$ zustrebt.

Ist das Vorzeichen dagegen positiv, so werden die sämtlichen von den Punkten $0 < x_0 \leqq a'$, $|y_0| \leqq b'$ eines gewissen Gebietes ausgehenden Integralkurven für $x = +0$ dem Nullpunkt $y = 0$ zustreben.

Endlich gilt noch der Satz, daß, wenn

$$\lim_{x=+0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$$

und die durch $f(x, y) = 0$ definierte Kurve im Nullpunkt eine von der y-Achse verschiedene Tangente hat, die genannten Integralkurven daselbst diese Kurve berühren.

Alle diese drei Sätze (den ersten mit Vertauschung von $-x$ und $+x$) erläutert die folgende Figur, in der die Integralkurven von

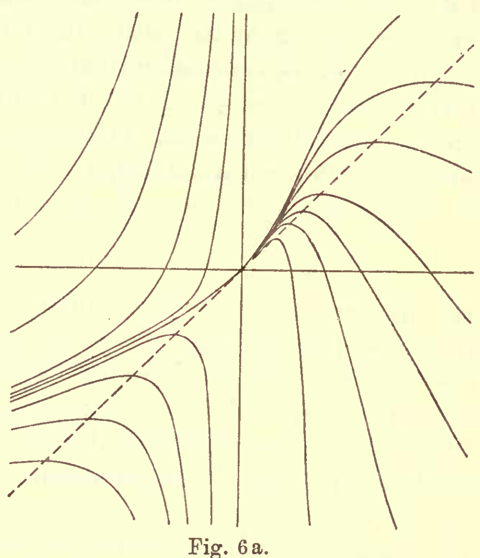


Fig. 6a.

$$x^2 y' = y - x$$

in der Umgebung des Nullpunktes gezeichnet sind.

4. Differentialgleichungen erster Ordnung höheren Grades. [Vgl. II A 4a (*Painlevé*) Nr. 24, 25, 28.] Aus den durch Differentialgleichungen von der Form

$$f(x, y, y') = 0$$

definierten Kurven hat *G. Loria*[14]) unter dem Namen *panalgebraische Kurven* eine Klasse ausgeschieden, bei denen f in y' vom Grade n ist, während die Koeffizienten Polynome $f_0, f_1, \ldots, f_n$ von x und y sind, deren Grad als *Rang* der panalgebraischen Kurve bezeichnet wird. Sie gehen durch Dualität und andere birationale Berührungstransformationen [III D 7 (*Liebmann*)] wieder in panalgebraische Kurven über, auch lassen sich eine Reihe von Sätzen beweisen, welche dem

14) *Loria-Schütte,* Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, (Leipzig 1902), p. 724—730

Gebiet der abzählenden Geometrie [III C 3 (*Zeuthen*)] angehören. Manche Eigenschaften spezieller panalgebraischer Kurven ergeben sich hier als besondere Fälle von einfach zu beweisenden Eigenschaften dieser Klasse. So ist z. B. der Satz von *C. Juel*[15]), daß die Normalen einer Epi- oder Hypozykloïde in den (abzählbar unendlich vielen) Punkten, in denen sie von den Strahlen eines linearen Büschels berührt wird, ihrerseits alle denselben Kegelschnitt berühren, nur ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes für panalgebraische Kurven, wobei an Stelle des Kegelschnitts andere algebraische Örter treten.

Die Diskussion der singulären Punkte knüpft an die von *Newton*[16]) herrührende Untersuchung des Verhaltens von algebraischen Kurven in singulären Punkten an. Soll etwa die Gestalt der Kurvenzweige, welche vom Koordinatenanfang ausgehen, festgestellt werden, wenn die in irreduzibler Form vorausgesetzte Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

mit Gliedern von mindestens zweiter Ordnung beginnt, so hat man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ξ, η diejenigen Punkte des Gitters der positiven ganzen Zahlen ($\xi = i$, $\eta = k$) zu markieren, die den in der Gleichung vorkommenden Gliedern $x^i y^k$ entsprechen. Durch Verbindung geeigneter Punkte unter den markierten Punkten ist dann eindeutig ein dem Nullpunkt ($\xi = 0$, $\eta = 0$) nächstliegender und ihm seine konvexe Seite zukehrender Polygonzug bestimmt. Greift man dann je eine Seite des Polygons heraus und setzt den betreffenden Ausschnitt aus der Kurvengleichung gleich Null, wobei ein etwa vorhandener gemeinsamer Faktor $x^\alpha y^\beta$ wegzulassen ist, so erhält man je eine Näherungskurve. Will man sie genauer bestimmen, so hat man schrittweise diejenigen Glieder von $f(x, y)$ hinzuzunehmen, deren Bildpunkte auf den folgenden äußeren Parallelen zur herausgegriffenen Polygonseite liegen.

Dieses Verfahren läßt sich nach *Briot* und *Bouquet*[17]) auf Differentialgleichungen erster Ordnung in der Weise übertragen, daß

15) Intermédiaire I (1894), p. 22 und 243; II (1895), p. 208.

16) Vgl. *M. Cantor,* Geschichte der Mathematik III, 2. Aufl. (Leipzig 1901), p. 107—108, ferner die Ausführungen über das *Newton*sche Parallelogramm bei *C. Reuschle,* Praxis der Kurvendiskussion (Stuttgart 1886), p. 6—25; *Clebsch-Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie I (Leipzig 1876), p. 319—340; vgl. auch II B 2 (*Wirtinger*) Nr. 2.

17) *Briot* et *Bouquet,* Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles J. éc. polyt. cah. 36 (1856), p. 162, 193; *V. Fine,* Am. J. 11 (1889), p. 302; *Forsyth,* Theory of differential equations II (Vol. II), Cambridge 1900, p. 91—96.

man im Zahlgitter die in der Gleichung vorkommenden Glieder

$$x^i (y')^k$$

auszeichnet ($\xi = i$, $\eta = k$), außerdem aber das Gewicht von y dem von xy' gleichsetzt. Z. B. ist dann der Punkt $\xi = 3$, $\eta = 4$ Träger von

$$x^3 (y')^4, \quad x^2 (y')^3 y, \quad x (y')^2 y^2, \quad y' y^3.$$

Jede Gerade des wie oben erhaltenen konvexen Polygonzuges gibt dann eine Näherungsdifferentialgleichung. Voraussetzung für die Gültigkeit des Verfahrens ist hier, daß y eine Entwicklung nach Potenzen von x zuläßt, z. B. versagt die Methode natürlich in einem Strudelpunkt.

Als Beispiel führen wir die Untersuchungen von *Dyck*[18]) an über die singulären Stellen einer Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0,$$

in denen die Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

erfüllt sind. Die Differentialgleichung kann in der Umgebung des singulären Punktes auf den Typus

$$y'^2 + 2cxy' + bx^2 + 2ay = 0$$

zurückgeführt werden. Die repräsentierenden Punkte liegen hier auf der Geraden

$$\xi + \eta - 2 = 0.$$

Die Gleichung kann dann durch Differentiation in

$$(cx + y') \frac{dy'}{dx} + bx + (a + c) y' = 0$$

übergeführt werden, und den drei Typen: Strudelpunkt, Sattelpunkt, Knotenpunkt dieser Differentialgleichung ersten Grades entsprechend erhält man charakteristische Bilder.[19]) Hierher gehören auch die singulären Punkte der Haupttangentenkurven [III D 3 (*von Lilienthal*) Nr. 36] einer Fläche in den singulären Stellen der parabolischen Kurve; alle drei Typen können in Punkten auftreten, wo die Fläche sich durchaus regulär verhält und eine ganz bestimmte Tangentialebene hat[20]).

---

18) *W. Dyck,* Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definierten Kurvensysteme, Münch. Ber. 21 (1891), p. 23—57; *A. Wahlgreen,* Stockholm. Ak. Bihang 28 Nr. 2 (1902).

19) Zeichnungen hierzu in *W. Dycks* Katalog Mathematischer Modelle (München 1892), p. 304.

20) *W. Dyck,* Fußnote 18, p. 51; *L. Roth,* Dissertation München 1914. — Die

Ebenso genügt bei

$$(a_0x + b_0y + \cdots)y'^2 + (a_1x + b_1y + \cdots)y' + a_2x + b_2y + \cdots = 0$$

in der Umgebung des Nullpunktes die Berücksichtigung der angeschriebenen Glieder, denn für sie ist $\xi = 1$, für alle anderen $\xi > 1$.

Für diese Differentialgleichungen hat *Picard*[21]) behauptet, daß die dem Nullpunkt sich unbegrenzt nähernden Bahnkurven daselbst mit bestimmter Tangentenrichtung ankommen. Dieser Satz bedarf aber einer Korrektur, die sich schon dann als notwendig erweist, wenn man die Glieder höherer Ordnung überhaupt nicht berücksichtigt. Für den Verlauf maßgebend ist einerseits die Diskriminantenkurve [Nr. 7], also hier das Geradenpaar

$$(a_1x + b_1y)^2 - (a_0x + b_0y)(a_2x + b_2y) \equiv (\alpha_1x + \beta_1y)(\alpha_2x + \beta_2y)$$
$$= g_1 \cdot g_2 = 0$$

und außerdem die durch

$$y = tx, \quad (a_0 + b_0t)t^2 + (a_1 + b_1t)t + a_2 + b_2t = 0$$

bestimmten drei Integralgeraden. Alle verschiedenen Fälle können hier gestaltlich vollkommen diskutiert werden, und es zeigt sich, daß der *Picard*sche Satz seine Geltung verliert, wenn eine der beiden *reellen* Geraden g_1 und g_2 mit der einzigen *reellen* Integralgeraden zusammenfällt. Ein ganz einfaches Beispiel hierfür ist

$$(y - x)y'^2 + y = 0$$

mit den Integralkurven

$$y = x \cdot \sin^2 t, \quad x = \frac{c}{1 - \sin t \cos t} e^{2u};$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right).$$

Sie berühren den Zweig $y = 0$ der Diskriminantenkurve, setzen auf den anderen Zweig $(y = x)$ mit Spitzen auf und nähern sich außer-

durch konische Knotenpunkte gehenden Haupttangentenkurven haben dort Knotengebiete (Nr. 3, p. 509), dagegen haben sie Spitzen in den Punkten der parabolischen Kurve, vorausgesetzt, daß diese nicht selbst Haupttangentenkurve ist. Dann ist sie zugleich Umhüllungskurve für die übrigen Haupttangentenkurven. Dies tritt im besondern ein, wenn die parabolische Kurve, wie z. B. beim Kreiswulst, aus ebenen Berührungskurven besteht. (Vgl. *F. Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 576 und Berlin Ber. 1870, p. 871—899, wiederabgedrukt in Math. Ann. 23 (1884), p. 579—586, wo die Haupttangentenkurven der Singularitätenfläche eines Linienkomplexes zweiten Grades [III C 10 (*Zindler*) Liniengeometrie] angegeben und gezeichnet sind); *A. Sucharda,* Modelle für die verschiedenen Typen konischer Knotenpunkte mit Angabe des Verlaufs der parabolischen Kurve und der Haupttangentenkurven, *Dyck*s Katalog (Fußnote 19), p. 299.

21) *Picard* III, p. 217—225; [II A 4 a (*Painlevé*) Nr. 31].

dem ($t = -\infty$) dem Nullpunkt unbegrenzt, ohne doch dort eine bestimmte Tangente zu besitzen.[22])

Für viele Singularitäten der Differentialgeometrie, z. B. die der Krümmungslinien in den Nabelpunkten einer Fläche [III D 1, 2 (*v. Mangoldt*) Nr. 35; III D 3 (*v. Lilienthal*) Nr. 39] gilt indessen der *Picard*sche Satz natürlich, weil die Diskriminantenkurve nicht reell ist.[23])

5. Anzahlbeziehungen für Singularitäten. Bei den Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades lassen sich die Singularitäten in einem Gebiet nach *Poincaré* abzählen durch die Formel[24])

$$N + F - C = J.$$

Hierin ist N die Anzahl der Knoten, F die der Strudel (und Wirbel), C die der Sattelpunkte in einem Gebiet, dessen Randkurve den Index J besitzt; d. h. J gibt den halben Überschuß der Zeichenwechsel bei Übergang von $Y : X$ von $+\infty$ zu $-\infty$ über die Zeichenwechsel bei Übergang von $-\infty$ zu $+\infty$ an, wenn man diesen Quotienten in seinem Wertverlauf längs des Randes verfolgt. Die Richtigkeit dieser Formel erkennt man leicht, indem man zunächst die einzelnen singulären Stellen in kleine Kurven einschließt, dann diese Kurven vereinigt, wobei nur der äußere Rand übrig bleibt, die gemeinsamen Grenzen aber für die Indexberechnung fortfallen, da sie zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufen werden. Ferner gilt für den Index eines singulären Punktes höherer Ordnung, d. h. für eine um

22) In der Dissertation von *J. Weigel*, Gestaltliche Verhältnisse der Integralkurven in der Nähe eines Doppelpunktes der Diskriminantenkurve (München 1911) (Halle 1912), werden alle Fälle besprochen und auch mit Zeichnungen belegt, darunter die hier erwähnte Ausnahme vom *Picard*schen Satz, nämlich

$$(ax + y)y'^2 + by = 0, \quad a > 0, \quad a^2 - 4b < 0.$$

Vgl. auch *W. Dyck*, Über den Verlauf der Integralkurven, einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung, Münch. Abh. 26 (1914), p. 40. Hier wird die homogene Differentialgleichung $f\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$ eingehend untersucht im Zusammenhang mit der Regelfläche $f\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0$, deren Schnitt mit der Ebene $x = 1$ als Leitkurve dient. Besonders zu erwähnen ist noch hieraus die Variation der Integralkurven mit den Konstanten der Differentialgleichung und ein Apparat zur mechanischen Integration (p. 41). Über die Änderung der Integralkurven bei Änderung eines Parameters der Differentialgleichung s. auch *W. Dyck*, München Ber. 22 (1892), p. 101—138.

23) Zeichnungen zum Verhalten von Krümmungslinien in Nabelpunkten hat *S. Finsterwalder* angefertigt, *Dyck*s Katalog (Fußnote 19), p. 302.

24) *Poincaré* I (Fußnote 2), Kap. 3 (p. 394—409); *Picard* III, p. 232—235.

diesen Punkt sich schließende Kurve nach *Bendixson*[25]) die Formel

$$n_f - c = 2J - 2,$$

wobei n_f die Anzahl der geschlossenen Knotenregionen, c die Anzahl der Sattelgebiete (Nr. 3) ist.

Beide Formeln ordnen sich der von *Dyck*[26]) gegebenen unter

$$2p_\infty^i - \sum(n-2)p_n^i = \sum(n-1)p_n^r + 2K_F.$$

Hierin deutet das Zeichen i Punkte im Innern an, r Punkte am Rand, der untere Index die Anzahl der Kurven, die von dem Punkte aus (ins Innere) verlaufen, das z. B. $p_0{}^r$ die Anzahl der Randpunkte mit äußerer Berührung $p_2{}^r$ die mit innerer Berührung, wo eine Kurve den Rand von innen berührt. K_F ist die *Kronecker*sche Charakteristik[27]) [vgl. I B 16 (*Netto*) Nr. 25; I B 3a (*Runge*) Nr. 7] des Gebietes, d. h. der Überschuß der Punkte im Innern des Gebietes $F(x, y) < 0$,

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 > 0,$$

über die Punkte

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 < 0,$$

oder die Charakteristik des Funktionensystems

$$F < 0, \quad F_x = 0, \quad F_y = 0.$$

Ebenso wird die linke Seite, die im speziellen

$$2p_\infty^i + 2p_i^0 - 2p_i^4 = 2[N + F - C]$$

ist, die doppelte Charakteristik von

$$F < 0, \quad X = 0, \quad Y = 0$$

und auf der rechten

$$\tfrac{1}{2}(p_2^r - p_0^r)$$

die Charakteristik von

$$F = 0, \quad X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad X\frac{\partial F}{\partial y} - Y\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Die Zahl K_F ist auch in Beziehung zu setzen mit dem Geschlecht (p) oder auch der Zusammenhangszahl (Z) des Gebietes [vgl. III A, B 3

25) Fußnote 11, p. 44.

26) *W. Dyck,* Beiträge zur Analysis Situs I, Math. Ann. 32 (1888), p. 501; ferner Münch. Ber. 1909, 15. Abhandlung, p. 6 und Fußnote 22, p. 47: vgl. auch die Abzählung der Kreuzungspunkte der Stromlinien in *Kleins* Schrift von 1881/82 (Fußnote 29), p. 39.

27) Darstellungen der *Kronecker*schen Charakteristikentheorie vgl. *Picard,* Traité d'analyse I (Paris 1897), p. 83—87; *H. Weber,* Lehrbuch der Algebra I (Braunschweig 1895), p. 285—295.

(*Dehn* und *Heegaard*)], nämlich bei unberandeten zweiseitigen Flächen
$$K_F = 3 - Z = 2 - 2p;$$
dagegen
$$K_F = 2 - Z$$
bei berandeten zweiseitigen Flächen, so daß z. B. für ein Kurvensystem auf der geschlossenen Kugel die Beziehung besteht
$$N + F - C = 2$$
und für den Kreiswulst (Torus)
$$N + F - C = 0.$$

Ein Kurvensystem, das durch eine Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades auf einem Ring definiert ist, braucht also überhaupt keine singulären Stellen zu besitzen.[28])

6. **Die Grenzzyklen** (nach *Poincaré*).[29]) Wesentlich für das Bild des Verlaufs der Bahnkurven, die durch eine Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades definiert sind, werden die zuweilen auftretenden isolierten geschlossenen Kurven, die *Grenzzyklen*, zu denen die benachbarten Bahnkurven von innen und außen asymptotisch verlaufen.

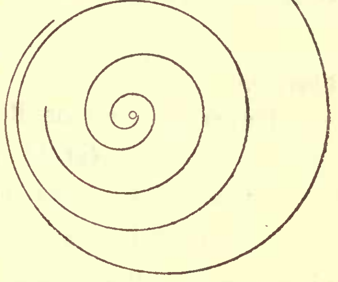


Fig. 7.

Jede geschlossene Bahnkurve (also auch jeder Grenzzykel) muß notwendig von einer reellen Kurve geschnitten werden, längs deren die Bedingung
$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$
erfüllt ist, so daß in gewissen Fällen die Nichtexistenz leicht nachgewiesen werden kann.

28) *Poincaré* III, Kap. 15 (p. 220—244).

29) *Poincaré* II, Kap. 5—9 (p. 261—296); *Picard* III, p. 248—251. Grenzzyklen treten auch bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, z. B. sind die Kehlkreise auf Rotationsflächen Grenzzyklen für zwei Scharen von geodätischen Linien [III D 3 (*von Lilienthal*) Nr. 15], ferner in der „natürlichen Geometrie" (vgl. *E. Cesaro,* Natürliche Geometrie, übersetzt von *G. Kowalewski*, Leipzig 1901, p. 19) und in der Elastizitätstheorie, bei der Untersuchung von Formen gebogener Stäbe (*W. Hess,* Math. Ann. 24 (1884), p. 209 und Figur 12). Unter den Bahnkurven einer stationären inkompressiblen zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung können sich Grenzzyklen nicht vorfinden, wie eine geometrische Überlegung zeigt. Hier gilt also der Satz, daß aus der Existenz einer geschlossenen Bahnkurve die Existenz von unendlich vielen benachbarten folgt. Von dieser Betrachtung hat *F. Klein* mehrfach Gebrauch gemacht, z. B. Math. Ann. 10 (1876), p. 366 und in seiner Schrift: Über *Riemanns* Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale (Leipzig 1882), p. 33, die auch zahlreiche Zeichnungen des Verlaufs in der Nähe von singulären Punkten enthält.

Ganz allgemein gelten diese Sätze:

Jeder von einem Punkt ausgehende Bahnzweig läuft entweder in sich zurück, oder er nähert sich einer geschlossenen Bahnkurve (Grenzzykel), oder er verläuft nach einem singulären Punkt hin.

Innerhalb und außerhalb eines Grenzzykels gibt es stets mindestens einen singulären Punkt.

Sind X und Y ganze rationale Funktionen, so ist die Anzahl der Grenzzyklen endlich, sobald keiner durch einen Sattelpunkt geht.

Es ist sehr leicht, Beispiele mit Grenzzyklen zu finden, z. B. ist für die durch

$$x + yy' = (xy' - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

gegebene Kurvenschar der Kreis

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

sicher ein Grenzzykel, wie die Einführung von Polarkoordinaten (ϱ, ω) zeigt, wodurch die Differentialgleichung in

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \varrho^2 - 1$$

übergeht.

Ferner sind in dem Beispiel

$$dy(xC - yD) - dx(yC + xD),$$

$$C = (x^2 + y^2 - r_1^2)\,(y^2 + y^2 - r_2^2) \ldots (x^2 + y^2 - r_n^2),$$

$$D = (x^2 + y^2 + r_1^2)\,(x^2 + y^2 + r_2^2) \ldots (x^2 + y^2 + r_n^2)$$

die durch $C = 0$ gegebenen Kreise sämtlich Grenzzyklen.

Dagegen fällt es sehr schwer, etwa vorhandene Grenzzyklen abzufangen, d. h. ringförmige Gebiete der Ebene anzugeben, innerhalb deren sicher ein Grenzzykel liegt.

Nach *Poincaré* hat man zu diesem Zweck topographische Horizontalkurvensysteme (Nr. 2) zu benützen, deren singuläre Stellen (Wirbel und Sättel) in die entsprechenden singulären Stellen (also Wirbel bzw. Strudel, Knoten und Sättel) der gegebenen Differentialgleichung fallen. Kennt man ein solches topographisches System von schleifenlosen geschlossenen *Querwegen* (cycles sans contact), dessen Individuen im Gegensatz zu eben solchen *Streifwegen* (cycles non sans contact) keine isolierten Berührungspunkte mit den Bahnkurven aufweisen, so ist ein isolierter geschlossener Querweg dieses Systems, der der Differentialgleichung genügt und keinen Doppelpunkt aufweist, selbstverständlich ein Grenzzykel. Ein solches System steht aber natürlich, außer in künstlich konstruierten Beispielen, nicht zur Verfügung.

Will man auf anderem Weg einen etwa vorhandenen Grenzzykel feststellen, der sich um einen Strudelpunkt schließt, so muß man

eine Kurvenschar
$$F(x, y) = c$$
kennen, die sich ebenfalls um den Punkt schließt und teils Streifwege, teils Querwege enthält. — Ein solches System aufzustellen dürfte übrigens für nicht künstlich konstruierte Beispiele ebenfalls auf große Schwierigkeiten stoßen.

Zwischen den beiden Querwegen $F = a$, $F = b$ kann man dann suchen und wenigstens eine der Anzahl der Grenzzyklen im Ringgebiet *modulo* 2 kongruente Zahl finden (λ). Man schneidet die Schar $F = c$ mit einem vom Strudelpunkt ausgehenden Kurvenzweig, etwa der positiven y-Achse, der zwischen den Querwegen a und b die Bahnkurven etwa in μ Punkten berührt, versieht ferner diese bei den Querwegen mit positivem oder negativem Zeichen, je nachdem in den Schnittpunkten mit der y-Achse das nach außen weisende Linienelement der hindurchgehenden Bahnkurven in das Gebiet des positiven oder negativen x zeigt, und setzt $\nu = 2$ oder $\nu = 1$, je nachdem die Querwege gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. Dann ist
$$\lambda \equiv \mu + \nu \pmod{2},$$
so daß für ungerades λ sicher ein Grenzzykel im Ringgebiet liegt.

Transformiert man ferner die gegebene Differentialgleichung durch eine im Ringbereich eineindeutige Transformation
$$\varphi(x, y) = \xi, \quad \psi(x, y) = \eta$$
in die Gestalt
$$\frac{d\xi}{d\eta} = \theta(\xi, \eta),$$
so zeigt eine dem *Rolle*schen Theorem, dem Satze nämlich, daß zwischen zwei Nullstellen von $f(x)$ eine ungerade Anzahl von Nullstellen von $f'(x)$ liegt, wenn f nicht unendlich wird, analoge Betrachtung, daß ein Ringgebiet nur dann *zwei* Grenzzyklen enthalten kann, wenn in ihm irgendwo
$$\theta = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0$$
wird. Durch Anwendung einer Reihe solcher Transformationen und der angegebenen Probe kann ein nur einen Grenzzykel enthaltendes Ringgebiet mehr und mehr verkleinert, d. h. festgelegt werden.[30])

Bei dynamischen und geodätischen Problemen ist die Aufsuchung geschlossener Bahnkurven viel weiter gefördert [vgl. Nr. 8—**11**].

30) Es sind später noch keine wesentlichen Schritte geschehen zur Lösung der von *D. Hilbert* (Math. Probleme, Gött. Nachr. 1900 und Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 225 u. a. ausgesprochenen Aufgabe, Maximalzahl und Lage der *Poincaré*schen Grenzzyklen zu bestimmen.

7. Theorie der singulären Lösungen von $f(x, y, y') = 0$. [Vgl. II A 4a (*Painlevé*) Nr. 20, 22.] Die an Unklarheiten meist zufolge unscharfer Definitionen und an heftigen Polemiken reiche Geschichte der Theorie der singulären Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung[31]) hat erst durch die Untersuchungen von *Hamburger*[32]) einen befriedigenden Abschluß erreicht. Auf seine Ergebnisse und auf erläuternde geometrische Deutungen im Raum wollen wir hier eingehen.

a) Eliminiert man bei einer in y' algebraischen Gleichung y' aus

$$f(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

so erhält man die Diskriminantenkurve

$$\Delta(x, y) = 0.$$

Ist $y = \eta(x)$ ein (analytischer) Zweig von ihr, für den α Werte von y' zusammenfallen, und soll auch noch η' längs eines Zweiges gleich dem genannten α-fachen Werte von y' werden, so muß die dritte Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

längs dieses Zweiges erfüllt sein. Von einem solchen singulären Linienelement gehen dann Bahnkurven aus, für welche die Reihenentwicklung gilt

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = g_0(x)\,(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1(x)\,(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \cdots.$$

Die Substitution

$$y = \eta(x) + u^\alpha$$

ergibt dann

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha \cdot u^{\alpha-1-\varkappa}}{g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \cdots}$$

und zeigt, daß zwei Fälle zu unterscheiden sind, zunächst

$$\alpha - 1 - \varkappa \geqq 0 \text{ (Typus I).}$$

Dann ist

$$u = 0, \text{ d. h. } y = \eta(x),$$

keine Lösung der Differentialgleichung, die Diskriminantenkurve wird

31) *S. Rothenberg,* Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variabeln Größen (Abh. z. Gesch. d. Math. 20, 3 (Leipzig 1908), p. 317—404) gibt ein Literaturverzeichnis von 119 Nummern.

32) *M. Hamburger,* Über die singulären Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, J. f. Math. 112 (1893), p. 205—246.

zur Enveloppe der von ihren Linienelementen ausgehenden (partikulären) Integralkurven und wird von ihnen in erster oder höherer Ordnung berührt[33]). —

$$\alpha - 1 - \varkappa < 0 \text{ (Typus II).}$$

Dann ist

$$u = 0, \quad y = \eta(x)$$

eine mehrfache Integralkurve (*Grenzkurve*), nicht mehr eine Einhüllende. Es mögen hier zwei bezeichnende Beispiele hierfür angegeben werden.

Die *Clairaut*sche Gleichung[34])

$$y - xy' + f(y') = 0$$

hat als allgemeines Integral bekanntlich die Geradenschar

$$y - xc + f(c) = 0,$$

als singuläres (vom Typus I) die Umhüllungskurve dieser Geraden. Daneben aber finden sich als singuläre Lösungen (Typus II) die Wendetangenten der Enveloppe[35]).

Ferner hat die Differentialgleichung der Krümmungskreise einer Kurve als singuläre Lösung (Typus I) natürlich die Kurve selbst, sie ist Schmiegungsenveloppe. Als singuläre Lösungen (Typus II) erweisen sich die vierpunktig berührenden Kreise[36]).

Da die drei Bedingungen, welche eine singuläre Lösung zu erfüllen hat, mag sie nun dem Typus I oder II angehören, im allgemeinen nicht längs einer Kurve erfüllt sind, so gibt es natürlich im allgemeinen keine singuläre Lösung.

b) Eine Differentialgleichung erster Ordnung n^{ten} Grades kann in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage $(x = a,\ y = b)$ durch eine Gleichung

$$F(x, y, c) = c^n + B_1 c^{n-1} + \cdots + B_n = 0$$

integriert werden, wobei die B_i analytische Funktionen von $(x - a)$ und $(y - b)$ sind[37]). Eliminiert man c aus

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0,$$

---

33) Über die Theorie der Enveloppen verschiedener Ordnung usw. vgl. III D 1, 2 (*von Mangoldt*) Nr. 21; ferner *von Lilienthal*, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1 (Leipzig 1908), Kap. 2, p. 66—106.

34) Über diese Differentialgleichung vgl. z. B. Fußnote 31 (*Rothenberg*), p. 327—334, II A 4 b (*Vessiot*) Nr. 9.

35) *W. Dyck*, Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung usw., München. Abh. 25, 4 (1910), p. 39.

36) *W. Dyck* (Fußnote 35), p. 42.

37) *Hamburger* (Fußnote 32), p. 227.

so ist die entstehende Diskriminantenkurve

$$D(x, y) = 0$$

Einhüllende der Kurvenschar, wenn nicht auch noch

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

erfüllt ist. Dann aber wird sie Ort der Doppelpunkte oder Spitzen, Selbstberührungspunkte usw.

Das *Paradoxon*[38]), daß im ersten Fall (Ausgangspunkt: Die Differentialgleichung) das Auftreten einer singulären Lösung als Ausnahme erscheint, im zweiten Fall (Ausgangspunkt: Die Gleichung für die Kurvenschar) als Regel, steht keineswegs vereinzelt da: „So hat eine Kurve, in Punktkoordinaten angesetzt, im allgemeinen keine Doppelpunkte. Wird dagegen eine Gleichung in Linienkoordinaten gegeben, so müssen die Koeffizienten eine gewisse Bedingung erfüllen, damit keine Doppelpunkte existieren". Ebenso liegen die Verhältnisse hier: „Die Existenz einer Enveloppe hängt in der Tat lediglich von der Natur des Kurvensystems ab und nicht von seiner Darstellung. Von der Darstellungsform hängt es nur ab, ob die Existenz oder Nichtexistenz einer Enveloppe als der allgemeinere Fall erscheint."

Zwischen den Diskriminanten $\Delta(f)$ und $D(F)$ bestehen nach *Hamburger* die folgenden Zusammenhänge. Es gibt eine Funktion $M(x, y)$, so daß

$$M \cdot f(x, y, y') = (-1)^n D \frac{dc_1}{dx} \cdot \frac{dc_2}{dx}, \cdots, \frac{dc_n}{dx}$$

hat. Hierin sind die c_i die n verschiedenen einem Punkt x, y zugeordneten Werte von c und

$$\frac{dc_i}{dx} = \frac{\partial c_i}{\partial x} + y' \frac{\partial c_i}{\partial y}.$$

Ferner ist

$$M^{n-2}\Delta = \prod \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{\partial F_k}{\partial y} - \frac{\partial F_k}{\partial x}\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)^2 = D' \cdot \psi^2,$$

wobei gesetzt ist

$$F_i = F(x, y, c_i), \quad F_k = F(x, y, c_k) \quad \text{und} \quad i \neq k = 1, 2, \cdots, n.$$

38) *Hamburger* (Fußnote 27), p. 208; *Rothenberg* (Fußnote 31), p. 370—372; *Picard* 3, p. 51. Ebenso könnte man es als Paradoxen bezeichnen, daß bei einer „Kurvenschar" $f(x, y) = c$ neben den Sattel- und Knotenpunkten nur Wirbel „im allgemeinen" auftreten (Nr. 2), bei einer Differentialgleichung $Xy' - Y = 0$ statt der Wirbel aber in der Regel nur Strudelpunkte (Nr. 3), oder daß bei $F(x, y, c) = 0$ „im allgemeinen" nur außerwesentlich singuläre Stellen, bei $f(x, y, y') = 0$ dagegen wesentlich singuläre Stellen auftreten; vgl. *Dyck* (Fußnote 18), p. 57.

Ein Beispiel, das gleichzeitig verschiedene Fälle illustriert, gibt *Dyck* mit der Hyperbelschar

$$F(x, y, c) = y(x + c) + c^2 = 0, \qquad D = y(4x - y)$$

oder

$$f(x, y, y') = x^2y'^2 + y(2x - y')y' + y^2 = 0, \quad \Delta = y^3(4x - y).$$

Hier ist die Gerade

$$4x - y = 0$$

Enveloppe (Typus I), die x-Achse Grenzkurve (Typus II), zugleich der Bestandteil des nur *einfach* zählenden Integrals[39])

$$xy = 0.$$

c) *Deutungen im Raum.* Deutet man $y' = z$ als dritte Koordinate im Raum, so gibt die Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

Aufschluß über das Paradoxon. Das Bild einer Kurve

$$x, y, z = y'$$

verläuft auf einem vertikalen Zylinder, dessen Spur die Kurve selbst ist.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

gibt dann die Kurve an, längs deren die Tangentialebene der Fläche zur z-Achse parallel ist, und dieser *Umriß* ist natürlich im allgemeinen nicht das räumliche Bild seines eigenen *Grundrisses* auf der xy-Ebene.[40])

Deutet man dagegen c als dritte Koordinate, so werden die partikulären Lösungen einfach auf Horizontalschnitte der Fläche $F = 0$ abgebildet, die Diskriminantenkurve D ist wieder die Umrißprojektion der Fläche und wird selbstverständlich von den Grundrissen der Horizontalschnitte, d. h. von den Integralkurven, berührt. Der Umriß kann selbst horizontal sein, und seine Projektion ist dann singuläre

39) *W. Dyck* (Fußnote 31), p. 32. Es ist nützlich, zwischen Integral und Lösung zu unterscheiden. Ein Integral, z. B. das dem Wert $c = 0$ entsprechende der Schar

$$xy = c,$$

kann in mehrere Lösungen zerfallen ($x = 0$, $y = 0$). — Das Beispiel zeigt, daß eine singuläre Lösung durchaus nicht Bestandteil eines doppeltzählenden Integrals zu sein braucht. Ferner aber braucht auch umgekehrt ein Zusammenfallen mehrerer Zweige einer Integralkurve keineswegs zu bedeuten, daß eine Grenzkurve (Typus II) vorliegt, worauf *Dyck* a. a. O., p. 35 aufmerksam macht.

40) Diese geometrische Deutung ist ausführlich dargestellt z. B. in *Lie-Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen I (Leipzig 1896), p. 191.

Lösung vom Typus II. Ist endlich längs einer Kurve

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial c} = 0,$$

so ist sie Doppelkurve oder Rückkehrkante der Fläche, aber im allgemeinen nicht Umrißlinie, daher ihre Horizontalprojektion nicht singuläre, vielmehr überhaupt keine Lösung. Ist sie horizontal, so ergibt sie wieder eine singuläre Lösung.

Bei dem oft besprochenen *Cauchy*schen Beispiel[41])

$$y - c(x - c)^2 = 0$$

ist die x-Achse einerseits ein Teil der Umrißprojektion, nämlich die Projektion von

$$y = 0, \; x = z$$

und insofern singuläre Lösung (Typus I), der andere Teil des Umrisses ist

$$x = 3z, \; y = z(x - z)^2 = \frac{4x^3}{27}$$

und ebenfalls singuläre Lösung (Typus I). Auf der andern Seite ist

$$y = 0, \; z = 0$$

einfach ein Horizontalschnitt und keine singuläre Lösung, es projiziert sich nur zufällig ein Teil des Umrisses auf diese Kurve.

8. **Das Bertrandsche Problem.**[42]) Nicht die Frage isolierter geschlossener Bahnkurven, und die Untersuchung, ob einzelne errechnete geschlossene Bahnkurven auch benachbarte besitzen, soll uns hier beschäftigen; der für die Astronomie wichtige Fall des Dreikörperproblems ist in VI 2, 12 (*Whittaker*) Nr. 5, 6 besprochen. Es soll vielmehr hier die Frage nach der Bestimmung einer Zentralkraft besprochen werden, auf Grund deren der bewegliche Punkt sich, wenn die Anfangswerte (Integrationskonstanten) in einem bestimmten Bereich liegen, not-

---

41) Über die Geschichte dieses Beispiels vgl. *Rothenberg* (Fußnote 31) p. 369; ferner *Stäckel,* München Ber. 1912, p. 511. Man findet es in den meisten Lehrbüchern, z. B. *Serret-Scheffers,* p. 131—134, wo aber die *Dyck*sche Unterscheidung (Fußnote 35, p. 36), die Angabe, daß hier die x-Achse als Übereinanderlagerung von singulärer und partikulärer Lösung aufzufassen ist, nicht aufgenommen wird.

42) Genaue Literaturangaben siehe IV 6 (*Stäckel*) Nr. 13, Anm. 156, 157. Es handelt sich eigentlich um *zwei* Probleme, einmal um die Frage nach ∞^3 geschlossenen Bahnkurven, dann aber um die Frage nach der Zentralkraft, unter deren Einwirkung ein Punkt einen Kegelschnitt beschreibt. Der Anziehungspunkt braucht hier also nicht mehr der Mittelpunkt oder ein Brennpunkt zu sein. Hier in den Zusammenhang gehört nur die erste Aufgabe.

wendig in einer geschlossenen Bahnkurve bewegt. (Vgl. IV 6 (*Stäckel*) Nr. **13**.) Wir folgen hier den Ausführungen von *Darboux*.[43])

Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ führt das Integral der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right) + V(r) = c$$

zusammen mit dem Flächensatz

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h$$

auf die Differentialgleichung

$$d\vartheta = \frac{dz}{\sqrt{-z^2 + A\varphi(z) + B}}.$$

Hierin ist

$$z = \frac{1}{r}, \quad V(r) = -\varphi(z),$$

und A und B sind Konstanten.

Sind dann α und β zwei aufeinanderfolgende Extreme, nämlich Minimum und Maximum von z, oder Aphel und Perihel, so verlangt die Aufgabe, daß das Integral

$$J = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}}{\sqrt{\Delta}}\,dz,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} z^2 & \varphi(z) & 1 \\ \alpha^2 & \varphi(\alpha) & 1 \\ \beta^2 & \varphi(\beta) & 1 \end{vmatrix}$$

mit π kommensurabel werden soll, unabhängig von α und β.

Setzt man dann

$$\alpha = a - \varepsilon, \quad \beta = a + \varepsilon,$$

so wird

$$\lim_{\varepsilon = 0}\left(\frac{J}{\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi' - a\varphi''}}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pi\sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi' - a\varphi''}} = \pi\Phi.$$

Hierin muß vor allem Φ von a unabhängig sein, und dies führt auf

$$\varphi(z) = Cz^m,$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2 - m}}.$$

Aus diesem ersten Ergebnis folgt bereits, daß die Anziehungskraft einer Potenz des Zentralabstandes proportional sein muß, außerdem aber,

43) Note XIV, p. 462—466 (Sur un problème relatif à la théorie des forces centrales) von *Despeyrous*, Cours de mécanique II (Paris 1886).

daß kleine Abweichungen der Anziehungskraft vom Newtonschen Gesetz ($m = 1 \pm \varepsilon$) bereits verhältnismäßig starke Abweichungen der Winkeldistanz zwischen Perihel und Aphel zur Folge haben, die von der Ordnung $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ sind.[44])

In zweiter Annäherung ergibt sich dann

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2-m}}\left\{1 + \frac{(m-1)(m+2)}{24}\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right\};$$

also muß notwendig entweder

$$m = -2,\quad V(r) = cr^2$$

oder

$$m = 1 \qquad V(r) = \frac{c}{r}$$

sein. Im ersten Fall ist die Anziehungskraft der Entfernung direkt proportional, im zweiten kommt man auf das *Newton*sche Gesetz.

Zu ganz ähnlichen Ergebnissen kommt man auch nach *Liebmann*[45]) für die nichteuklidischen Geometrien, und zwar entsprechen einander die Gesetze

Eukl. Geom.	Hyp. Geom.	Ell. Geom.
cr	$c \operatorname{sh} r : \operatorname{ch}^3 r$	$C \sin r : \cos^3 r$
cr^{-2}	$c : \operatorname{sh}^2 r$	$c : \sin^2 r.$

Das Ergebnis von *Bertrand* kann auch angewendet werden, um Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien (L-Linien) zu konstruieren,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2(U + c)$$

sind zugleich geodätische Linien auf den Flächen mit dem Bogenelement

$$ds = \sqrt{2(U+c)(dx^2+dy^2)}.$$

Insbesondere lassen sich Rotationsflächen mit dieser Eigenschaft angeben, die aber sämtlich mit Singularitäten behaftet sind.[46])

---

44) Vgl. IV 6 (*Stäckel*) Nr. 13, Anm. 47.

45) Leipzig Ber. 55 (1903), p. 146—153. Übrigens ist das zweite Bertrandsche Problem (Fußnote 42) für die nichteuklidische Geometrie noch nicht behandelt worden; ebensowenig ist die Lösung des ersten Problems für die i. F. besprochene Konstruktion von Flächen mit geschlossenen geodätischen Linien benützt worden. Auf der andern Seite hat gerade die Lösung des ersten Problems auch eine physikalische Bedeutung gewonnen. Vgl. *A. Byk*, Zur Theorie der elektrischen und chemischen Atomkräfte. Ann. d. Phys. (4) 42 (1913), p. 1417—1453.

46) *Darboux* II, p. 453.

9. Scharen von L-Kurven und G-Flächen. Die durch *Darboux*s Untersuchungen sehr nahe gelegte Frage nach Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen Linien (*L-Linien*) oder nach Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien (*G-Flächen*) ist durch neuere Arbeiten wesentlich weiter gefördert worden.

Als Flächen mit einzelnen Scharen von L-Linien drängen sich sofort die Rotationsflächen konstanten positiven Krümmungsmaßes auf, ebenso die regulären Schraubenflächen mit geschlossenem Meridianprofil; sie enthalten je eine L-Schar. Man kann den folgenden allgemeinen Ansatz machen[47])

$$\begin{aligned} x &= \varphi(v)P(u) + f(v)P_1(u) + l(v) \\ y &= \psi(v)P(u) + g(v)P_1(u) + m(v) \\ z &= \chi(v)P(u) + h(v)P_1(u) + n(v), \end{aligned}$$

worin P und P_1 periodische Funktionen mit derselben Periode sind und die übrigen neun Funktionen so zu bestimmen sind, daß die Parameterkurven auf der Fläche ein geodätisches Orthogonalsystem werden, im besonderen $v = c$ geodätische Linien. Trotz der großen Willkür, die dann noch für die Bestimmung der Fläche besteht, dürfte übrigens dieser Ansatz zumeist auf berandete Flächen führen.

Was noch die Schraubenflächen und Rotationsflächen betrifft, so zeigt sich, daß ein und dieselbe geschlossene Raumkurve doppelter Krümmung nicht zugleich auf zwei verschiedenen Schraubenflächen noch auf zwei verschiedenen Rotationsflächen noch auch gleichzeitig auf einer Rotations- und einer Schraubenfläche geodätische Linie sein kann.[48])

Auf Rotations-G-Flächen, d. h. auf Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, führt eine Betrachtung von *Darboux*.[49]) Sind

$$z = f(r), \qquad z = g(r)$$

die Gleichungen des Meridianbogens zu beiden Seiten des Äquators, d. h. des größten Parallelkreises R, so muß die Gleichung bestehen

$$\sqrt{1 + (f')^2} + \sqrt{1 + (g')^2} = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Die Zahl m muß dann rational sein und gibt die Anzahl der Um-

47) *O. Zoll*, Über Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen Linien. (Preisschrift und Dissertation, Göttingen 1901), p. 11.

48) *P. Funk*, Über Flächen mit einer Schar von kongruenten und geschlossenen geodätischen Linien. Math. Ann. 75 (1914), p. 425—427.

49) *Darboux* III, p. 2—9.

läufe um die Achse der Fläche an, welche die geodätische Linie machen muß, bis sie sich schließt. Bei einer *singularitätenfreien*[50]) G-Fläche muß dann, da in den Polen ($r = 0$) f' bzw. g' gleich Null ist, $m = 1$ werden. Es bleibt nun noch die von *Zoll*[51]) gelöste Aufgabe bestehen, f und g so zu bestimmen, daß die beiden Teile der Meridiankurve analytische Fortsetzungen voneinander sind. Dies gelingt zum Beispiel durch den Ansatz

$$\sqrt{1 + f'^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} + cr^2 \qquad (0 < c \leqq \tfrac{1}{2})$$

$$\sqrt{1 + g'^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} - cr^2.$$

Hier wird der analytische Zusammenhang beider Zweige am einfachsten nachgewiesen durch die Substitution

$$r = \cos\vartheta;$$

denn dann erhält man als zusammenfassende Gleichung

$$\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2 = \cos^2\vartheta(1 + 2c\sin\vartheta + c^2\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\vartheta),$$

und bei dieser Darstellung ist es bereits ohne Reihenentwickelung völlig klar, daß der eine Zweig $\left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ die analytische Fortsetzung des anderen $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq 0\right)$ wird.

Man kann also die Kugel ($c = 0$) stetig so transformieren, daß sie G-fläche bleibt.

Bei jeder Rotations-G-Fläche ist übrigens der Schmiegungskreis des Meridians im Äquator, d. h. im Punkt $z = 0$, $r = R$, der mit dem Radius R um den Koordinatenanfang beschriebene Kreis.

---

50) Rotationsflächen mit zweifach unendlich vielen geschlossenen geodätischen Linien sind leicht hiernach zu konstruieren, z. B. gehört die *J. Tannery*sche Fläche $16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2)$ hierher (Darboux Bull. (2) 16 (1892), p. 190 bis 192). Doch besitzen sie meist singuläre Linien. Über die Enveloppen der geodätischen Linien, besonders auf Rotationsflächen, vgl. *Braunmühl,* Math. Ann. 14 (1879), p. 557—566. *W. Quidde,* Über Gaußsche Kreise auf Rotationsflächen (Diss. Kiel 1905). Hieraus mögen die Sätze angeführt werden: die einzigen Rotationsflächen mit Äquatorebene, auf denen die Enveloppen sich periodisch wiederholen, sind gewisse Flächen konstanten positiven Krümmungsmaßes (p. 27). Die Enveloppen müssen eine gerade Anzahl von Spitzen haben, wenn die geodätischen Linien nicht alle geschlossen sind (p. 35). Vgl. a. III D 3 (von *Lilienthal*) Nr. 14 und *E. Zermelo,* Zur Theorie der kürzesten Linien. Jahresber. d. D. Math. Ver. 11 (1902), p. 184—187.

51) *Zoll,* (Fußnote 47), p. 37—38.

Wichtig sind auch noch die folgenden Eigenschaften der allgemeinen G-Flächen:

Auf G-Flächen besitzen alle geschlossenen geodätischen Linien dieselbe Länge L, auf G-Flächen positiver Krümmung $\leq 1 : a^2$ ist diese Länge $L \geqq 2\pi a$.[52]).

10. Die Untersuchungen von Hadamard. Geodätische Felder. *Hadamard*[53]) wendet einfache Maximumsbetrachtungen an, um qualitative Ergebnisse über den Verlauf der Bahnkurven gewisser dynamischer Probleme (Potentialbewegung auf Flächen) abzuleiten, wobei sich einige Sätze über geodätische Linien auf *Ovaloïden* (geschlossene Flächen positiver Krümmung) ergeben.

Betrachtet man die durch das System

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots x_n)$$

definierten Bahnkurven in R_n und ist V eine Funktion der x_i, die längs der Bahnkurve bei unbeschränkt wachsendem t endlich bleibt, so muß V entweder unendlich viele Maxima und Minima überschreiten oder einem Grenzwert zustreben. Daher ergibt sich unter der genauer gefaßten Voraussetzung, daß die X_i mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, V mit seinen Ableitungen bis zur dritten Ordnung endlich ist, daß die Bahnkurven die Mannigfaltigkeit

$$X(V) \equiv \sum X_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

unendlich oft schneiden, und zwar jedes der beiden Gebiete

$$X(V) = 0, \qquad X(X(V)) \lesseqgtr 0$$

oder aber sich dem Grenzgebiete

$$X(V) = 0, \qquad X(X(V)) = 0$$

asymptotisch nähern.

Wendet man diesen Satz für die Potentialbewegung auf einer Fläche an, und ist

$$T = U + h$$

52) Nach *Quidde* (Fußnote 50), p. 84, haben die Enveloppen der geodätischen Linien auf Rotations-G-Flächen übrigens stets eine gerade Anzahl von Spitzen.

53) I. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. J. de Math. (5) 3 (1897), p. 331—373. II. Les surfaces à courbures apposées et leurs lignes géodésiques. J. de Math. (5) 4 (1898), p. 24—73. Die zweite Arbeit ist ausführlich referiert III D 3 (*v. Lilienthal*) Nr. 15, so daß eine Wiederholung überflüssig erscheint, die erste a. a. O. und ferner VI 2, 12 (*Whittacker*) Nr. 8 nur kurz besprochen.

das Integral der lebendigen Kraft, so ergibt sich, daß unter entsprechenden Voraussetzungen die durch[54])

$$\Delta(U, V) + 2\frac{(U+h)J_v}{\Delta(V)} = 0$$
$$J_V = \Delta V \Delta_2 V - \tfrac{1}{2}\Delta(V, \Delta V)$$

auf der Fläche gegebene Kurve unendlich oft überschritten werden muß, oder aber die Bahnkurve nähert sich asymptotisch einer Linie $V = a$ oder endlich einem Punkt, der einer instabilen Gleichgewichtslage entspricht.

Durch Spezialisierung ($U = 0$) kann hieraus abgeleitet werden: *Auf jedem Ovaloïd wird jede geschlossene geodätische Linie unendlich oft von jeder anderen geodätischen Linie geschnitten, falls man sich letztere von einem Punkt durchlaufen denkt.*[54a])

Führt man nämlich ein geodätisches Orthogonalsystem u, v ein, in dem $u = 0$ die betrachtete L-Linie ist, $v = C$ die dazu senkrechten geodätischen Linien bedeutet, also[55])

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2 \qquad \left(c = 1, \frac{\partial c}{\partial u} = 0 \text{ für } u = 0\right)$$

das Quadrat des Bogenelementes, und setzt man $V = u$, so wird die Grenzlinie

$$J_u = \frac{\partial c}{\partial u} = 0, \quad \text{d. i. } u = 0,$$

unendlich oft überschritten.

Dann kann man aus

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 c}{\partial u^2} = -\frac{1}{R_1 R_2} < 0$$

folgern, daß u und $\frac{\partial c}{\partial u}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben und daß bei unbeschränkter Fortsetzung einer geodätischen Linie, längs deren doch $|u|$ immer Maxima und Minima aufweisen muß, das Minimum nur für $|u| = 0$ also in den Schnittpunkten mit der L-Linie eintreten kann. Doch ist diese Schlußweise nicht exakt[56]) und muß genauer ausgeführt werden.

---

54) Über die hier gebrauchten Differentialparameter III D 3 (*v. Lilienthal*) Nr. 8.

54a) Geschlossene geodätische Linien, die einander nicht schneiden, können hier also nicht auftreten.

55) Über diese Form für das Bogenelement III D 3 (*v. Lilienthal*) Nr. **15**, p. 142.

56) *Hadamard* I (Fußnote 53), p. 347.

Daß übrigens zwei L-Linien eines Ovaloïdes, die beide keinen Doppelpunkt besitzen, einander notwendig schneiden müssen, folgt schon aus dem *Gauß*schen Satz über die Winkelsumme im geodätischen n-Eck.[57]) Die sphärische Abbildung durch parallele Normalen auf die Kugel ist bei einem Ovaloïd eineindeutig, und zufolge des *Gauß*schen Satzes ist das sphärische Bild des Innern einer L-Linie oder eines „geodätischen Nullecks" dem Inhalt nach der halben Kugelfläche gleich, demnach müssen die sphärischen Bilder zweier L-Linien einander in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden, also gilt dies auch für die L-Linien selbst.

Hadamard stellt auch den Begriff des *Feldes (Domaine)* einer geodätischen Linie auf. Jede geodätische Linie ist durch einen Punkt (u, v) und eine Richtung w vollständig bestimmt. Es werden dann u, v, w als räumliche Koordinaten in einem R_3 gedeutet und als *Feld* die Gesamtheit der Punkte bezeichnet, welche das Bild einer geodätischen Linie im R_3 trifft oder denen sie beliebig nahe kommt. Diesem Feld von Linienelementen (u, v, w) entspricht auf der Fläche ein Punktfeld (u, v). Im allgemeinen sind die Felder wieder ∞^2 dreidimensionale Teilgebiete dieses R_3. Wenn alle Felder nur zweidimensional sind, so gibt es nur eine einfach unendliche Schar von Feldern, so daß demnach zu jedem Feld einfach unendlich viele geodätische Linien gehören.[58])

Typische Beispiele hierfür geben die Rotationsflächen positiver Krümmung ab, auf denen ja eine geodätische Linie zwischen zwei Parallelkreisen $r_1 = r_2 = a$ hin und her geht und jeden bestimmten dazwischen liegenden Parallelkreis (r) einmal unter dem Winkel $w(r)$, dann unter dem Winkel $\pi - w(r)$ schneidet. Ebenso werden auf den Flächen zweiten Grades die Felder bekanntlich durch Schnitte mit gewissen konfokalen Flächen abgeteilt.

Ein Beispiel von Flächen mit ∞^1 angebbaren Feldern sind die *Liouville*schen Flächen mit dem Bogenelement[59])

$$ds^2 = (U(u) - V(v))(du^2 + dv^2).$$

57) Vgl. die Fußnote 55 angeführte Stelle. Dies Schlußverfahren bei *Zoll*, Fußnote 47, p. 41 und bei *Hadamard* I, p. 354.

58) *Hadamard* I, p. 386.

59) Über die geodätischen Linien auf Flächen mit *Liouville*schem Bogenelement vgl. III D 3 (*v. Lilienthal*) Nr. 13 und *O. Staude,* Math. Ann. 29 (1887), p. 469—485. J. f. Math. 105 (1890), p. 298—328; *P. Stäckel,* Jahresber. d. D. Math. Ver. 9 (1901), p. 121—129. J. f. Math. 130 (1905), p. 89—112; *J. Hadamard,* Darboux Bull. (2) 35 (1911), p. 106. Über „Felder" bei allgemeineren dynamischen Problemen vgl. *P. Stäckel,* Math. Ann. 54 (1901), p. 87—90, sowie dessen Bemerkungen in der Zeitschrift J. Math. Phys. 57 (1909), p. 200. In engem Zusammenhange

Hier sind die geodätischen Linien gegeben durch

$$\int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{U-\varepsilon}} - \int_b^v \frac{V\,dv}{\sqrt{\varepsilon - V}} = t + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\varepsilon}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\varepsilon - V}} = t + x$$

$$\int_a^u \frac{du}{\sqrt{U-\varepsilon}} - \int_b^v \frac{dv}{\sqrt{\varepsilon - V}} = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\varepsilon}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\varepsilon - V}} = y,$$

und die Felder sind, was ihre Begrenzung i. B. auf u und v betrifft, gegeben durch Gleichungen der Form

$$a \leq u \leq A, \qquad b \leq v \leq B.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß U und V eindeutig, endlich und stetig sind, daß sie nirgends mit Zeichenwechsel verschwinden, daß $U - V$ beständig positiv und von Null verschieden ist, und endlich, daß

$$U - \varepsilon = (u-a)(A-u)f(u), \qquad \varepsilon - V = (v-b)(B-v)g(v)$$

gesetzt werden kann, wo $f(u)$ und $g(v)$ wieder eindeutige, endliche, stetige und wesentlich positive Funktionen sind.

Nach *Staude* werden in einem durch diese Forderungen definierten „zulässigen" Gebiet $\mathfrak{G}_\varepsilon$ u und v eindeutige, endliche, stetige und gerade Funktionen der Argumente x und y mit den Periodenpaaren

$$2w_{11} = 2\int_a^A \frac{U\,du}{\sqrt{U-\varepsilon}}, \qquad 2w_{12} = 2\int_b^B \frac{V\,dv}{\sqrt{\varepsilon - V}}$$

und

$$2w_{21} = 2\int_a^A \frac{du}{\sqrt{U-\varepsilon}}, \qquad 2w_{22} = 2\int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\varepsilon - V}}.$$

Ein Gebiet bleibt nach *Stäckel* auch dann noch zulässig, wenn $U - V$ in $\mathfrak{G}_\varepsilon$ ohne Zeichenwechsel verschwindet, was in den Eckpunkten eintritt. Legt man dann ε einen solchen zulässigen Wert bei, so liegt jede durch ihn und einen der unendlich vielen innerhalb von $\mathfrak{G}_\varepsilon$ liegenden Punkte $u_0 v_0$ bestimmte geodätische Linie ganz in dem Gebiet, und sie bedeckt das Gebiet überall dicht, wenn $q = w_{21} : w_{22}$ irrational ist, sie schließt sich, wenn q rational ist.

Ein Beispiel ist das Bogenelement[60])

$$ds^2 = (c^2 - m^2u^2 - n^2v^2)(du^2 + dv^2).$$

---

hiermit steht die neuerdings entwickelte Lehre von den quasiperiodischen Funktionen, vgl. *E. Esclangon,* Annales de l'Observatoire de Bordeaux (1904).

60) *A. Pfister,* Die geodätischen Linien einer Klasse von Flächen, deren

Hier sind die Gebiete (in der u, v-Ebene) die ∞^1 Rechtecke, deren Ecken auf der Ellipse

$$c^2 - m^2u^2 - n^2v^2 = 0$$

liegen und deren Seiten den Hauptachsen parallel sind. Die Bilder der zu einem Feld

$$-\alpha \leq u \leq \alpha, \qquad -\beta \leq v \leq \beta$$

gehörigen geodätischen Linien sind die *Lissajous*schen Kurven[61])

$$u = \alpha \sin(m\tau + \gamma), \qquad v = \beta \sin(n\tau + \delta).$$

11. L-Linien auf Ovaloïden (nach *Poincaré*). *Poincaré*[62]) hat die am Anfang von Nr. **10** besprochenen Untersuchungen von *Hadamard* wesentlich ergänzt und seine Aufmerksamkeit besonders den L-Linien zugewandt, die aber hier nicht wie in Nr. **9** als gegeben zu betrachten sind, vielmehr gesucht werden. Er weist zunächst für *Sphäroide,* d. h. für Flächen, die von der Kugel sehr wenig verschieden sind und bei denen das Quadrat des Bogenelementes durch

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2 + \mu(edu^2 + 2f du\, dv + g dv^2)$$

dargestellt wird, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von μ die Existenz einer *ungeraden* Anzahl von L-Linien nach, die für $\mu = 0$ in Hauptkreise der Kugel übergehen. Daß sich eine ungerade Anzahl ergibt, woraus dann die Existenz von *wenigstens einer* L-Linie folgt, darauf führt das Verfahren deshalb, weil es zurückkommt auf die Bestimmung der Extreme einer Funktion auf der Kugel, und zwar einer Funktion, die in gegenüberliegenden Punkten der Kugel denselben Wert hat. Für die Anzahl dieser Extreme $M = 2m$ (Minima und Maxima) und $C = 2c$ (Sattelpunkte, vgl. Nr. **3**) hat man aber nach Nr. **5**

$$2m + 2c = 4c + 2,$$

so daß (für $c = 0$) mindestens eine L-Linie sich ergibt. Die bei dieser Betrachtung vorläufig stattfindende Vernachlässigung höherer Potenzen von μ, so sagt *Poincaré,* könne durch Anwendung seiner in der „Mécanique céleste" entwickelten Methoden ausgeglichen werden.

Linienelement den *Liouville*schen Typus hat. Diss. Kiel 1904. Daselbst werden dann auch die Rotationsflächen besprochen, auf welche im Falle $m^2 = n^2$ die betreffenden Liouvilleschen Flächen abwickelbar sind. Vgl. auch *Despeyrous-Darboux* (Fußnote 43), p. 482.

61) *Loria-Schütte* (Fußnote 14), p. 403.

62) *H. Poincaré,* Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. Am. Math. Soc. Trans. 6 (1905), p. 237—274.

Durch das „Prinzip der analytischen Kontinuität“, wonach ein Sphäroïd und ein beliebiges analytisches Ovaloïd als Glieder einer Kette von Flächen

$$f(x, y, z, t) = 0$$

dargestellt werden können, ergibt sich dann allgemein die Existenz von mindestens einer L-Linie. Überhaupt gilt immer die Relation

$$S - J = 1,$$

worin S die Anzahl der stabilen und J die Anzahl der instabilen L-Linien ist.

Die Definition der Stabilität ergibt die folgende Betrachtung: Ist $u = 0$ eine L-Linie, ferner wie oben [Nr. **10**]

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2 \qquad \left(c = 1 + \frac{u^2}{2}\varphi(v)\ldots;\ \varphi(v) \text{ periodisch}\right)$$

das Quadrat des Bogenelementes, so bekommt man für die zu $u = 0$ unendlich benachbarten geodätischen Linien die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = \varphi(v) u,$$

wobei $-\varphi(v)$ das Krümmungsmaß längs der L-Linie, also eine überall negative periodische Funktion ist und die höheren Potenzen von u und seinen Differentialquotienten vernachlässigt sind, und als Lösung[63])

$$u = c_1 e^{\alpha v}\varphi_1(v) + c_2 e^{-\alpha v}\varphi_2(v),$$

wobei φ_1 und φ_2 dieselbe Periode wie $\varphi(v)$ besitzen. Die L-Linie heißt dann und nur dann stabil, wenn α rein imaginär ist. Auf dem Ellipsoid sind z. B. zwei von den drei Hauptschnitten stabile L-Linien, der dritte, die vier reellen Nabelpunkte enthaltende instabil.

Wenn der Parameter t in der betrachteten Flächenschar sich ändert, so können sich dabei L-Linien auch auflösen in geschlossene geodätische mit Doppelpunkt.

Noch durch ein elementares, aber genau wie eine Schlußweise von *Hadamard* (Nr. **10**, Fußnote 56) zunächst noch nicht bindendes

---

63) Fußnote 62 (p. 255). Über diese Lösungsform VI 2, 13 (*Whittaker*) Nr. 7 und *Poincaré,* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I (Paris 1892), p. 63—68 und II (Paris 1893), Kap. 17 (p. 228—280). Die Berechnung des „charakteristischen Exponenten“ α, der über Stabilität und Instabilität entscheidet, geschieht hier nicht, wie in Nr. **3** die Berechnung von λ und μ bei den Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades, einfach mit Hilfe einer unmittelbar gegebenen Gleichung zweiten Grades, sie setzt vielmehr die Kenntnis einer Lösung voraus, die in Form einer Reihentwickelung vorliegt, oder aber sie muß durch Nullsetzen einer unendlichen Determinante gewonnen werden, deren Diagonalglieder vom zweiten Grad in α sind (vgl. a. *Horn* p. 238—245).

und angegebener Ergänzungen bedürftiges Schlußverfahren kann die Existenz von mindestens einer L-Linie auf einem Ovaloid erbracht werden.

Will man den Umfang

$$U = \int ds$$

einer geschlossenen Kurve K $(u = 0)$ des Ovaloides zu einem Minimum machen bei gegebenem Inhalt

$$\int \frac{df}{R_1 R_2} = \Omega = 2\pi$$

des sphärischen Bildes des von K umschlossenen Gebietes, so muß

$$\delta U = \int \gamma \delta u ds \quad \text{und} \quad \delta \Omega = \int \frac{\delta u ds}{R_1 R_2}$$

gleichzeitig zu Null werden; dabei ist γ die geodätische Krümmung von K.

Hieraus folgt aber

$$\gamma = \frac{c}{R_1 R_2}$$

und weiter wegen

$$\int \gamma ds = \Omega - 2\pi = 0 \quad \text{und} \quad R_1 R_2 > 0$$

$$c = 0, \quad \text{also} \quad \gamma = 0,$$

d. h. die geschlossene Kurve ist eine L-Linie. *Poincaré* wendet eine von ihm als physikalisch bezeichnete Betrachtung an, um zu zeigen, daß die K-Kurve mit der geforderten Extremaleigenschaft nicht etwa eine Spitze hat, was ja seinen Schluß illusorisch machen würde.

12. Geodätische Linien auf Polyederflächen.[65]) Manche Verwandtschaft mit den geodätischen Linien auf gekrümmten Flächen zeigen die gebrochenen, aus geraden Strecken bestehenden Linienzüge auf Polyedern die man durch folgende Konstruktion erhält: man setze eine Gerade, die in einer Seitenfläche liegt und die Kante k trifft, in der Weise fort, daß ihre Fortsetzung bei der Umklappung der anstoßenden Seitenfläche, auf der sie liegt, in die Ebene der ersten als ungebrochener Zug erscheint. Bei Diedern, d. h. ebenen Polygonen, erhält man einfach die Bahn eines an den spiegelnden Seiten reflektierenden Strahles.[66])

64) Vgl. III D 3 (*v. Lilienthal*), Nr. 11—13.

65) *P. Stäckel*, Palermo Rend. 22 (1906), p. 141—151. *C. Rodenberg*, Palermo Rend. 23 (1906), p. 107—125 und Arch. Math. Phys. (3) 14 (1909), p. 223—231, 312—336; vgl. auch Lord *Kelvin*, Vorlesungen über Molekulardynamik, deutsch von *Weinstein*, Leipzig 1909, p. 424—431.

66) Die Seiten des Dreiecks der Höhenfußpunkte eines spitzwinkligen Drei-

Wälzt man ein Polyeder auf die Ebene ab durch Umkippen um die Reihe von Kanten, welche die geodätische Linie trifft, so entsteht eine *gerade Kette.* Sie heißt *einfach,* wenn es nur eine Achse gibt, die diese Kette von Polygonen nicht verläßt, oder aber *Streifenkette,* wenn es eine Schar übrigens notwendig zueinander paralleler Achsen gibt. Die beiden Grenzgeraden der Achsenschar können entweder berührend sein, d. h. durch mindestens eine Ecke des Polyeders gehen, oder asymptotisch, d. h. die untere Grenze Null des Abstandes an einer Ecke wird nie erreicht.

Reguläre, und zwar zueinander parallele geodätische Linien liefern die zwischen den beiden Grenzgeraden einer Streifenkette liegenden Achsen. Eine reguläre geodätische Linie kann nur dann geschlossen sein, wenn sie einer solchen Schar von parallelen Geodätischen angehört. Auf dem Würfel erhält man die geschlossenen geodätischen Linien leicht, die Tangente ihres Neigungswinkels gegen eine Kante ist eine rationale Zahl $p:q$, und sie gehört einer Parallelenschar von der Breite $(p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}$ an, die Länge ist ein rationales Vielfaches von $(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$. Auch auf den Polyedern, die lauter gleichseitige Dreiecke zu Seitenflächen haben, können die geschlossenen geodätischen Linien leicht konstruiert werden. Schwierig wird ihre Bestimmung aber, wenn die Abwälzung die Ebene nicht in so einfacher Weise überdeckt wie bei den besprochenen Beispielen. Für das reguläre Dodekaeder findet *Rodenberg* die folgende notwendige Bedingung: Führt man in der Ebene des Netzes ein schiefwinkliges Parallelkoordinatensystem ein, dessen x- und y-Achse einer Seite und einer Diagonale des Ausgangsfünfecks sind, so lautet die Gleichung sicher

$$y = px + q,$$

wobei p im Zahlkörper $a + b\sqrt{5}$ liegt.

Über die Ecken hinaus kann man eine singuläre geodätische Linie (s) in zwei Weisen fortsetzen. Entweder, man läßt nach *Stäckel* nur Fortsetzungen in die beiden anstoßenden Seitenflächen S_1 und S_2 zu, die mit S die in der Ecke E zusammenstoßenden Kanten k_1 und

ecks, geben eine solche geodätische Linie, die zugleich auch wirklich kürzeste Linie ist. *H. A. Schwarz,* Ges. Abh. (Berlin 1890), p. 344—345. Weitere Sätze über „Reflexionspolygone" im Dreieck bei *E. Czuber,* Wien Zeitschr. f. Realschulwesen 39 (1914), p. 48—66. Auch *Hadamard* hat Dieder, nämlich Polygone der hyperbolischen Geometrie mit Nullwinkeln als Beispiele seiner allgemeinen Untersuchungen (Fußnote 53, II) betrachtet als *„billard non-euclidien"* (Bordeaux Procès-verbaux 1897, p. 147—149). Vgl. ferner *W. Wirtinger,* Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 9 (1901), p. 130—131.

k_2 gemein haben. S_1 wird um k_1, S_2 um k_2 gedreht, und die in S_1' oder S_2' (nach der Umklappung) gelegene geradlinige Fortsetzung s, die aus 0, 1 oder 2 Teilen bestehen kann, gilt als wirkliche Fortsetzung.

Rodenberg dagegen denkt sich alle in E anstoßendenden Seitenflächen, sowohl von k_1 wie von k_2 her vollständig abgewälzt, wobei die Ebene um E herum unendlich oft überdeckt wird, wenn nicht gerade die Summe der Winkel, die hier zusammenstoßen, zu π in einem rationalen Verhältnis steht. Jede gerade Fortsetzung von s über die Ecke hinaus gibt dann eine Fortsetzung der singulären geodätischen Linie, so daß die Anzahl der Zweige, in die sich s spaltet, sogar abzählbar unendlich groß werden kann, jedenfalls aber die geodätische Linie nie enden kann in E, wie dies bei der vorigen Definition z. B. für die Diagonalen der Seitenflächen eines Würfels eintritt.

Zusatz zu Nr. 2 (März 1915). In einer demnächst in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft erscheinenden Arbeit „Zum Problem des Talwegs" gibt *R. Rothe* eine neue Definition: Tal- und Kammweg sind unter den „ausgezeichneten Lösungen" der Differentialgleichung

$$q\,dx - p\,dy \equiv \vartheta(x, y)\,dw = 0$$

der Falllinien zu suchen, d. h. sie müssen die Bedingungen

$$\vartheta(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$$

erfüllen. Außerdem muß es auf ihnen mindestens einen (im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen) „Mündungspunkt" geben, in den gewöhnliche Falllinien tangential einmünden. Das Vorzeichen von

$$T \equiv \frac{q^2 r - 2pqs + p^2 t}{p^2 + q^2}$$

entscheidet zwischen Talweg ($T > 0$) und Kammweg ($T < 0$). Für $T = 0$ oder $T = \infty$ können einseitige Tal- oder Kammwege auftreten.

(Abgeschlossen im Oktober 1914.)

III D 9. DREIFACH ORTHOGONALE FLÄCHENSYSTEME.

Von

ERICH SALKOWSKI

IN HANNOVER.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Lehrbücher.

L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale. 2. Aufl. 3 Bde. Pisa 1902—1909. Deutsche Übersetzung von *M. Lukat,* Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Aufl. 1910. (*Vorles.*)

G. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces. 4 Bde. Paris 1887—1896. (*Th. des surf.*)

G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2. Aufl. Paris 1910. (*Syst. orth.*)

Ch. Dupin, Développements de géométrie. Paris 1813. (*Dével. de géom.*)

C. Guichard, Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. Paris 1905.

Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris 1859.

Einleitung.

1. Geschichtlicher Überblick. Wenn drei Scharen von Flächen

$$f(x, y, z) = \varrho$$
$$f_1(x, y, z) = \varrho_1$$
$$f_2(x, y, z) = \varrho_2$$

sich so durchsetzen, daß jede Fläche der einen von allen Flächen der beiden anderen Scharen rechtwinklig geschnitten wird, so bilden sie ein dreifach orthogonales Flächensystem.[1]) Durch jeden Punkt P des Raumes (bzw. eines zweckmäßig begrenzten Raumteils) geht je eine Parameterfläche $\varrho =$ konst., $\varrho_1 =$ konst., $\varrho_2 =$ konst., und man kann

1) Der von *Dupin* (Dév. de géom., p. 239) dafür vorgeschlagene Name „orthotomisches System" hat sich nicht einzubürgern vermocht.

daher die entsprechenden Werte der Parameter als rechtwinklige krummlinige Koordinaten des Punktes P ansehen. Die einfachsten dieser Systeme sind seit altersher bekannt, die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten, die Polarkoordinaten, die Zylinderkoordinaten; ihnen wurde gleichzeitig durch *Dupin*[2]) und *Binet*[3]) das System der konfokalen Flächen zweiter Ordnung an die Seite gestellt. *Dupin* war es auch, der als erster allgemein die Frage der dreifach orthogonalen Systeme formulierte und mit Hilfe der von ihm weiter ausgebildeten Methoden *Monge*s auf das entschiedenste förderte; so verdanken wir schon ihm den die ganze Theorie beherrschenden Satz, daß die Parameterflächen sich wechselseitig in ihren Krümmungslinien schneiden.

Einen neuen Anstoß erhielt die Fragestellung von analytischer Seite. Es war schon *Leibnitz* bekannt und wurde seit *Euler* vielfach angewandt, daß analytische Operationen, insbesondere die Auswertung mehrfacher Integrale, sich unter Umständen durch eine Transformation der Veränderlichen wesentlich vereinfachen lassen. Dies kommt, geometrisch angesehen, darauf hinaus, an Stelle des ursprünglichen Koordinatensystems ein der Aufgabe zweckmäßiger angepaßtes System von krummlinigen Koordinaten einzuführen. Diese Erkenntnis veranlaßte *Lamé*[4]), sich bei Aufgaben der mathematischen Physik, die sich auf Flächen zweiter Ordnung beziehen, des von *Dupin* untersuchten konfokalen Flächensystems zu bedienen. Der glänzende Erfolg, mit dem er und *Jacobi*[5]) diese „elliptischen Koordinaten" anwenden konnten, befestigten *Lamé* in der Überzeugung, daß es für die Aufgaben der mathematischen Physik zunächst immer darauf ankommt, ihnen durch Einführung passender krummliniger Koordinaten eine kanonische Form zu geben. Diesem Bestreben, der mathematischen Physik ein möglichst vielseitig brauchbares Rüstzeug zu schmieden, verdanken wir die große Anzahl seiner Untersuchungen, die er dann (1859) in seinen Leçons sur les coordonnées curvilignes zu einem klassischen Lehrbuche zusammenfaßte. Mit ihrem Erscheinen endet die erste Entwickelungsperiode des Problems, die wesentlich von physikalischen Interessen beeinflußt war. Wenn auch wohl die mathematische Physik nicht den Nutzen aus der Theorie ziehen konnte, den *Lamé* erwartet hatte, so verdankt jedenfalls die Geometrie dieser

2) *Dupin,* Dév. de géom., p. 265.

3) *Binet,* J. de l'Éc. Pol. 9 (Cah. 16; 1813), p. 41.

4) *Lamé,* J. de Math. (1) 2 (1837), p. 147.

5) *Jacobi,* J. f. Math. 19 (1839), p. 309. Werke II, p. 57. Weitere Literatur zur Geschichte der elliptischen Koordinaten siehe III AB 7 (*E. Müller*), Nr. 12. p. 674.

Entwickelung die wichtigsten Erkenntnisse und neue Anregungen. Nicht nur wurden die Krümmungsverhältnisse der Flächen und ihrer Schnittkurven auf das genaueste untersucht, es ergaben sich auch mancherlei neue Fragestellungen, die zunächst rein physikalischer Natur, sich zu den ergiebigsten und reizvollsten geometrischen Problemen gestalten sollten. Dahin gehört z. B. die Frage nach den Flächen mit isothermen Krümmungslinien (Isothermflächen).

Trotz der zahlreichen Ergebnisse, die die Untersuchungen *Lamés* und seiner Schüler für die Theorie der allgemeinen dreifach orthogonalen Systeme zutage förderten, gelang es doch nur langsam, die Anzahl der Beispiele zu mehren. Selbst der Grad der Allgemeinheit des Problems wurde erst allmählich erkannt. Daß jede Fläche mindestens einem Orthogonalsystem angehört, war schon von *Dupin*[6]) ausgesprochen: man braucht zu ihr nur ihre Parallelflächen und die beiden Scharen der von ihren Normalen gebildeten abwickelbaren Flächen hinzuzunehmen. Die Annahme, daß jede Schar von ∞^1 Flächen durch zwei sie senkrecht schneidende Flächenscharen zu einem dreifach orthogonalen System ergänzt werden könne[7]), wurde von *Bouquet*[8]) als irrig nachgewiesen, indem er zeigte, daß für eine Flächenschar, deren Gleichung in der Form

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = \varrho$$

geschrieben werden kann, eine Differentialgleichung dritter Ordnung bestehen muß, wenn sie einem Orthogonalsystem angehören soll. Gerade die Bestimmung solcher einfach unendlicher Scharen, die sich durch zwei zugeordnete Flächenscharen zu einem dreifach orthogo-

6) *Dupin,* Dév. de géom. (1813), p. 256, 265, 287, 330. Diese von *Liouville* und *Lamé* [z. B. J. de Math. (1) 16 (1851), p. 6] als wohlbekannt benutzte Tatsache wurde von *Catalan,* Mém. cour. de l'Ac. de Belgique 32 (1863), p. 16, Bull. de l'Ac. de Belg. 26 (1868), p. 180, Brief an *Hermite* 24. 12. 1892, aufs neue gefunden. Dem gegenüber darf eine von *Darboux* [Ann. de l'Éc. Norm. (1) 2 (1865), p. 59] gemachte Bemerkung nicht mißverstanden werden. *Darboux* untersucht dort in Verallgemeinerung eines *Kummer*schen Satzes über Orthogonalsysteme in der Ebene [J. f. Math. 35 (1847), p. 5—12] die *irreduziblen* dreifach orthogonalen Flächensysteme, d. h. Orthogonalsysteme, die wie die konfokalen Flächen 2. Ordnung durch *eine* irreduzible Gleichung $f(x, y, z, \lambda) = 0$ dargestellt werden können. Er zeigt, daß ein jedes derartiges irreduzibles System konfokal sein muß. Eine jede Fläche des Systems enthält eine oder mehrere Minimalgeraden, deren Gesamtheit die Tangentenfläche einer Minimalkurve erzeugt, die das System umhüllt. Hieraus folgt, daß nur solche Flächen, auf denen isotrope Geraden liegen, einem irreduziblen dreifachen orthogonalen System angehören können.

7) *Chasles,* J. de l'Éc. Pol. 15 (Cah. 25; 1837), p. 313—315.

8) J. de Math. (1) 11 (1846), p. 446.

nalen System ergänzen lassen[9]), erwies sich als der Kernpunkt des Problems. Sie wurde von *Serret*[10]) auf die Lösung eines Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen sechster Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt, doch erst *Bonnet* und *Darboux* gelang es auf zwei ganz verschiedenen Wegen, die später näher zu kennzeichnen sind (vgl. Nr. 7 u. 8), die Aufgabe auf ihre einfachste analytische Form, auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen, zu bringen, eine Gleichung, die von *A. Cayley* zuerst explizit aufgestellt wurde.

Bei der Allgemeinheit der Aufgabe war es aussichtslos, die allgemeine Lösung zu suchen, und man beschränkte sich daher auf die Bestimmung von Partikularintegralen. Die physikalische Periode hatte da mancherlei Aufgaben hinterlassen, und die Untersuchungen von *W. Roberts*, *Moutard*, *Darboux* und *M. Lévy* vermehrten die Anzahl der bekannten Orthogonalsysteme beträchtlich. Auch der Gedanke, durch eine Transformation aus bekannten Systemen neue herzuleiten, wurde frühzeitig nutzbar gemacht. Aus der naheliegenden Erkenntnis, daß jede konforme Raumtransformation ein Orthogonalsystem in ein anderes transformiert, ergab sich für das vorliegende Problem die Bedeutung der von *Liouville* bemerkten Tatsache, daß die konformen Transformationen des Raumes durch Inversionen und Bewegungen erschöpft sind. Weiter führte eine von *Combescure* und *Darboux* angegebene Transformation, die zu jedem System die ihm durch parallele Normalen zugeordneten Systeme zu ermitteln gestattet, eine Methode durch die man in Verbindung mit Inversionen aus einem gegebenen System durch Quadraturen eine unbegrenzte Anzahl von neuen Systemen herleiten kann.

Weit über das Interesse einer Partikularlösung hinaus geht die Bedeutung der Orthogonalsysteme, die an die *Ribaucour*sche Theorie der Kreiskongruenzen anknüpfen und die als zyklische Systeme bezeichnet werden. Denn nicht nur sind diese durch ihre leicht zugänglichen Eigenschaften ausgezeichnet, nicht nur sind mit jedem Orthogonalsystem unendlich viele berührende zyklische Systeme verbunden, vor allem führt diese hochbedeutsame Theorie *Ribaucour*s auf eine große Anzahl von Problemstellungen, die für die Weiterentwickelung der Differentialgeometrie von richtunggebender Bedeutung geworden sind. An sie knüpfen die Forschungen *Guichard*s an, die uns lehren

9) Sie werden in der Literatur als „*Lamé*sche Scharen“ (familles de Lamé) bezeichnet.

10) J. de Math. (1) 12 (1847), p. 241.

die Theorie der Biegung der Flächen, der sphärischen Abbildung, der Orthogonalsysteme von einem und demselben Standpunkte zu überschauen als besondere Folgerungen einer allgemeinen Theorie der konjugierten Kurvensysteme und Kongruenzen im n-fach ausgedehnten Raum.

Nach einer anderen Richtung hin verallgemeinerte *Bianchi* die *Ribaucour*schen Ergebnisse. Konstruiert man um die Punkte einer Fläche F der konstanten negativen Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ in ihren Tangentialebenen die Kreise vom Radius R, so bilden diese eine Normalkongruenz, deren Orthogonalflächen alle dasselbe konstante Krümmungsmaß $-\frac{1}{R^2}$ besitzen und aus der gegebenen Fläche F durch Komplementärtransformation hervorgehen. Dieses bemerkenswerte System führte *Bianchi* auf die Frage nach allen *Lamé*schen Scharen, die aus lauter Flächen konstanter Krümmung bestehen, Untersuchungen, die ihn dazu führten, seine Transformationstheorie der pseudosphärischen Flächen auf *Lamé*sche Scharen auszudehnen.

Den Ausgangspunkt *Ribaucour*s bildeten kinematische Vorstellungen, wie sie im Anschluß an *Chasles* von *Mannheim* in die Flächentheorie eingeführt wurden, die er aber nicht wie seine Vorgänger ausschließlich geometrisch, sondern auch, mit Hilfe der von ihm entwickelten Methode der Perimorphie, analytisch zu fassen suchte. Mit der wachsenden Bedeutung der kinematischen Methoden für die Differentialgeometrie wandte sich auch in der Theorie der Orthogonalsysteme das Interesse solchen Fragestellungen zu, die der Bewegungslehre entspringen. Insbesondere war es die noch immer nicht ganz erledigte Frage nach den *Lamé*schen Familien, die aus einer Schar von kongruenten Flächen bestehen, die seit dem letzten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts durch zahlreiche Untersuchungen gefördert wurde.

I. Der Dupinsche Satz und die Laméschen Gleichungen.

2. Der Dupinsche Satz. Sind

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \varrho \\ f_1(x, y, z) &= \varrho_1 \qquad (1) \\ f_2(x, y, z) &= \varrho_2 \end{aligned}$$

die Gleichungen der *Lamé*schen Familien, die ein dreifach orthogonales System bilden, so genügen die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 dem System von Differentialgleichungen

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}&=0\\
\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y}+\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z}&=0\\
\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}+\frac{\partial \varrho}{\partial z}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}&=0.
\end{aligned}
$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich, daß die Gleichung

$$
(3) \qquad
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varrho}{\partial x}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, & dx\\
\frac{\partial \varrho}{\partial y}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}, & dy\\
\frac{\partial \varrho}{\partial z}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}, & dz
\end{vmatrix} = 0
$$

integrabel sein muß. Die Integrabilitätsbedingung läßt sich mit Hilfe der dritten Gleichung in der Form schreiben:

$$
(4) \qquad
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varrho}{\partial x}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial z}\\
\frac{\partial \varrho}{\partial y}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y\,\partial z}\\
\frac{\partial \varrho}{\partial z}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}, & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Diese Gleichung besagt, daß die Normalen der Fläche $\varrho =$ konst. längs einer Kurve

$$
(5) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}}
$$

eine abwickelbare Fläche beschreiben, d. h. daß die Kurve (5) auf $\varrho =$ konst. eine Krümmungslinie ist. Dies ist der *Dupin*sche Satz:

Die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems schneiden sich in ihren Krümmungslinien.[11]) Der Satz wurde von *Dupin* sowohl geo-

11) Der Satz gilt, wie die meisten Lehrsätze der Differentialgeometrie, nur für den regulären Fall, d. h. für die Umgebung eines Punktes, in der alle vorkommenden Funktionen endlich, stetig und eindeutig sind. Da die Betrachtung singulärer Fälle bisher nur in wenigen Ausnahmen durchgeführt werden konnte, gilt die gemachte Einschränkung auch für alles Folgende. Für den *Dupin*schen Satz gab *M. Fouché* [Nouv. Ann. (4) 7 (1907), p. 241] folgende genauere Formulierung: Wenn drei Flächen durch denselben Punkt gehen und sich gegenseitig längs eines endlichen Stückes ihrer Schnittkurven auf beiden Seiten des Schnittpunktes unter rechten Winkeln schneiden, und wenn der Punkt weder für eine der Flächen noch für eine der Schnittkurven ein singulärer Punkt ist, so berühren die Schnittkurven in dem gemeinsamen Punkte die Krümmungslinien jeder der drei Flächen.

metrisch[12]) als auch, unter Benutzung seiner Theorie der konjugierten Richtungen, analytisch[13]) hergeleitet. Seither ist eine große Anzahl verschiedenartiger Beweise geliefert worden, so von *Lamé*[14]); *O. Bonnet*[15]) zeigt, daß die geodätische Torsion der Schnittkurven verschwindet, ein Satz, der den inneren Grund der meisten späteren Beweise bildet[16]); *Ribaucour*[17]) erhält ihn aus der Bedingung dafür, daß die Normalen einer Fläche in den Punkten eines rechtwinkligen Kurvennetzes auf der Nachbarfläche wieder ein orthogonales Netz herausschneiden. Bemerkenswert sind auch die neueren vektoranalytischen Beweise von *Sommerfeld*[18]), der die Kinematik deformierbarer Körper heranzieht, von *Marcolongo*[19]) und *R. Rothe.*[20]) *Darboux*[21]) ergänzte den Satz durch seine Umkehrung: Werden zwei orthogonale Flächenscharen von einer dritten Schar von Flächen senkrecht geschnitten, so schneiden die Flächen der ersten Schar die Flächen der zweiten in Krümmungslinien.

3. Die Laméschen Gleichungen. Sieht man ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als rechtwinklige krummlinige Koordinaten des Raumes an, so werden die

---

12) *Dupin,* Développements, 4me mém. p. 239. Einen wesentlich durchsichtigeren Beweis gab neuerdings *M. Fouché,* Nouv. Ann. (4) 7 (1907), p. 241—248. Derselbe Gedanke liegt dem Beweise von *F. E. Edwardes,* Edinb. Math. Soc. Proc. 29 (1911), p. 41 zugrunde.

13) Développements, 5me mém., p. 268.

14) J. de l'Éc. Pol. 14 (Cah. 23; 1834), p. 225, Coord. curvilignes, p. 40.

15) J. de l'Éc. Pol. 19 (Cah. 32; 1848), p. 1.

16) Vgl. *Aoust,* Annali di Mat. (2) 2 (1868), p. 46; *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie (Leipzig 1901), p. 271.

17) J. de Math. (4) 7 (1891), p. 30.

18) Deutsche Math. Ver. 6 (1898), p. 123—128.

19) Ens. math. 14 (1912), p. 38.

20) Deutsche Math. Ver. 21 (1913), p. 264.

21) Thèse, Paris 1866; Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866) p. 110. Weitere im Text nicht erwähnte Beweise des *Dupin-Darboux*schen Satzes gaben *Hamilton,* Irish Acad. Proc. 6 (1853—54), p. 86; *A. Cayley,* Quarterly J. 12 (1873), p. 185, Paris C. R. 74 (1872), p. 1445, Coll. Math. Pap. VIII, p. 264, Coll. Math. Pap. IX, p. 84; *W. Thomson,* Cambridge and Dublin Math. J. 4 (1849), p. 62, auch in *Gregory,* Solid Geometry; *J. Bertrand,* Paris C. R. 17 (1843), p. 1277; *Lebesgue,* Nouv. Ann. d. Math. (1) 8 (1849), p. 382, (1) 10 (1851), p. 269; *Hesse,* Analytische Geometrie des Raumes, 1. Aufl., p. 362; *Doucet,* Nouv. Ann. (3) 3 (1884), p. 315; *Pellet,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14 (1896), p. 305; *H. Grassmann,* Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen, III. Teil, Progr. Latein. Hauptschule, Halle a. S. 1893; *H. Fehr,* Applications de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale, Thèse, Paris 1899, p. 94. Die Erweiterung des Satzes auf vier Veränderliche wurde zuerst von *F. Klein,* Gött. Nachr. 1871, p. 73 gegeben.

Richtungskosinus $X_i Y_i Z_i$ der Parameterlinien ϱ_i durch die Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{\partial x}{\partial \varrho_i} = H_i X_i,\quad \frac{\partial y}{\partial \varrho_i} = H_i Y_i,\quad \frac{\partial z}{\partial \varrho_i} = H_i Z_i \qquad (i = 0, 1, 2)$$

dargestellt, wobei in den Formeln hier wie in der Folge stets der Index $i = 0$ fortgelassen ist. Die Größen

$$(6)\qquad \frac{1}{H_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right)^2}$$

heißen die *Laméschen Differentialparameter erster Ordnung*[22]); mit ihrer Hilfe ergibt sich das Quadrat des Linienelements des Raumes in krummlinigen Koordinaten in der Form

$$ds^2 = H^2 d\varrho^2 + H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2.$$

Sie genügen den sechs grundlegenden Differentialgleichungen[23])

$$(7)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\\
\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varrho_2 \partial \varrho} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho} + \frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varrho \partial \varrho_1} &= \frac{1}{H}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}\frac{\partial H}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}.
\end{aligned}$$

$$(8)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{1}{H^2}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial H}{\partial \varrho_1} &= 0.
\end{aligned}$$

Von diesen sechs *Lamé*schen Gleichungen ist außer den drei ersten nur noch eine Gleichung des zweiten Systems zur Bestimmung der H_i notwendig und hinreichend.[24]) Sie sind nichts anderes als die Integrabilitätsbedingungen des Systems von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Richtungskosinus X_k, Y_k, Z_k der Koordinatenlinien genügen[25]):

$$(9)\qquad \frac{\partial U_k}{\partial \varrho_i} = \frac{U_i}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k},\quad \frac{\partial U_k}{\partial \varrho_l} = \frac{U_l}{H_k}\frac{\partial H_l}{\partial \varrho_k},\quad \frac{\partial U_k}{\partial \varrho_k} = -\frac{U_i}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i} - \frac{U_l}{H_l}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_l}.$$
$$(i \neq k \neq l.)$$

22) Nach *Lamés* Bezeichnung, J. de Math. (1) 5 (1840), p. 316; Coord. curvilignes, p. 6. Heute bezeichnet man meist das Quadrat dieses Ausdrucks als Differentialparameter.

23) *Lamé,* J. de Math. (1) 5 (1840), p. 328; Coord. curvilignes, p. 76—78.

24) *Ribaucour,* J. de Math. (4) 7 (1891), p. 34.

25) *Lamé,* J. de l'Éc. Pol. 14 (Cah. 23; 1834), p. 204—246; Coord. curvil., p. 74; *Darboux,* Syst. orth., p. 190.

Durch eine von *Darboux*[26]) angegebene Transformation

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i} \qquad (i, k = 0, 1, 2;\ i \neq k) \tag{10}$$

nehmen die Formeln (7), (8), (9) die bemerkenswert einfache Form an

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \tag{7'}$$

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \varrho_k} + \beta_{li}\beta_{lk} = 0. \qquad (i \neq k \neq l) \tag{8'}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} U_k, \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \varrho_i} = -\beta_{ki} U_k - \beta_{li} U_l. \tag{9'}$$

Es ist von Bedeutung, den geometrischen Gehalt der Integrabilitätsbedingungen (7), (8) hervortreten zu lassen. Die Größe $H_k d\varrho_k = ds_k$ bedeutet das Bogenelement der Parameterlinie ϱ_k, R_{ik} sei der Hauptkrümmungsradius der Fläche $\varrho_i =$ konst., der dem Bogenelement $H_k d\varrho_k$ entspricht; dann wird[27])

$$\begin{aligned} R_{01} &= -\frac{H_1}{\beta_{01}}, & R_{10} &= -\frac{H}{\beta_{10}}, & R_{20} &= -\frac{H}{\beta_{20}} \\ R_{02} &= -\frac{H_2}{\beta_{02}}, & R_{12} &= -\frac{H_2}{\beta_{12}}, & R_{21} &= -\frac{H_1}{\beta_{21}} \end{aligned} \tag{10'}$$

und die R_{ik} genügen einem System von partiellen Differentialgleichungen[28]), das den Gleichungen (7) und (8) gleichwertig ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{1}{R_{01}} &= \frac{1}{R_{21}}\left(\frac{1}{R_{01}} - \frac{1}{R_{02}}\right) & \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{1}{R_{10}} &= \frac{1}{R_{20}}\left(\frac{1}{R_{10}} - \frac{1}{R_{12}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{R_{02}}\left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{10}}\right) & \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{R_{21}} &= \frac{1}{R_{01}}\left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{20}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{R_{20}} &= \frac{1}{R_{10}}\left(\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{21}}\right) & \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{R_{02}} &= \frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}\right). \end{aligned} \tag{7''}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{R_{01}} + \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{R_{10}} &= \frac{1}{R_{01}^2} + \frac{1}{R_{10}^2} + \frac{1}{R_{20}R_{21}} \\ \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{R_{12}} + \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{1}{R_{21}} &= \frac{1}{R_{12}^2} + \frac{1}{R_{21}^2} + \frac{1}{R_{01}R_{02}} \\ \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{1}{R_{20}} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{R_{02}} &= \frac{1}{R_{20}^2} + \frac{1}{R_{02}^2} + \frac{1}{R_{10}R_{12}}. \end{aligned} \tag{8''}$$

Dabei bedeutet das Symbol $\frac{\partial}{\partial s_i}$ die Ableitung nach der Bogenlänge in der Richtung des Bogens $ds_i = H_i d\varrho_i$. Durch die Hauptkrümmungsradien der Parameterflächen lassen sich in einfacher Weise die Krümmungen und Torsionen der Schnittkurven ausdrücken.[28])

---

26) Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 115.

27) *Darboux,* Syst. orth., p. 190.

28) *Lamé,* J. de Math. (1) 5 (1840), p. 340; Coord. curvilignes p. 80; *Bonnet,* J de l'Éc. Pol. 19 (Cah. 32; 1848), p. 22; *Darboux,* Syst. orth., p. 192.

Die Größen H_i und β_{ik} haben eine bemerkenswerte kinematische Bedeutung. Betrachtet man die von drei Parametern abhängige Bewegung, die ein dreifach rechtwinkliges Dreikant in alle möglichen Lagen des Dreikants überführt, das in den Punkten eines dreifach orthogonalen Systems von den Flächennormalen gebildet wird, und bezeichnet man mit ξ_i, η_i, ζ_i bzw. p_i, q_i, r_i die Komponenten der Schiebung und Drehung der Bewegung, bei der ϱ_i allein veränderlich ist, so wird[29]):

$$
(11)\quad \begin{array}{lll}
\xi = H & \eta = 0 & \zeta = 0 \\
\xi_1 = 0 & \eta_1 = H_1 & \zeta_1 = 0 \\
\xi_2 = 0 & \eta_2 = 0 & \zeta_2 = H_2 \\
p = 0 & q = \beta_{20} & r = -\beta_{10} \\
p_1 = -\beta_{21} & q_1 = 0 & r_1 = \beta_{01} \\
p_2 = \beta_{12} & q_2 = -\beta_{02} & r_2 = 0.
\end{array}
$$

Will man auf dem durch die vorstehenden Formeln gekennzeichneten Wege das Problem der dreifach orthogonalen Systeme in Angriff nehmen, so stellen sich der Reihe nach folgende Aufgaben:

1. die Integration des Gleichungssystems (7′)(8′) für die Rotationskomponenten β_{ik},
2. die Lösung des Systems (9′) für die Richtungskosinus,
3. die Bestimmung des Translationskomponenten H_i durch Integration der Gleichungen (10).

Dann erhält man

4. infolge der Gleichungen (5) die Koordinaten x, y, z durch die Quadraturen

$$
(12)\quad \begin{aligned}
dx &= HXd\varrho + H_1 X_1 d\varrho_1 + H_2 X_2 d\varrho_2 \\
dy &= HYd\varrho + H_1 Y_1 d\varrho_1 + H_2 Y_2 d\varrho_2 \\
dz &= HZd\varrho + H_1 Z_1 d\varrho_1 + H_2 Z_2 d\varrho_2 .
\end{aligned}
$$

Die drei Koordinaten x, y, z, ebenso wie der Ausdruck $x^2 + y^2 + z^2$[30]), genügen dem System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$
(13)\quad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial u}{\partial \varrho_2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2 \partial \varrho} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\frac{\partial u}{\partial \varrho} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \varrho_1} &= \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} .
\end{aligned}
$$

Die wesentlichste Schwierigkeit besteht in der Integration des

29) *Beltrami*, Rend. Ist. Lomb. (2) 5 (1872), p. 974, Opere II, p. 426; *Ribaucour*, J. de Math. (4) 7 (1891), p. 32; *Darboux*, Syst. orth., p. 188.

30) *Lamé*, Paris C. R. 21 (1845), p. 112; *Darboux*, Théorie der surf. I, p. 212.

Gleichungssystems (7′)(8′) für die Drehungskomponenten β_{ik}. *Hoppe*[31]) sucht diese dadurch zu umgehen, daß er von einem gegebenen Orthogonalsystem auf der Kugel ausgeht, die Flächen aufsucht, die dieses als Bild der Krümmungslinien besitzen, und dann durch Variation der Konstanten daraus eine *Lamé*sche Flächenschar zu gewinnen. Das Verfahren muß indessen, außer in ganz besonderen Fällen, wie sie *Hoppe* durchführt, auf schwer überwindliche Schwierigkeiten stoßen, da ja gerade die zweckmäßige Variation des sphärischen Netzes die Lösung des Systems (7), (8) erfordert.

Darboux[32]) führt die Aufgabe auf die Bestimmung einer Funktion V zurück, die mit den β_{ik} durch die Gleichungen

$$(14) \qquad \beta_{01}\beta_{10} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \varrho_1}, \quad \beta_{12}\beta_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1\, \partial \varrho_2}, \quad \beta_{20}\beta_{02} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \varrho_2}$$

verbunden ist und die von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen abhängt. Die eine von ihnen, eine Gleichung 6. Ordnung, löst das Problem der konjugierten Systeme (Nr. 6), dazu tritt, hier in sehr verwickelter Form, die Orthogonalitätsbedingung (8′). Für den besonderen Fall, daß V nur von der Differenz der Parameter abhängt,

$$V = V(\varrho_1 - \varrho,\ \varrho_2 - \varrho)$$

ist das System lösbar und führt auf eine besondere *Lamé*sche Familie, die aus einer unveränderlichen Fläche durch Schiebung hervorgeht. (Vgl. Nr. 26.)

Durch eine von *Darboux*[33]) angegebene Abänderung des Verfahrens kann man die Quadraturen (12) vermeiden. Hat man die β_{ik} gefunden, so ergeben sich die Abstände der Berührungsebenen an die Parameterflächen $\varrho_i =$ konst. vom Anfangspunkt:

$$(15) \qquad P_i = X_i x + Y_i y + Z_i z$$

durch die Gleichungen

$$(16) \qquad \frac{\partial P_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} P_k,$$

die sich nur durch die Bezeichnung von den Gleichungen (9′) unterscheiden. Kann man also dieses System integrieren, so hat man dadurch schon, durch Auflösung der Gleichungen (15) nach x, y, z, die

31) Arch. Math. Phys. (1) 55 (1873), p. 362, 56 (1874), p. 250, 57 (1875), p. 255, 366, 58 (1876), p. 37.

32) Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 117; Th. des surf. IV, p. 273; Syst orth., p. 363.

33) Syst. orth., p. 379.

kartesischen Koordinaten explizit dargestellt. Dabei werden auch die Schiebungsgrößen

$$(17)\qquad H_i = \frac{\partial P_i}{\partial \varrho_i} + \beta_{ki} P_k + \beta_{li} P_l = \frac{1}{2P_i}\frac{\partial}{\partial \varrho_i}(P^2 + P_1^2 + P_2^2)$$

ohne weitere Integration gewonnen.

4. **Die Inversion.** An die *Lamé*schen Gleichungen schließt sich unmittelbar die Frage nach den konformen Transformationen des Raumes. Offenbar wird durch eine solche ein dreifach orthogonales System wieder in ein Orthogonalsystem übergehen. Es seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes im ursprünglichen Raum, x_1, y_1, z_1 die des entsprechenden Punktes im transformierten Raum; ist nun die Abbildung winkeltreu, so muß

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2)$$

sein, d. h. die Koordinatenebenen $x = \varrho =$ konst., $y = \varrho_1 =$ konst., $z = \varrho_2 =$ konst. werden in die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems transformiert, dessen *Lamé*sche Differentialparameter

$$H = H_1 = H_2 = \lambda$$

sind. Aus dem System der Differentialgleichungen (7), (8) folgt aber leicht, daß entweder $\lambda =$ konst. sein muß, d. h. die Transformation eine Ähnlichkeit ist oder diese — bei passender Wahl des Koordinatenanfangs — durch Gleichungen von der Form

$$(18)\qquad x_1 = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2},\quad y_1 = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2},\quad z_1 = \frac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

dargestellt werden kann, also durch Inversion bezüglich der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

erhalten wird.[34])

34) Die Transformation durch reziproke Radien (18) (vgl. auch III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*), p. 59, insbesondere Fußnote 145) wurde von *W. Thomson*, J. de Math. (1) 10 (1845), p. 364 angewandt und von *Liouville*, J. de Math. (1) 12 (1847), p. 265 eingehend studiert. Letzterer zeigte zuerst, daß sie neben der Ähnlichkeit die einzige konforme Raumtransformation ist. *Liouville,* Note VI zur 5. Aufl. von *Monges* Applications de l'Analyse à la Géométrie, Paris 1855, J. de Math. (1) 13 (1848), p. 220, (1) 15 (1850), p. 103; *Hâton de la Goupillière*, J. de l'Éc. Polyt. 25 (Cahier 42, 1867), p. 188; *J. Cl. Maxwell,* Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 117, Scient. Pap. II, p. 297; *K. von der Mühll,* Verh. Naturf. Ges. Basel 16 (1903), p. 158; *E. Goursat,* Ann. de l'Ec. Norm. (3) 6 (1889), p. 11; *Tait,* Edinb. R. Soc. Proc. 1892, Scient. Pap. II, p. 329; geometrische Beweise von *Capelli,* Annali di Mat. (2) 14 (1887), p. 227 und *Darboux*, Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 34. Das Problem deckt sich mit der Aufgabe, alle Punkttransformationen zu bestimmen, die die Differentialgleichung der Krümmungslinien invariant lassen. Die *Berührungs*transformationen, denen dieselbe Eigenschaft zukommt, sind von *S. Lie* [Leipz. Ber. 41 (1889), p. 152] bestimmt worden. Es

Als ein Problem der konformen Geometrie läßt sich die Theorie der dreifach orthogonalen Systeme zweckmäßig mit den Hilfsmitteln der Kugelgeometrie behandeln. Bezieht man die Punkte des Raumes auf *Lie*sche Fünfkugelkoordinaten $x_1 \ldots x_5$ (vgl. III AB 7 (*E. Müller*) Nr. 24), so werden die *Lamé*schen Gleichungen (13), denen die rechtwinkligen Koordinaten genügen, durch ein System

$$(13\text{a})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} &= m \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + n \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} + p \vartheta \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_2 \partial \varrho} &= m_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} + n_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} + p_1 \vartheta \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho \partial \varrho_1} &= m_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} + n_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + p_2 \vartheta \end{aligned}$$

ersetzt, denen $x_1 \ldots x_5$ zu genügen haben. Umgekehrt können fünf beliebige Lösungen eines Systems dieser Form, zwischen denen die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$$

besteht, als Kugelkoordinaten eines Punktes eines dreifach orthogonalen Systems aufgefaßt werden.[35])

5. **Die Paralleltransformation.** Ein dreifach orthogonales System S ist bis auf seine Lage im Raume eindeutig bestimmt, wenn die zugehörigen *Lamé*schen Differentialparameter H, H_1, H_2 bekannt sind. Dagegen gibt es unendlich viele Systeme, die denselben Rotationskomponenten β_{ik} entsprechen; durch diese sind mittels der Gleichungen (9′) die Richtungskosinus der Normalen und damit das sphärische Bild bestimmt. Alle zu demselben System der β_{ik} gehörigen Orthogonalsysteme besitzen demnach dasselbe sphärische Bild, d. h. sie sind sich punktweis so zugeordnet, daß die Parameterkurven sich entsprechen und entsprechende Tangentialebenen parallel sind. Man nennt sie daher „parallele Systeme“. Die Aufgabe, die zu einem System parallelen Systeme zu finden, ist zuerst von *Combescure*[36]) gelöst

---

sind die allgemeinen linearen Transformationen der homogenen Kugelkoordinaten, die die quadratische Relation zwischen diesen Koordinaten invariant lassen. Vgl. *Darboux,* Syst. orth., p. 62.

35) *Darboux,* Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 297, Théorie des surf. I, p. 222; ferner *C. Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 20 (1903), p. 190 ff., *P. Calapso,* Palermo Rend. 22 (1906), p. 197, 23 (1907), p. 289. *Demoulin,* Paris C. R. 140 (1905), p. 1526, 141 (1905), p. 302, 496, 1210, 148 (1909), p. 269, 150 (1910), p. 25, 156, 151 (1910), p. 151, 587, 796.

36) Ann. de l'Éc. Norm. (1) 4 (1867), p. 93—131. Nach ihm wird die Bestimmung der zu einem gegebenen System parallelen Orthogonalsysteme als „*Combescure*sche Transformation“ bezeichnet. Etwas später [Paris C. R. 67 (1868), p. 1101] fand *Darboux* dieselbe Transformation und wandte sie zur Aufstellung,

worden. Sie besteht im wesentlichen in der Integration des Gleichungssystems (10) für H, H_1, H_2; diese erfordert zunächst die Bestimmung von H aus dem System

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varrho_i \partial \varrho_k} = \frac{\beta_{ik}\beta_{kl}}{\beta_{il}}\frac{\partial H}{\partial \varrho_i} + \frac{\beta_{ki}\beta_{il}}{\beta_{kl}}\frac{\partial H}{\partial \varrho_k} \qquad (i \neq k \neq l); \tag{19}$$

aus jeder Partikularlösung H desselben findet man die entsprechenden Werte von H_1 und H_2 ohne weitere Integration:

$$H_1 = \frac{1}{\beta_{10}}\frac{\partial H}{\partial \varrho}, \quad H_2 = \frac{1}{\beta_{20}}\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}, \tag{20}$$

worauf sich durch die Quadraturen (12) die Gleichungen der Koordinaten ergeben.

Entsprechend der allgemeinen Lösung des Systems (19) gibt es zu jedem Orthogonalsystem unendlich viele parallele Systeme, die von drei willkürlichen Funktionen je eines Parameters abhängen.

Von Vorteil ist vielfach eine andere Anordnung des Verfahrens, die von *Darboux*[37]) angegeben wurde. Bedeutet Ω eine beliebige Lösung des *Lamé*schen Gleichungssystems (13), dem die drei Koordinaten genügen, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen

$$x_1 \frac{\partial x}{\partial \varrho_i} + y_1 \frac{\partial y}{\partial \varrho_i} + z_1 \frac{\partial z}{\partial \varrho_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i} \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{21}$$

d. h. durch die Formeln

$$\begin{gathered} x_1 = \Delta(x, \Omega), \quad y_1 = \Delta(y, \Omega), \quad z_1 = \Delta(z, \Omega) \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \Delta(\Omega) \end{gathered} \tag{22}$$

ein Orthogonalsystem S_1, das dem gegebenen parallel zugeordnet ist.[38]) Dabei ist

$$\begin{gathered} \Delta\varphi = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2}\right)^2 \\ \Delta(\varphi, \psi) = \frac{1}{H^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho_2} \end{gathered} \tag{23}$$

der Parallelsysteme der elliptischen Koordinaten an. Die Parallelsysteme der drei Kugelscharen, die sich in einem Punkte rechtwinklig schneiden, s. *Darboux*, Th. des surf. IV, p. 291. Vgl. auch *Lie*, Gött. Nachr. (1871), p. 535, Vidensk. Selsk. Skr. (1899), Nr. 9; *A. Ribaucour*, Paris C. R. 67 (1868), p. 1334; *Enneper*, Math. Ann. 7 (1874), p. 458. Die Ausdehnung auf den R_n gibt *U. Sbrana*, Palermo Rend. 21 (1906), p. 1.

37) Th. des surf. IV, p. 288.

38) Diese Darstellung entspricht der in Nr. 3 durch die Formeln (15) gegebenen. In der Tat ist für das transformierte System $P_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i}$ zu setzen.

gesetzt, und die transformierten Größen H', H_1', H_2' sind explizit gegeben:

$$(24) \qquad H_i' = H_i \frac{\frac{\partial \Delta \Omega}{\partial \varrho_i}}{2 \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i}}.$$

Von Wichtigkeit ist, daß eine jede Lösung Ω der Gleichungen (13) sofort eine Lösung

$$(25) \qquad \Omega_1 = \frac{\Omega}{x^2 + y^2 + z^2}$$

des Gleichungssystems ergibt, das dem aus dem gegebenen durch Inversion hervorgehenden Orthogonalsystem entspricht[39]), daß ferner die allgemeine Lösung der zu dem aus S durch Paralleltransformation erzeugten System S_1 gehörenden Differentialgleichungen (13) sich aus Ω durch eine Quadratur

$$(26) \qquad \Omega' = \tfrac{1}{2} \int \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i} \frac{\frac{\partial \Delta \Omega_1}{\partial \varrho_i}}{\frac{\partial \Omega_i}{\partial \varrho_i}} d\varrho_i \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ergibt. Darin bedeutet Ω_1 die Lösung des Systems (13), die die Paralleltransformation mit Hilfe der Gleichungen (22) vermittelte, Ω_1 eine beliebige zweite Lösung derselben Gleichungen.

Diese Bemerkungen führen auf ein Verfahren, aus einem beliebigen Orthogonalsystem S eine unbegrenzte Reihe neuer Systeme herzuleiten, sobald man die allgemeine Lösung der *Lamé*schen Gleichungen (13), die zu S gehören, kennt. Man geht von S zu einem Parallelsystem S^1 über und findet die allgemeine Lösung des diesem entsprechenden Systems (13) durch die Quadratur (26); sodann geht man von S^1 zu einem inversen über und wendet auf diese die Paralleltransformation an. Schreitet man in dieser Weise fort, indem man die Paralleltransformation im Wechsel mit der Inversion benutzt, so erhält man durch bloße Quadraturen immer neue Systeme, in deren Gleichungen willkürliche Funktionen eingehen. Diese Methode ist das mächtigste bisher bekannte Hilfsmittel zur Bestimmung dreifach orthogonaler Systeme[40]); sie schließt als besonderen Fall eine von *Ribaucour*[41]) angegebene Transformation ein.

6. Die dreifach konjugierten Systeme. Die Anwendung der Paralleltransformation ist nicht auf dreifach orthogonale Systeme beschränkt; sie ist vielmehr auf das engste verknüpft mit der Theorie der konjugierten Kurvenscharen und Kongruenzen, wie sie sich in den letzten

39) *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 293.

40) *Darboux,* Syst. orth., p. 393.

41) Bull. de la Soc. Philom. (1869), p. 26; *Darboux,* Syst. orth., p. 398.

Jahrzehnten als das geometrische Bild der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelt hat.[42])

Um zunächst den einfacheren Fall zweidimensionaler Gebilde zu erledigen, fragen wir nach den Kurvennetzen auf einer Fläche, die einer Paralleltransformation unterworfen werden können. Die Kurven des Netzes seien als Parameterkurven u, v gewählt, x, y, z die Koordinaten der Punkte des Netzes und x_1, y_1, z_1 die der Punkte des parallel zugeordneten Netzes; dann müssen die Gleichungen bestehen

$$(27) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}$$

und entsprechende für die übrigen Koordinaten. Diese Gleichungen lassen sich stets erfüllen, wenn $\lambda = \mu =$ konst. gewählt wird, d. h. es gibt zu jedem Kurvennetz stets beliebig viele Parallelnetze, die aus dem ersten durch Ähnlichkeitstransformation hervorgehen. Sieht man von diesem trivialen Falle ab, so müssen die drei Koordinaten ein und derselben partiellen Differentialgleichung von der Form

$$(28) \qquad (\lambda - \mu) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

genügen, d. h. die Parameterkurven bilden ein konjugiertes Netz. Umgekehrt gibt es zu jedem konjugierten Kurvennetz unendlich viele parallel zugeordnete Netze, die nicht durch eine bloße Ähnlichkeitstransformation aus dem ersten hervorgehen.[43])

Sind nun zwei krummlinige Koordinatensysteme, die nicht homothetisch sind, im Raume sich derart zugeordnet, daß in entsprechenden Punkten die Parameterflächen parallel sind, so sind auch entsprechende Parameterkurven parallel und bilden auf den Flächen des Systems konjugierte Kurvennetze. Die rechtwinkligen Koordinaten eines derartigen Systems, in welchem jede Fläche der einen Schar von allen Flächen der anderen Scharen in konjugierten Kurven geschnitten wird, genügen drei Gleichungen von der Form (28), die ein System von *Lamé*schen Gleichungen (13) bilden. Dabei müssen die Koeffizienten H, H_1, H_2 den Gleichungen (7) genügen; tritt zu ihnen noch eine der

42) *Darboux,* Théorie des surf. I, Livre 2; II, Livre 4.

43) *Darboux,* Théorie des surf. II, p. 234; Syst. orth., p. 349. Dieser Satz gilt auch für den n-dimensionalen Raum; er ist von *C. Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14 (1897), p. 467; (3) 15 (1898), p. 179; (3) 20 (1903), p. 75 und 181 zur Grundlage der Theorie der Kurvennetze und Linienkongruenzen gewählt worden. Daran knüpfen die Untersuchungen von *P. Calapso* über die *Laplace*sche Transformation konjugierter Netze an. S. Ann. di Mat. (3) 12 (1907), p. 203; Palermo Rend. 31 (1911), p. 273. Über die Ausdehnung der *Guichard*schen Untersuchungen auf dreifach ausgedehnte Gebilde wird später (Nr. **30**—**31**) berichtet.

Gleichungen (8) hinzu, so sind auch die beiden anderen Gleichungen dieses Systems erfüllt, und es liegt der besondere Fall des dreifach orthogonalen Flächensystems vor.

Die Theorie der krummlinigen Koordinaten, deren Parameterflächen sich wechselseitig in konjugierten Kurvenscharen schneiden und die daher als dreifach konjugierte Systeme bezeichnet werden, ist von *G. Darboux*[44]) zuerst entwickelt worden. Ihre Bestimmung hängt von der Integration eines Systems von Differentialgleichungen ab, das mit den *Lamé*schen Gleichungen in engster Beziehung steht. Die Koordinaten eines Punktes seien x, y, z; diese sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho_i} = H_i U_i \tag{29}$$

gegeben, wobei H_i den Differentialparameter der Kurve ϱ_i bedeutet und für U_i ihre Richtungskosinus $X_i Y_i Z_i$ zu setzen sind. Letztere Größen hängen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial U_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} U_k \tag{30}$$

miteinander zusammen, während die H_i durch die Gleichungen

$$\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ki} H_k \tag{31}$$

verknüpft sind und die Koeffizienten β_{ik} den sechs Gleichungen

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \tag{32}$$

zu genügen haben. Es ist ersichtlich, daß diese Gleichungen nur durch die Orthogonalitätsbedingungen zu ergänzen sind, um das vollständige System der *Lamé-Darboux*schen Bedingungsgleichungen (5)(7)(8)(9) der Orthogonalsysteme darzustellen. Die Lösung des Problems erfordert also ähnlich wie dort zunächst die Integration des Systems (32), worauf die Größen H_i und U_i mit Hilfe von (31) und (30) zu bestimmen sind, die mit Hilfe von Quadraturen x, y, z aus (29) anzugeben gestatten.[45])

Sollen die zu einem System parallelen dreifach konjugierten Systeme gefunden werden, so sind die β_{ik} und U_i bekannt, man hat daher nur noch die Differentialparameter H_i zu bestimmen und die Quadraturen

$$dx_1 = HXd\varrho + H_1 X_1 d\varrho_1 + H_2 X_2 d\varrho_2, \ldots$$

zu lösen.

44) Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 291; Théorie des surf. IV, Livre VIII, Chap. XII; Syst. orth., p. 361—377.

45) Auch in diesem Falle ist die Bestimmung der β_{ik} auf eine Funktion V zurückführbar, die einer Differentialgleichung 6. Ordnung genügt.

Auch die zweite von *Darboux* angegebene und durch die Gleichungen (21) und (22) gekennzeichnete Methode leitet aus einem dreifach konjugierten Systeme ein ebensolches her, indessen sind die von entsprechenden Tangentialebenen gebildeten Dreikante nicht kongruent, sondern supplementar. Dies folgt aus den Beziehungen

$$(33) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_k} + \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_i}\frac{\partial y}{\partial \varrho_k} + \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_i}\frac{\partial z}{\partial \varrho_k} = 0 \qquad (i \neq k),$$

die aus den Gleichungen (21) unmittelbar folgen. Geometrisch ergibt sich diese Zuordnung auf folgende Weise: man beschreibe um jeden Punkt (x, y, z) des gegebenen Systems die Kugel mit dem Radius $x^2 + y^2 + z^2 - 2\Omega$; dann umhüllen alle diese Kugeln

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - zz_1 + 2\Omega = 0,$$

deren Mittelpunkte auf einer Fläche $\varrho_i =$ konst. liegen, eine Fläche, die aus zwei Schalen besteht, und die Berührungssehne beschreibt eine Kongruenz, deren abwickelbare Flächen dem konjugierten System ϱ_k, ϱ_l auf der betrachteten Fläche entsprechen. Läßt man nun i alle möglichen Werte annehmen, so erhält man für jeden Punkt (x, y, z) drei Berührungssehnen, die sich in einem Punkte schneiden, und dieser ist der entsprechende Punkt (x_1, y_1, z_1) des transformierten Systems.[46])

Eine dritte Transformation, der ein dreifach konjugiertes System unterworfen werden kann, entspricht der *Laplace*schen Transformation der partiellen Differentialgleichungen. Ist das gegebene System durch die Gleichungen (13) gegeben, so beschreiben die Tangenten an die Kurven $\varrho_k =$ konst. auf einer Fläche $\varrho_l =$ konst. eine Kongruenz, deren zweite Brennfläche

$$(34) \qquad x_1 = x - \frac{H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}} \frac{\partial x}{\partial \varrho_i}, \ldots$$

ist, und auf der ebenso wie auf $\varrho_l =$ konst. die Parameterkurven ϱ_i, ϱ_k konjugiert sind. Konstruiert man diese Kongruenzen für alle Flächen der Schar $\varrho_l =$ konst., so bilden die zweiten Brennmäntel eine neue Flächenschar $\varrho_l =$ konst., und die Parameterkurven ϱ_i, ϱ_k auf ihnen erfüllen zwei Scharen von Flächen, die die erste zu einem dreifach konjugierten System ergänzen. Auf diese Weise kann man im allgemeinen aus jedem gegebenen System sechs neue herleiten, wenn man den Indizes i, k, l alle möglichen Werte beilegt.[47]) Das Verfahren

46) *Tzitzéica*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 16 (1899), p. 163; *Darboux*, Syst. orth., p. 368.

47) *Darboux*, Th. des surf. IV, p. 274; *Tzitzéica*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 16 (1899); *Guichard*, Syst. triplem. indét. (1905), p. 11.

versagt nur dann, wenn die Konstruktion auf eine in eine Kurve oder einen Punkt entartende Brennfläche führt.

Zu den einfachsten *Beispielen* der dreifach konjugierten Systeme gehören die *Translationssysteme*; sie ergeben sich, wenn eine Fläche F einer beliebigen Schiebung unterworfen wird; die erste Schar besteht aus den verschiedenen Lagen der Fläche F im Raume, die beiden anderen aus den Flächen, die bei der Schiebung von den Kurven eines konjugierten Kurvennetzes von F beschrieben werden.[48] Die von einem dreifach orthogonalen Systeme durch eine *Laplace*sche Transformation abgeleiteten Systeme enthalten stets eine der Scharen der Zentraflächen der Ausgangsflächen.[48] Weitere Beispiele gaben *Darboux*[49], der den Fall $H = H_1 = H_2$ untersuchte, ferner den Fall, daß die eine Schar des Systems durch geradlinige Schiebung einer unveränderlichen Fläche erzeugt wird[50], *Tzitzéica*[51], *Bianchi*[48], dessen Untersuchungen an die Theorie der Biegung der Flächen zweiter Ordnung anknüpfen, und *S. Carrus*[52], der ganz allgemein diejenigen Systeme explizit bestimmt, für die die Quotienten $\frac{\beta_{ik}}{\beta_{ml}}$ von ϱ_i unabhängig sind.

II. Die Differentialgleichung dritter Ordnung.

7. Die Bonnetsche Methode. Schlossen sich die bisher geschilderten Entwicklungen eng an die von *Lamé* gewiesenen Wege an, die auf die Behandlung gewisser grundlegender Systeme von simultanen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinauskommen, so sind jetzt andre Methoden darzulegen, die die wesentlichen Schwierigkeiten des Problems in einer einzigen Differentialgleichung zu fassen suchen. Die Methode von *O. Bonnet*[53], die als die ältere zuerst entwickelt werden soll, geht darauf aus, das sphärische Bild des Systems zu finden, d. h. die Richtungskosinus X_i, Y_i, Z_i als Funktionen von

48) *Bianchi,* Annali di Mat. (3) 23 (1914), p. 142.

49) Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 293.

50) Syst. orth., p. 377.

51) Ann. de l'Éc. Norm. (3) 16 (1899), p. 137—192.

52) Paris C. R. 147 (1908), p. 561, 620; 148 (1909), p. 507; J. de l'Éc. Pol. 13 (1909), p. 57. — Mit der Frage nach dreifach asymptotischen Systemen, d. h. nach Flächensystemen, die sich wechselseitig in Asymptotenlinien schneiden, beschäftigt sich *L. P. Eisenhart,* Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1901), p. 184, 303. Es ist geometrisch klar, daß solche Systeme nur aus Flächen zweiter Ordnung bestehen können.

53) Paris C. R. 54 (1862), p. 554, 655. Vgl. die ausführliche Darstellung bei *Darboux,* Syst. orth., p. 406 ff.

$\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ darzustellen. Ist dies gelungen, so ist nur noch das Gleichungssystem (9) für H, H_1, H_2 zu lösen, worauf sich x, y, z durch die Quadraturen (12) angeben lassen.

Um die Richtungskosinus zu finden, drückt *Bonnet* sie durch die *Euler*schen Winkel aus:

$$(35)\qquad \begin{aligned} X &= \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \\ X_1 &= \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \\ X_2 &= \sin\vartheta \sin\psi \\ Y &= \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \\ Y_1 &= \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \\ Y_2 &= \sin\vartheta \cos\psi \\ Z &= -\sin\vartheta \sin\varphi \\ Z_1 &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\ Z_2 &= \cos\vartheta; \end{aligned}$$

dadurch ergeben sich die Rotationskomponenten p_i, q_i, r_i in der Form

$$(36)\qquad \begin{aligned} p_i &= \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\varrho_i} - \cos\varphi \frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_i} \\ q_i &= \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\varrho_i} + \sin\varphi \frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_i} \\ r_i &= \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_i} - \cos\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\varrho_i} \\ & (i = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Infolge der Gleichungen (11) sind

$$(37)\qquad p = 0 \quad q_1 = 0 \quad r_2 = 0$$

die Bedingungen des Problems. Denkt man sich aus ihnen φ als Funktion von ψ, ϱ, ϱ_1 dargestellt, so erhält man durch Elimination von ϑ zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrabilitätsbedingung eine Differentialgleichung dritter Ordnung ist, der φ genügt. Nachdem diese gelöst ist, hat man die beiden simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu integrieren, um das sphärische Bild explizit angeben zu können.

Dieses *Bonnet*sche Verfahren führt auf wesentlich einfachere und übersichtlichere Rechnungen, wenn statt der *Euler*schen Winkel neue Parameter α, β, λ eingeführt werden, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$(38)\qquad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = i\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}, \quad e^{-i\psi} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}, \quad e^{i\varphi} = \lambda\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

verbunden sind.[54]) Die Bedingungsgleichungen (37) nehmen hier die Formen an:

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta}{\partial \varrho} = \lambda^2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varrho}, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial \varrho_1} = -\lambda^2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varrho_1} \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varrho_2} + \dfrac{\partial \beta}{\partial \varrho_2} = (\beta - \alpha)\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial \varrho_2}, \end{cases}$$

deren Integrabilitätsbedingung eine Gleichung dritter Ordnung für λ ergibt, die sich nach der Substitution

$$(40)\qquad \lambda = e^{i\mu}$$

in der bemerkenswert einfachen Form

$$(41)\qquad \frac{\partial^3 \mu}{\partial \varrho\, \partial \varrho_1\, \partial \varrho_2} + \operatorname{tg}\mu \frac{\partial \mu}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho\, \partial \varrho_2} - \operatorname{ctg}\mu \frac{\partial \mu}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = 0$$

schreiben läßt. Diese Gleichung, die zuerst von *Bianchi*[55]) in seinen Untersuchungen über *Lamé*sche Familien, die aus Flächen konstanter Krümmung bestehen (vgl. Nr. 22), angegeben wurde, ist von *Darboux*[54]) in den Mittelpunkt der Theorie gerückt worden.

Hat man durch Auflösung des Systems (39) α, β, λ erhalten, so braucht man zur Aufstellung des dreifach orthogonalen Systems nicht auf die Gleichungen (12) zurückzugehen. Die Flächen $\varrho_2 =$ konst. lassen sich dann einfacher durch die *Bonnet*schen Tangentialkoordinaten α, β, ξ ausdrücken, in denen die Tangentialebene durch die Gleichung

$$(42)\qquad (1 - \alpha\beta)x + i(1 + \alpha\beta)y + (\alpha + \beta)z + \xi = 0$$

dargestellt wird.[56]) Betrachtet man nämlich ξ als Funktion von α, β, ϱ_2 und setzt

$$(43)\qquad d\xi = p\,d\alpha + q\,d\beta + r\,d\varrho_2,$$

so ergeben sich p und q aus den Gleichungen

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \varrho} = \lambda^2 \dfrac{\partial q}{\partial \varrho} \quad \dfrac{\partial p}{\partial \varrho_1} = -\lambda^2 \dfrac{\partial q}{\partial \varrho_1} \\ \dfrac{\partial (p + q)}{\partial \varrho_2} = (p - q)\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial \varrho_2}, \end{cases}$$

die sich von denen des Systems (39) nur durch die Bezeichnung unterscheiden, während

$$(45)\qquad r = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{p - q}{\alpha - \beta}\right)$$

---

54) *Darboux,* Syst. orth., p. 410. Dort werden die Gleichungen des Problems auch in den *Euler-Rodrigues*schen Parametern angegeben (p. 413).

55) Annali di Mat. (2) 13 (1885), p. 185; Vorles. p. 678.

56) Drückt man die Bedingung für eine *Lamé*sche Familie in Ebenenkoordinaten aus, so kommt man auch auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Vgl. *P. Adam,* Sur les systèmes triple-orthogonaux, Thèse Paris 1887, 84 p; *Darboux,* Syst. orth., p. 426.

wird. Dies Verfahren ist dadurch bemerkenswert, daß die Lösung des Problems auf ein einziges System von drei partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt wird.

8. Die Darbouxsche Gleichung. Einen ganz anderen Weg schlug *Darboux* in seiner Thèse[57]) ein, indem er die Gleichung aufsuchte, die den Parameter ϱ einer *Lamé*schen Schar durch die kartesischen Koordinaten darstellt. Durch den Punkt (x, y, z) des Raumes geht eine Fläche dieser Schar, in ihm schneiden sich zwei Krümmungslinien der Fläche, deren Richtungen durch Gleichungen von der Form

$$(46)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{L} &= \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} \\ \frac{dx}{L'} &= \frac{dy}{M'} = \frac{dz}{N'} \end{aligned}$$

gegeben sind, Gleichungen, in denen L, M, N, L', M', N' ziemlich verwickelte Funktionen sind, die die ersten und zweiten Ableitungen von ϱ enthalten. Da nach dem *Dupin*schen Satze jedes der beiden Systeme die Normalen je einer zugeordneten Flächenschar bilden, so müssen zwei Faktoren λ_1, λ_2 der Art existieren, daß

$$(47)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 (L dx + M dy + N dz) &= d\varrho_1 \\ \lambda_2 (L' dx + M' dy + N' dz) &= d\varrho_2 \end{aligned}$$

vollständige Differentiale sind, und zwar zieht die Existenz des einen Faktors die des anderen unmittelbar nach sich. Die Integrabilitätsbedingungen

$$(48)\qquad \begin{aligned} L\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + N\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) &= 0 \\ L'\left(\frac{\partial M'}{\partial z} - \frac{\partial N'}{\partial y}\right) + M'\left(\frac{\partial N'}{\partial x} - \frac{\partial L'}{\partial z}\right) + N'\left(\frac{\partial L'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

reduzieren sich daher auf eine einzige Gleichung, und diese ist die *Darboux*sche Gleichung des Problems. Sie ist von der dritten Ordnung und linear in den Ableitungen dritter Ordnung. Legt man das Koordinatensystem so, daß die x- und y-Achse mit den Tangenten an die Krümmungslinien der Fläche $\varrho =$ konst. in dem betrachteten Punkte zusammenfallen, so lautet die Gleichung[58]):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0,$$

und es bedarf nur einer Koordinatentransformation, um sie in ihrer allgemeinen Form aufzustellen. Diese ziemlich mühsame Rechnung

57) Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 97—141; Bull. de la Soc. Philom. 1866, p. 16.

58) *M. Lévy*, J. de l'Éc. Pol. 26 (Cah. 43; 1870), p. 170.

wurde von *A. Cayley*[59]) durchgeführt und kurz darauf von *Darboux*[60]) vereinfacht.

Setzt man der bequemeren Schreibweise halber vorübergehend u statt ϱ für den Parameter der Flächenschar und bezeichnet die Ableitungen nach x, y, z der Reihe nach durch den Index $1, 2, 3$, setzt man ferner

$$A_{ik} = u_1 u_{ik1} + u_2 u_{ik2} + u_3 u_{ik3} - 2(u_{i1} u_{k1} + u_{i2} u_{k2} + u_{i3} u_{k3}),$$

so lautet die Gleichung[61]):

$$(49) \qquad S \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

in der übrigens die Größen A_{ik}, die durch die entsprechenden Ableitungen H_{ik} des Differentialparameters H ersetzt werden können.[62])

Eine andre bemerkenswert einfache Form der Gleichung ist von *M. Lévy*[63]) angegeben worden. Man betrachte ϱ als unabhängige Veränderliche; dann genügt die z-Koordinate als Funktion von x, y, ϱ der Gleichung

$$(50) \qquad A\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

mit den Koeffizienten

$$(51) \qquad \begin{aligned} A &= (1 + q^2)s - pqt \\ B &= (1 + p^2)t - (1 + q^2)r \\ C &= pqr - (1 + p^2)s. \end{aligned}$$

59) Paris C. R. 75 (1872), p. 116, 117, 246, 324, 381, 1800. Collect. Math. Pap. VIII, p. 269. Vgl. auch *Salmon-Fiedler,* Analytische Geometrie des Raumes II.

60) C. R. 76 (1873), p. 41, 83, 160.

61) Den Ausdruck S als Differentialinvariante betrachtet *J. E. Wright,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 12 (1906), p. 379.

62) *Darboux,* Syst. orth., p. 23.

63) Paris C. R. 77 (1873), p. 1435. Weitere Herleitungen der Gleichung dritter Ordnung in verschiedenen Formen gaben *Schläfli,* J. f. Math. 76 (1873), p. 126 bis 148; *Weingarten,* J. f. Math. 83 (1877), p. 1—12; *R. Hoppe,* Arch. der Math. (1) 63 (1879), p. 285; *Darboux,* Acta Math. 4 (1884), p. 93—96; *R. v. Lilienthal,* Math. Ann. 44 (1894), p. 449; *Ricci,* Rend. Rom. Acc. Linc. (5) 3 (1894), 2. Ser. p. 93; *A. R. Johnson,* Quarterly J. 22 (1877), p. 27; *Ribaucour,* Paris C. R. 75 (1872), p. 533; J. de Math. (4) 7 (1891), p. 61; *Frobenius,* J. f. Math. 110 (1892), p. 1—32; *C. F. Geiser,* Zürich. Viertelj. Naturf. Ges. 43 (1898), p. 317 und *E. F. Edwardes,* Edinb. Math. Soc. Proc. 29 (1911), p. 41; 30 (1912), p. 37; *P. Adam,* Fußnote 56.

Die Differentialgleichung ihrer Charakteristiken ist die bekannte Gleichung der Krümmungslinien[63a]). Dabei ist hier

$$H = \frac{\frac{\partial z}{\partial \varrho}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \tag{52}$$

zu setzen.

III. Besondere dreifach orthogonale Systeme.

9. Die Bouquetsche Partikularlösung. Der erste besondere Fall, für den die Differentialgleichung (49) aufgestellt und integriert wurde, betraf die Annahme, daß

$$\varrho = X + Y + Z,$$

d. h. ϱ als Summe je einer Funktion von x, von y und von z vorausgesetzt wurde; die Gleichung nimmt dann die von *Bouquet*[64]) angegebene Form

$$S = \begin{vmatrix} X'X''' - 2X''^2, & X'', & 1 \\ Y'Y''' - 2Y''^2, & Y'', & 1 \\ Z'Z''' - 2Z''^2, & Z'', & 1 \end{vmatrix} X'Y'Z' = 0 \tag{53}$$

an. *Serret*[65]) integrierte sie allgemein und untersuchte den schon von *Bouquet* bemerkten Spezialfall, in dem die Lösung in der Form

$$x^m y^n z^p = \varrho \tag{54}$$

gegeben wird. Ein viel behandelter besonderer Fall dieser auch von *Darboux*[66]) eingehend studierten Scharen ist:

$$yz = \varrho x, \tag{55}$$

die Schar der hyperbolischen Paraboloide, die sich in zwei aufeinander senkrechten Geraden, der Y-Achse und der Z-Achse, schneiden. Sie werden durch die Flächen

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + x^2} + \sqrt{z^2 + x^2} &= \varrho_1 \\ \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{z^2 + x^2} &= \varrho_2 \end{aligned} \tag{56}$$

zu einem dreifach orthogonalen System ergänzt. Die beiden letzten Scharen bestehen aus den Flächen, für deren Punkte die Summe bzw. die Differenz der Abstände von den beiden festen sich schneidenden Geraden konstant ist.[67])

63a) *Darboux,* Th. des surf. I, p. 137; Syst. orth., p. 83.

64) J. de Math. (1) 11 (1846), p. 446.

65) J. de Math. (1) 12 (1847), p. 247.

66) Paris C. R. 84 (1877), p. 382; Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7, p. 235 (1878); Th. des surf. I, p. 196; Syst. orth., p. 116.

67) Die Fragestellung ist sowohl analytisch als auch geometrisch von verschiedenen Autoren behandelt und verallgemeinert worden. Vgl. *Picart,* Ann. de

Zu den *Lamé*schen Scharen, die unter die Gleichung (54) fallen, gehört auch das System der asymptotischen Flächen dritten Grades

$$(57) \qquad xyz = \varrho,$$

dessen zugeordnete Scharen von *Cayley*[68]) durch die Gleichungen

$$(58) \qquad \begin{aligned} (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}} &= \varrho_1 \\ (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}} &= \varrho_2, \end{aligned}$$

in denen ω die imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet, dargestellt wurden. Eine eingehende Diskussion hat das System neuerdings durch *W. Freitag*[69]) erfahren.

10. Ebenen und Kugeln. Eine beliebige Schar von Ebenen gehört zu unendlich vielen Orthogonalsystemen als *Lamé*sche Flächenschar.[70]) Die beiden Ergänzungsscharen bestehen aus Gesimsflächen, deren Profilkurven in jeder Ebene der Schar ein orthogonales Kurvennetz bilden. Diese Orthogonalsysteme werden dadurch erzeugt, daß man eine Ebene mit einem beliebigen rechtwinkligen Kurvennetz auf einer abwickelbaren Fläche abrollen läßt; sie sind die einzigen Orthogonalsysteme, die eine *Lamé*sche Schar von Gesimsflächen enthalten.[70]) Sie sind zuerst von *Enneper*[71]), dann in endlicher Form von *Darboux*[72]) dargestellt worden. Sind die Profilkurven gerade Linien, so sind die zugehörigen Gesimsflächen abwickelbare Flächen; diese bilden also mit der Ebenenschar ein Orthogonalsystem, dessen Flächen sämtlich das Krümmungsmaß Null haben.

Auch eine beliebige Schar von Kugeln gehört unendlich vielen Orthogonalsystemen an.[73]) Man erhält sie, indem man auf einer Kugel der Schar ein orthogonales Netz konstruiert und zu der Kugelschar die Flächen hinzunimmt, die von denjenigen Orthogonaltrajektorien der Kugeln gebildet werden, die eine und dieselbe Kurve des Netzes schneiden. Die Gesamtheit dieser Systeme ergibt sich aus denen mit

l'Éc. Norm. (1) 1 (1864), p. 285—295; Nouv. Ann. de Math. (2) 3 (1864), p. 292—297; *Catalan,* Mém. cour. de l'Ac. de Belg. 32 (1863), p. 15; *Combescure,* Annali di Mat. 5 (1863), p. 39—51.

68) Paris C. R. 84 (1877), p. 383; ferner *E. C. Catalan,* Liège Mém. Soc. Sc. 13 (1886), p. 73.

69) Progr. Gymn. Torgau 1903.

70) *M. Lévy,* Thèse Paris 1867; abgedruckt im J. de l'Éc. Pol. 26 (cah. 43, 1870), p. 162.

71) Math. Ann. 7 (1873), p. 456—480.

72) Syst. orth., p. 26—35.

73) *Ribaucour,* Paris C. R. 75 (1872), p. 536.

einer Schar von Ebenen explizit durch Anwendung von Inversionen und einer von *V. Rouquet*[74]) angegebenen Transformation[75]); während die Bestimmung der zu einer gegebenen Kugelschar gehörigen Systeme die Auflösung zweier *Riccati*schen Gleichungen erfordert.

11. Flächen zweiter Ordnung. Das erste nicht triviale dreifach orthogonale System, das sich der Untersuchung darbot, und das zu der ganzen Fragestellung Anlaß bot, war das der konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Seine Entdeckung durch *Binet* und *Dupin* ist in der Einleitung erwähnt; wegen seiner Eigenschaften und vielfachen Anwendungen in der Mechanik und mathematischen Physik kann auf den Bericht über elliptische Koordinaten verwiesen werden (III AB 7 (*E. Müller*), Nr. 12, p. 674).

Die allgemeinere Frage der *Lamé*schen Scharen, die aus Flächen zweiter Ordnung bestehen, wurde von *M. Lévy*[76]) durch geometrische Betrachtungen, die von *Darboux*[77]) wesentlich schärfer gefaßt wurden, gelöst. Aus dem Satze, daß für jede *Lamé*sche Schar der Ort der Nabelpunkte der einzelnen Flächen eine Orthogonaltrajektorie ihrer Flächen ist, folgt, daß alle Flächen der Schar die Symmetrieebenen gemeinsam haben, also in der Form

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \tag{59}$$

darstellbar sein müssen. Die Koeffizienten A, B, C genügen einer Gleichung, deren allgemeine Lösung in der Form

$$A = t\frac{d}{dt}(u(1-t)),\quad B = (1-t)t\frac{du}{dt},\quad C = (1-t)\frac{d(ut)}{dt} \tag{60}$$

gegeben wird[78]), wobei u eine beliebige Funktion von t bedeutet. (Nur die konfokalen Flächen sind in dieser Lösung nicht enthalten.) Zu diesen Scharen gehören auch die von *Bouquet* (s. Nr. 9 Formel (55)) angegebenen *Lamé*schen Familien.

---

74) Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes. Thèse Toulouse 1882.

75) *Darboux,* Syst. orth., p. 35.

76) J. de l'Éc. Pol. 26 (cah. 43; 1870), p. 175; wo auch zahlreiche Beispiele untersucht sind. Unabhängig davon behandelt *L. Schläfli,* J. für Math. 76 (1873), p. 126 die Frage.

77) Syst. orth., p. 99.

78) *Darboux,* Paris C. R. 84 (1877), p. 336; Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 129; Syst. orth., p. 103. Auf einen besonders interessanten Spezialfall machte *G. Humbert,* Paris C. R. 111 (1890), p. 963 aufmerksam: ist das System der Flächen zweiter Ordnung so beschaffen, daß der Ort der einen Schar von Kreispunkten eine gerade Linie bildet, so liegen die übrigen elf Kreispunktescharen gleichfalls auf geraden Linien.

79) Paris C. R. 49 (1864), p. 240; Ann. de l'Éc. Norm. (1) 2 (1865), p. 55.

12. Die Zyklidensysteme. Das einfachste der aus lauter Zykliden bestehenden Orthogonalsysteme ist das von *Darboux*[79]) und *Moutard*[80]) gleichzeitig entdeckte, von ersterem in seiner Thèse[81]) eingehend untersuchte System der konfokalen Zykliden, das durch die Gleichung

$$(61)\quad (x^2+y^2+z^2)^2+\frac{4d^2+a\lambda}{a+\lambda}x^2+\frac{4d^2+b\lambda}{b+\lambda}+\frac{4d^2+c\lambda}{c+\lambda}+d^2=0$$

dargestellt wird. Dies System, das man als zyklidische Koordinaten bezeichnet, umfaßt (für $d=\infty$) als besonderen Fall die elliptischen Koordinaten. Seine Darstellung gestaltet sich besonders einfach durch Einführung der Fünfkugelkoordinaten. (Vgl., auch betr. der physikalischen Bedeutung, den Bericht über zyklidische Koordinaten von III AB 7 (*E. Müller*), Nr. **16**, p. 684.)

Die Bestimmung aller *Lamé*schen Scharen, die aus allgemeinen Zykliden bestehen, ist *Darboux*[82]) mit Hilfe der Kugelkoordinaten in ganz ähnlicher Weise gelungen, wie die Bestimmung der aus Flächen zweiter Ordnung bestehenden Scharen mit Hilfe kartesischer Koordinaten.

Ein System, das aus lauter *Dupin*schen Zykliden besteht, d. h. aus Flächen, deren Krümmungslinien sämtlich Kreise sind, hat zuerst *W. Roberts*[83]) aus dem System der elliptischen Koordinaten hergeleitet, allgemeinere Systeme dieser Art erhält man, wenn man die Kreise konstruiert, die eine feste Kugel und eine *Dupin*sche Zyklide senkrecht schneiden; sie bestehen aus den Orthogonalflächen dieser Kreiskongruenz und deren Ergänzungsscharen.[84])

Die Theorie der Systeme, die eine Schar *Dupin*scher Zykliden enthalten, ist neuerdings wesentlich gefördert worden.[85]) Aus ihnen

80) Paris C. R. 59 (1864), p. 243.

81) Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 97—109. Paris C. R. 69 (1868), p. 392. Das System ist auch später noch wiederholt entdeckt worden. *Tisserand,* Paris C. R. 72 (1871), p. 735 zeigt, daß es außer ihm keine Orthogonalsysteme gibt, die in der Form $\frac{f(x)}{\lambda-a}+\frac{f(y)}{\lambda-b}+\frac{f(z)}{\lambda-c}=F(x,y,z)$ dargestellt werden können. Vgl. auch *P. Morin,* Paris C. R. 67 (1868), p. 788; *Wangerin,* J. f. Math. 82 (1877), p. 145—157, 348; *Puchta,* Wien. Ber. 102 (1894), p. 1197.

82) Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 144.

83) J. f. Math. 62 (1863), p. 57.

84) *Darboux,* Syst. orth., p. 58. Zu den aus lauter *Dupin*schen Zykliden bestehenden Systemen gehören auch die reversiblen Systeme. Vgl. Nr. 26.

85) *Darboux,* Syst. orth., Note II und III (p. 484—529); Mém. de l'Ac. des Sc. 51 (1910), 1. u. 2. Abh.; Paris C. R. 147 (1908), p. 484, 507; Paris C. R. 148 (1909), p. 385; auch *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1897), p. 1426; *J. Haag,* Paris C. R. 147 (1908), p. 296; *Demoulin,* Paris C. R. 148 (1909), p. 269.

erhält man durch Paralleltransformation alle Orthogonalsysteme mit ebenen Koordinatenlinien (vgl. Nr. 21).

13. Lamésche Scharen von Rotationsflächen. Eine Schar von ∞^1 allgemeinen Rotationsflächen bildet nur dann eine *Lamé*sche Familie, wenn die Flächen dieselbe Achse besitzen. Die Ergänzungsflächen werden dann von den Meridianebenen und den koaxialen Drehflächen gebildet, deren Meridiane mit denen der gegebenen Schar ein ebenes Orthogonalsystem bilden.[86]) Dagegen bildet eine Schar von Kugeln stets eine *Lamé*sche Schar (vgl. Nr. 10), eine Schar von Kreiskegeln immer, wenn

1. die Kegel konzentrisch sind. Dann sind die Ergänzungsscharen konzentrische Kugeln und eine zweite Schar konzentrischer Kegel;

2. die Kegel kongruent sind und ihre Achsen die Kurve C der Kegelspitzen berühren. Die Ergänzungsscharen bestehen aus abwickelbaren Flächen, den Tangentenflächen der schiefen Evoluten von C, die zu dem Öffnungswinkel der Kegel gehören, sowie aus einer Schar von Flächen mit kreisförmigen Krümmungslinien.

14. Isothermflächen (III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*), Nr. 24). Der Erfolg, mit dem die elliptischen Koordinaten in zahlreichen Fragen der mathematischen Physik angewandt werden konnten, beruhte vielfach darauf, daß die Koordinatenflächen ein Isothermensystem bilden, d. h. daß in einem homogenen Medium ein stationärer Wärmezustand sich einstellen kann, in welchem die eine Schar der Koordinatenflächen die Flächen konstante Temperatur bilden. Die Temperatur V ist im stationären Zustand durch die *Laplace*sche Gleichung

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{62}$$

gegeben. Auf den Flächen der Schar

$$F(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{63}$$

ist die Temperatur konstant, wenn

$$V = \varphi(\lambda) \tag{64}$$

der Wärmegleichung genügt, und dies kommt darauf hinaus, daß der

86) *M. Lévy*, J. de l'Éc. Pol. 26 (cah. 43) (1871), p. 163; *Darboux*, Syst. orth., p. 111. Diese Systeme gehören natürlich als Sonderfälle zu den in Nr. 9 betrachteten. Durch eine Aufeinanderfolge von zwei Inversionen läßt sich ein jedes solches System so transformieren, daß die Rotationsflächen in allgemeine konzentrische Kegel und die Meridianebenen in konzentrische Kugeln übergehen (*Darboux*, Mém. sur une classe remarquable de courbes et de surf. algébr., Paris 1873, p. 162; Syst. orth. p. 279).

Quotient $\frac{\Delta^2\lambda}{(\Delta\lambda)^2}$ eine Funktion $f(\lambda)$ von λ allein ist.[87]) Dabei bedeutet

$$(65)\qquad \Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}$$

den Laméschen Differentialparameter erster Ordnung. Durch Einführung des thermometrischen Parameters[88])

$$(66)\qquad \tau = c\int e^{-\int f(\lambda)\,d\lambda}\,d\lambda$$

wird

$$(67)\qquad V = \tau + c_1.$$

Sollen nun die Koordinatenflächen eines Orthogonalsystems drei isotherme Systeme sein, so hat die Differentialgleichung der Wärmeleitung unendlich viele Lösungen von der Form

$$(68)\qquad V = f(\varrho)f_1(\varrho_1)f_2(\varrho_2),$$

und die Parameterflächen müssen, wenn ϱ, ϱ_1, ϱ_2 ihre thermometrischen Parameter sind, die Gleichungen

$$(69)\qquad \Delta^2\varrho = 0,\quad \Delta^2\varrho_1 = 0,\quad \Delta^2\varrho_2 = 0$$

erfüllen. Aus dem allgemeinen Ausdruck des Differentialparameters zweiter Ordnung in rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten[89])

$$(70)\qquad \Delta^2\varphi = \frac{1}{HH_1H_2}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{H_1H_2}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{H_2H}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{HH_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}\right)\right).$$

folgt dann für das Linienelement des Raumes ein Ausdruck[90])

$$(71)\qquad ds^2 = S_1S_2d\varrho^2 + S_2Sd\varrho_1^2 + SS_1d\varrho_2^2,$$

wobei S_i eine Funktion bedeutet, die ϱ_i nicht enthält. Aus dieser Formel läßt sich sofort der *Bertrand*sche Satz[91]) ablesen, daß jede Fläche, die einem dreifach orthogonalen Isothermensystem angehört, durch ihre Krümmunglinien in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden kann.[92]) — Die Bestimmung sämtlicher reellen isothermen Systeme

87) *Lamé*, J. de Math. (1) 2 (1837), p. 147. Vgl. auch V 4 (*E. W. Hobson* und *H. Diesselhorst*), Nr. 10, p. 201.

88) *Lamé*, Coord. curvil., p. 31.

89) *Lamé*, Coord. curvilignes, p. 22; *G. Kowalewski*, Monatsh. Math. Phys. 24 (1913), p. 183.

90) *Lamé*, J. de Math. (1) 8, p. 397; *Darboux*, Syst. orth., p. 217; *J. E. Wright*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1906), p. 159.

91) Paris C. R. 17 (1843), p. 80; J. de Math. (1) 9 (1844), p. 117; *Darboux*, Syst. orth., p. 217.

92) Dieser Satz bildet die Grundlage für die Theorie der Isothermflächen, d. h. der Flächen, die durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden können. Die Literatur dieses Problems bis 1903 ist in dem Bericht III D 5 (*R. v. Lilienthal*), Nr. 37, p. 346 berücksichtigt. Seither ist die Frage

gelang zuerst *Lamé*[93]), dessen Beweisführung durch *Bonnet*[94]) wesentlich vereinfacht wurde. Zu ihnen gehören

1. die Systeme, die aus parallelen Ebenen und zwei dazu senkrechten isothermen Zylinderscharen bestehen,

2. die Systeme, die eine Schar konzentrischer Kugeln enthalten, und zwei Scharen isothermer konzentrischer Kegel,

3. die Systeme, die aus zwei Familien konfokaler Rotationsflächen zweiter Ordnung und ihren Meridianebenen bestehen,

4. die konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

Die Fragestellung wurde durch *Darboux*[95]) zum Abschluß gebracht, der noch einen fünften Typus mit nur imaginären Flächen bemerkte. Es besteht aus lauter Zykliden dritter Ordnung, die durch Inversion aus dem Drehkegel hervorgehen; das ganze System geht dabei in ein solches über, das aus lauter kongruenten Drehkegeln besteht.

Während für die isothermen Orthogonalsysteme die Wärmeleitungsgleichung unendlich viele Lösungen von der Form $V = f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2)$ besaß, wird sie nach einem Satze von Lord *Kelvin*[96]) für die aus ihnen durch Inversion hervorgehenden Systeme notwendig unendliche viele Lösungen von der Form $V = Pf(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2)$ besitzen, wobei P eine Funktion von $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ ist. Die Frage nach allen krummlinigen Orthogonalkoordinaten, die Lösungen von derselben Form zulassen, ergab

---

durch eine Reihe wichtiger Arbeiten wesentlich gefördert worden. Vgl. *L. Bianchi*, Rom. Rend. dell' Acc. dei Lincei (5) 12_2 (1903), p. 511, (5) 13_1 (1904), p. 359; Ann. di Mat. (3) 11, p 93, (3) 12 (1905), p. 19; *Demartres*, Toulouse Ann. (2) 4 (1902), p. 341; *Demoulin*, Paris C. R. 141 (1905), p. 1210; *P. Calapso*, Palermo Rend. 17 (1903), p. 275; *Manfredini*, Ann. di Mat. (3) 16 (1909), p. 69; *L. Raffy*, Paris C. R. 138 (1904), p. 1681, 139 (1904), p. 119, 140 (1905) p. 1672; Ann. de l'Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 397, (3) 23 (1906), p. 387; Paris C. R. 143 (1906), p. 575, 874; Bull. Soc. Math. 35 (1907), p. 259; *R. Rothe*, Paris C. R. 143 (1906), p. 543, 578; Math. Ann. 72 (1912), p. 57; *Servant*, Paris C. R. 134 (1902), p. 1291; Bull. Soc. Math. 39 (1911), p. 162; *J. E. Wright*, Messenger (2) 32 (1903), p. 133; *A. E. Young*, Amer. Math. Soc. Trans. 8 (1907), p. 415, 10 (1909), p. 79.

93) J. de Math. (1) 8 (1843), p. 397.

94) J. de l'Éc. Pol. (Cah. 30, 1845), p. 141; Paris C. R. 29 (1849), p. 506; J. de Math. (1) 14 (1849), p. 401. Ferner *Combescure*, Ann. de l'Éc. Norm. (1) 4 (1867), p. 122; *Betti*, Ann. di Mat. (2) 8 (1877), p. 138—145; Opere II, p. 399—408; *A. Pellet*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14 (1897), p. 306. Eine ausführliche Darstellung erfuhr die Theorie der isothermen Systeme durch *de Salvert*, Brux. S. Sc. A 13—18 (1889—1894), auch Paris 1894; *R. Kaibara*, Tokio Math. Ges. (2) 5 (1910), p. 416—455. *P. G. Tait*, Edinb. R. S. Trans. 27 (1872), p. 105; Scient. Pap. I, p. 176, behandelt die Aufgabe mit Quaternionen.

95) Syst. orth., p. 272—277. Das System selbst war schon 1867 Ann. de l'Éc. Norm. (1) 4, p. 93 von *Combescure* angegeben worden.

96) J. de Math. (1) 12 (1847), p. 256.

außer den inversen der Isothermsysteme nur noch die zyklidischen Koordinaten[97]) (vgl. Nr. **11**).

In dem letzten System lag ein Beispiel dafür vor, daß ein dreifach orthogonales Flächensystem aus lauter Isothermflächen besteht, ohne daß das System im physikalischen Sinne als isotherm bezeichnet werden kann. Die schwierige und interessante Frage nach allen derartigen Orthogonalsystemen wurde von *Darboux*[98]) gelöst. Die Größen H_i nehmen in diesem Falle die Form an

$$(72) \qquad H = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R + R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R + R_1},$$

wobei für M und die von ϱ_i unabhängigen Funktionen R_i vermöge der *Lamé-Darboux*schen Gleichungen der Rotationen Systeme von Differentialgleichungen bestehen, die nur folgende Lösungen zulassen:

1. $R_1 = R_2 = 0$; diesem Falle entsprechen die drei ersten Typen der Isothermsysteme, sowie ihre inversen;

2. $R_i = -\frac{1}{2} \log a_k a_l - h \log (\varrho_k - \varrho_l)$, wobei a_i eine Funktion von ϱ_i allein bedeutet und die Konstante h nur vier Werte annehmen kann:

a) Für $h = -\frac{1}{2}$ ergibt sich das System der konfokalen Zykliden und seine Ausartungen,

b) für $h = \frac{1}{2}$ ein transzendentes System,

c) für $h = 1$ ein System, das aus lauter Dupinschen Zykliden besteht, die im besonderen Falle von dritter Ordnung sind[99]),

d) für $h = 2$ ein imaginäres System.

Die Fälle b) und d) haben bisher keine nähere Untersuchung erfahren.

IV. Die zyklischen Systeme Ribaucours.

15. Die normalen Kreiskongruenzen. Zu der grundlegenden Darbouxschen Differentialgleichung (49) gehören alle Integrale der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(73) \quad H = \varphi(\varrho)(x^2 + y^2 + z^2) + x\varphi_1(\varrho) + y\varphi_2(\varrho) + z\varphi_3(\varrho) + \varphi_4(\varrho),$$

in welcher $\varphi, \varphi_1 \ldots \varphi_4$ willkürliche Funktionen des jetzt wieder mit

97) *A. Wangerin,* J. f. Math. 82 (1876), p. 145; *Darboux,* Paris C. R. 83 (1876), p. 1037, 1099; Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 305; Syst. orth., p. 222.

98) Paris C. R. 84 (1877), p. 298; Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 303—343; Syst. orth., p. 212—263.

99) Diesen besonderen Fall, der auf das von *W. Roberts* [J. f. Math. 62 (1863), p. 57] angegebene System führt, hat zuerst *H. Maschke* (Über ein dreif. orth. Flächensystem, gebildet aus Fl. 3. O., Diss. Göttingen 1880) eingehend untersucht. Vgl. auch *J. Gysel* (Diss. Zürich 1874).

ϱ bezeichneten Parameters der Flächenschar bedeuten, als Partikularlösungen. Insbesondere stellt

$$H = 1 \tag{74}$$

eine Schar von Parallelflächen (F) dar, die durch die abwickelbaren Flächen ihrer gemeinsamen Normalen zu einem dreifach orthogonalen System ergänzt werden. Unterwirft man dieses bekannte System (vgl. Nr. 1) einer Inversion mit dem Pole (a, b, c), so gehen die Parallelflächen (F) in eine Schar von Flächen (F_1) über, die durch die Gleichung

$$H = \varphi(\varrho)\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right) \tag{75}$$

dargestellt wird. Die Normalenkongruenz von (F) verwandelt sich in eine Kongruenz von Kreisen, die alle durch den festen Punkt (a, b, c) gehen und die Flächen F_1 senkrecht schneiden.

Allgemein stellt die Gleichung (73), wenn man die Verhältnisse der Koeffizienten φ_i als konstant voraussetzt, eine Schar von Flächen dar, die von ∞^2 Kreisen senkrecht geschnitten werden, und zwar erhält man die Schar als Orthogonalflächen aller Kreise, die eine gegebene Fläche und eine feste Kugel (oder Ebene) senkrecht schneiden.[100])

Systeme von ∞^2 Kreisen, die wie die eben gekennzeichneten eine Schar von ∞^1 Flächen senkrecht schneiden, heißen *normale Kreiskongruenzen.*[101]) Ihre Bedeutung für die Theorie der dreifach orthogonalen

100) *Darboux,* Syst. orth., p. 55. Sind die Verhältnisse $\varphi(\varrho) : \varphi_1(\varrho) : \ldots : \varphi_4(\varrho)$ nicht alle konstant, so kennzeichnet die Gleichung (73) solche *Lamé*sche Scharen, bei denen die Krümmungskreise der Orthogonaltrajektorien längs einer Fläche eine feste Kugel senkrecht schneiden, wobei die Kugel von Fläche zu Fläche wechselt.

101) Die Theorie der normalen Kreiskongruenzen in ihrem Zusammenhang mit den Problemen der Flächenbiegung und der dreifach orthogonalen Systeme wurde zuerst von *A. Ribaucour* entwickelt. Seine Untersuchungen, die er zunächst in einer Reihe von Noten meist ohne Beweis mitteilte [Paris C. R. 67 (1868), p. 1334; 70 (1870), p. 330; 76 (1873), p. 478, 830], sind in seiner 1876 mit dem *Dalmont*-Preise gekrönten Schrift [Bericht von de la Gournerie, Paris C. R. 84 (1877), p. 811] ausführlich dargestellt, aber erst 1891 [J. de Math. (4) 7, p. 5—108, 219—270] veröffentlicht worden. Er benutzt grundsätzlich, an *Mannheim* anknüpfend, kinematische Schlußweisen, die er in einer ihm eigenen Weise (Methode der Perimorphie, vgl. Encykl. III D 3 (*R. v. Lilienthal*), Nr. 27, p. 164) analytisch formulierte. *Bianchi* [Giorn. di Mat. 21 (1883), p. 275; 22 (1884), p. 333] behandelte den Gegenstand mit den klassischen Methoden der Flächentheorie. Vgl. auch die zusammenfassende Darstellung von *Darboux,* Th. des surf. II, p. 314—346; IV, p. 111—197. Eine systematische Darstellung der Kreiskongruenzen und -komplexe auf Grund der Kugelgeometrie gab neuerdings *J. L. Coolidge,* Amer. Math. Soc. Trans. 15 (1914), p. 107. Die Kreiskongruenzen im R_n behandelt *U. Sbrana,* Palermo Rend. 19 (1905), p. 258; 21 (1906), p. 1.

Systeme liegt in dem Satze, daß die Orthogonalflächen einer normalen Kreiskongruenz stets eine *Lamé*sche Schar bilden.

Um zu einer analytischen Darstellung der Kreiskongruenzen zu kommen, bezeichne man mit (ξ, η, ζ) die kartesischen Koordinaten eines Punktes des Kreises, mit (x_0, y_0, z_0) die Koordinaten des Mittelpunktes, mit R den Radius, mit $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ die Richtungskosinus zweier aufeinander senkrechter Richtungen in der Kreisebene; dann stellen die Gleichungen

$$(76) \qquad \xi = x_0 + R(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t), \cdots$$

ein System von ∞^2 Kreisen dar, wenn alle Bestimmungsgrößen des Kreises als Funktionen zweier Parameter ϱ_1, ϱ_2 gegeben sind. Die *Beltrami*sche Bedingung für die Normalflächen einer Kurvenkongruenz[102]) nimmt hier die Form an

$$(77) \qquad A + B \sin t + C \cos t = 0,$$

wobei die Funktionen A, B, C von ϱ_1, ϱ_2 allein abhängen. Verschwinden sie nicht identisch, so haben die Kreise nur zwei Orthogonalflächen; sie besitzen unendlich viele, wenn gleichzeitig $A = B = C = 0$ ist, d. h. ein System von ∞^2 Kreisen, die von mehr als zwei Flächen senkrecht geschnitten werden, besitzt ∞^1 Orthogonalflächen, und zwar schneiden je vier Flächen alle Kreise des Systems nach demselben Doppelverhältnis.[103])

Zur Bestimmung einer normalen Kreiskongruenz geht man zweckmäßig von einer ihrer Orthogonalflächen (x, y, z) aus, für die ϱ_1, ϱ_2 die Parameter der Krümmungslinien sein mögen. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche seien $H_1^2, 0, H_2^2$ und die Richtungskosinus der Parameterkurven $\varrho_2 =$ konst., $\varrho_1 =$ konst. (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2); dann ist der Mittelpunkt des Kreises durch die Gleichungen

$$(78) \qquad x_0 = x + R(X_1 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi), \cdots$$

gegeben. Ist dann ψ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(79) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_2},$$

102) Giorn. di Mat. 2 (1864), p. 267; vgl. III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*), Nr. 23, p. 55.

103) *Ribaucour*, Paris C. R. 70 (1870), p. 330; J. de Math. (4) 7 (1891), p. 230–233; *Bianchi*, Giorn. di Mat. 22 (1884), p. 336. Eine Ebene und eine Kugel schneidet ihre Orthogonalkreise immer in zwei Punkten, daher bilden die Kreise, die eine beliebige Fläche und eine Kugel (oder Ebene) senkrecht schneiden, immer eine Normalkongruenz. Ihre Orthogonalflächen sind, wie schon oben angegeben wurde, durch die Gleichung $H = a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e$, in der a, b, c, d, e Konstanten bedeuten, gekennzeichnet (*Ribaucour* a. a. O.; *Darboux*, Th. des surf. I, p. 261; Syst. orth., p. 55).

der die Koordinaten x, y, z der Orthogonalfläche, sowie der Ausdruck $x^2 + y^2 + z^2$ genügen, so ergibt sich der Kreisradius aus der Gleichung

$$(80)\qquad \frac{1}{R^2} = \Delta_1 \log \psi = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log \psi}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log \psi}{\partial \varrho_2}\right)^2,$$

der Winkel φ aus:

$$(81)\qquad \cos\varphi = -\frac{R}{H_1}\frac{\partial \log \psi}{\partial \varrho_1}, \quad \sin\varphi = -\frac{R}{H_2}\frac{\partial \log \psi}{\partial \varrho_2}.$$

Ist damit der Kreismittelpunkt gefunden, so ergeben sich die Orthogonalflächen der Kongruenz durch die Quadratur

$$(82)\qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{R}{\psi}\left(C - \int\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1}\,d\varrho_1 + \frac{1}{R_1}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho_2}\,d\varrho_2\right)\right),$$

in der R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche (x, y, z), die zu den Krümmungslinien $\varrho_2 =$ konst. bzw. $\varrho_1 =$ konst. gehören[104]), und C eine Integrationskonstante bedeutet.

16. Die zyklischen Linienkongruenzen. Konstruiert man für jeden Kreis einer normalen Kongruenz seine Achse MN, d. h. die Gerade, die auf der Kreisebene im Mittelpunkte senkrecht steht, so liegt diese in den Tangentialebenen aller Orthogonalflächen. Die Gesamtheit der Achsen bildet eine Linienkongruenz, die man als ein *zyklisches Strahlensystem*[105]) bezeichnet. Seine Brennpunkte $M \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $N \equiv (x_2, y_2, z_2)$ liegen auf den Tangenten an die Krümmungslinien der Orthogonalflächen (x, y, z) der zugeordneten normalen Kreiskongruenz, und ihre Koordinaten sind:

$$(83)\qquad x_1 = x - \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1}}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}, \cdots, \quad x_2 = x - \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial \varrho_2}}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}, \cdots,$$

wenn ψ die der Kreiskongruenz entsprechende Lösung der Gleichung (79) ist. Die Richtungskosinus der Kongruenzstrahlen sind proportional zu den Größen

$$(84)\qquad \vartheta_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_2}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}, \cdots,$$

die einer Gleichung von der Form

$$(85)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} + r\vartheta$$

genügen, wobei ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 durch eine Gleichung

$$(86)\qquad \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 = m^2 P_1^2 + n^2 P_2^2$$

104) *Bianchi,* Vorles. p. 351. Dasselbe Problem behandelte *P. Calapso,* Palermo Rend. 23 (1909), p. 329 mit Benutzung der Invarianten der konformen Gruppe. Vgl. auch die Darstellung von *Coolidge* (Fußnote 101).

105) *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 18 (1890), p. 302; Vorles. p. 350.

verbunden sind, in der P_i eine Funktion von ϱ_i allein bedeutet.[106]) Umgekehrt charakterisieren drei Lösungen einer Gleichung (85), die der Bedingung (86) genügen, eine Linienkongruenz als zyklisch; die Bedingung der zyklischen Kongruenzen hängt daher nur von ihrem sphärischen Bilde ab, d. h. jede Kongruenz, die mit einer zyklischen das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen gemeinsam hat, ist gleichfalls zyklisch. Unter den zyklischen Kongruenzen, die dasselbe sphärische Bild besitzen, gibt es nun stets unendlich viele, deren zugeordnete Kreiskongruenzen durch Inversion aus einer normalen Linienkongruenz hervorgehen. Das Problem des sphärischen Bildes ist somit durch ausführbare Operationen lösbar, so daß die Bestimmung aller zyklischen Kongruenzen nur die Lösung der *Guichard*schen Gleichung[107]) für den Brennpunktsabstand $2t$:

$$(87)\quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial t}{\partial \varrho_1} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial t}{\partial \varrho_2} + \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left\{ {12 \atop 1} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left\{ {12 \atop 2} \right\} + \mathfrak{F} \right) t = 0$$

erfordert. Nach Auflösung dieser Gleichung ergibt sich die Mittelfläche des Strahlensystems durch Quadraturen.

Eine mit der Gleichung (86) gleichwertige Bedingung dafür, daß eine Kongruenz zyklisch ist, ergibt sich durch Einführung des Winkels σ durch die Gleichung[108])

$$(88)\qquad \sin \sigma = \frac{R}{t};$$

dieser genügt dem Gleichungssystem

$$(89)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \cos \sigma}{\partial \varrho_1} &= 2(\cos \sigma - 1) \left\{ {12 \atop 2} \right\} \\ \frac{\partial \cos \sigma}{\partial \varrho_2} &= 2(\cos \sigma + 1) \left\{ {12 \atop 1} \right\}, \end{aligned}$$

nebst der Integrabilitätsbedingung

$$(90)\quad \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left\{ {12 \atop 2} \right\} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left\{ {12 \atop 1} \right\} \right) \cos \sigma = \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left\{ {12 \atop 1} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left\{ {12 \atop 2} \right\} - 4 \left\{ {12 \atop 1} \right\} \left\{ {12 \atop 2} \right\}.$$

106) *C. Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 15 (1898), p. 192. In dem vorliegenden Falle ist $m = H_1 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_2}$, $n = H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_1}$ und $P_1 = P_2 = 1$. Die Bedingung (86) bleibt aber ungeändert, wenn man $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ mit demselben Faktor multipliziert.

107) Ann. de l'Éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 344. *Bianchi,* Vorles. p. 353. Die Gleichung ist die Adjungierte zu derjenigen Differentialgleichung, der die Richtungskosinus als Funktion der Parameter ϱ_1, ϱ_2 genügen. Die *Christoffel*schen Verbindungen $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$ und $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ beziehen sich auf die Fundamentalgrößen $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ des sphärischen Bildes der abwickelbaren Flächen.

108) *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 18 (1890), p. 320; 19 (1891), p. 184. Vorl. p. 355.

Im allgemeinen gibt es zu jeder zyklischen Linienkongruenz nur eine normale Kreiskongruenz; ist dagegen

$$(91)\qquad \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

so gibt es deren unendlich viele, die zyklischen Strahlensysteme sind in diesem Falle *Ribaucour*sche Kongruenzen, deren erzeugende Flächen, auf Asymptotenlinien bezogen, durch den Ausdruck

$$(92)\qquad K = \frac{-1}{(\varphi(\varrho_1) + \psi(\varrho_2))^2}$$

des Krümmungsmaßes gekennzeichnet sind.[109]) In diesem Falle ist

$$(93)\qquad \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\psi(\varrho_2) - k}{\varphi(\varrho_1) + k}},$$

und jedem Wert der Konstante k entspricht eine normale Kreiskongruenz. Ist die erzeugende Fläche pseudosphärisch, so sind die Kongruenzen *Guichard*sche, d. h. solche Strahlensysteme, deren abwickelbare Flächen dieselben Bilder haben wie die Asymptotenlinien der pseudosphärischen Flächen.[108])

Eine zyklische Kongruenz ist nur dann ein Normalensystem, wenn es aus den Normalen einer pseudosphärischen Fläche besteht oder aus den Normalen einer Fläche, die mit einer pseudosphärischen Fläche das sphärische Bild der Krümmungslinien gemeinsam hat.[110]) Diese Flächen sind von *L. P. Eisenhart*[111]) eingehend untersucht worden, ebenso die sich von ihnen herleitenden zyklischen Systeme.[112])

17. Kugelkongruenzen. Mit der Theorie der Kreissysteme auf das engste verknüpft ist die Untersuchung von Kugelkongruenzen;

109) *Bianchi,* Rom. Acc. Linc. Rend. (4) 6 (1890, 1. Sem.), p. 435, 552; Annali di Mat. (2) 19 (1891), p. 185; Vorles. p. 355. *E. Cosserat,* Paris C. R. 113 (1891), p. 460, 498 zeigt, daß die Ebenen der Kreise aller Kreiskongruenzen, die sich von einer *Ribaucour*schen Kongruenz ableiten lassen, ihre Hüllflächen in den Punkten einer Geraden berühren. Diese Geraden bilden eine Kongruenz, deren abwickelbare Flächen denen der ursprünglichen Kongruenz entsprechen und die Hüllflächen der Kreisebenen in konjugierten Netzen schneiden. Vgl. auch die zusammenfassende Darstellung der zyklischen Kongruenzen von *G. Tzitzeica,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 16 (1894), p. 137.

110) *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 19; Vorles. p. 358.

111) Amer. J. 27 (1905), p. 113; 28 (1906), p. 47; Annali di Mat. (3) 12 (1905), p. 113.

112) Amer. J. 29 (1907), p. 168. Der bemerkenswerte Fall, daß die Kugeln, die über dem Brennpunktsabstand konstruiert werden können, eine feste (reelle oder imaginäre) Kugel senkrecht schneiden, war schon vorher von *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 24 (1896), p. 247 behandelt. Vgl. auch *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 322.

diese bildeten nicht nur historisch den Ausgangspunkt für die Entwicklung der Fragestellung, sondern sind auch wesentlich für die Darstellung der dreifach orthogonalen Systeme, die mit den Kreiskongruenzen verknüpft sind.

Eine Kongruenz von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Fläche (x, y, z) liegen, ist durch die Gleichung

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = R^2 \tag{94}$$

gekennzeichnet. Sie besitzt eine Hüllfläche, die aus zwei (reellen oder imaginären) Schalen besteht, entsprechend ihren beiden Berührungspunkten mit jeder Kugel der Kongruenz. Die Verbindungslinien dieser Berührungspunkte, die Berührungssehnen

$$(\xi - x)\frac{\partial x}{\partial \varrho_i} + (\eta - y)\frac{\partial y}{\partial \varrho_i} + (\zeta - z)\frac{\partial z}{\partial \varrho_i} + R\frac{\partial R}{\partial \varrho_i} = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{95}$$

bilden eine Linienkongruenz C_1, deren abwickelbaren Flächen auf der Fläche der Mittelpunkte ein konjugiertes Kurvennetz entspricht, und deren Brennebenen zu den Tangenten desselben Kurvennetzes senkrecht stehen.[113]) Sind ϱ_1, ϱ_2 die Parameter dieses konjugierten Systems, so besitzt die Gleichung desselben

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = a\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} \tag{96}$$

außer den kartesischen Koordinaten x, y, z auch die Verbindung $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ als Partikularintegrale.[114]) Konstruiert man weiter in den Endpunkten der Berührungssehnen die Tangentialebenen an die Hüllfläche, so schneiden sich diese in den Geraden einer zweiten Kongruenz C_2, deren abwickelbare Flächen einem zweiten konjugierten System auf der Fläche (x, y, z) entsprechen. Ist die Fläche auf dieses System als Koordinatenlinien bezogen, so hat die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = a\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} \tag{97}$$

die kartesischen Koordinaten und den Kugelradius R zu Partikularintegralen.[115]) Liegt der besondere Fall vor, daß auf den beiden Mänteln der Hüllfläche sich die Krümmungslinien entsprechen, so fallen auf der Fläche der Kugelmittelpunkte die beiden konjugierten Systeme

---

113) *Ribaucour,* Paris C. R. 67 (1868), p. 1334; *Darboux,* Th. des surf. II, p. 324; *Tzitzéica,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 16 (1899), p. 137. Bei einer Biegung der Fläche der Mittelpunkte bleiben die Berührungspunkte mit der Hüllfläche auf den Kugeln ungeändert.

114) *Darboux,* Th. des surf. II, p. 323.

115) *Darboux,* Th. des surf. II, p. 325.

zusammen, die Gleichungen (96) und (97) werden identisch und besitzen fünf Integrale x, y, z, R und $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. In diesem Falle ist die Kongruenz C_2 zyklisch, die Kreise des entsprechenden normalen Kreissystems gehen durch die Endpunkte der Berührungssehne und schneiden in ihnen die Hüllfläche der Kugeln rechtwinklig.[116]) Umgekehrt können je zwei Flächen F, F_1, die die Kreise einer normalen Kreiskongruenz senkrecht schneiden, als die beiden Schalen der Hüllfläche von Kugeln aufgefaßt werden, deren Mittelpunkte M in den Schnittpunkten entsprechender Normalen von F, F_1 liegen. Dem System der Krümmungslinien der gegebenen Flächen entspricht das System der abwickelbaren Flächen sowohl in der Kongruenz der Berührungssehnen als auch in der zyklischen Kongruenz, die durch die Schnittgerade entsprechender Tangentialebenen an F und F_1 gebildet wird. Die Brennpunkte dieser letzteren Kongruenz liegen auf den Tangenten an die Kurven eines konjugierten Systems der Fläche der Kugelmittelpunkte.

18. Flächen, die das sphärische Bild der Krümmungslinien gemeinsam haben. Ein zweiter besonders wichtiger Fall des *Ribaucour*schen Satzes tritt ein, wenn das konjugierte System, das auf der Mittelpunktsfläche F der Kugeln den abwickelbaren Flächen der Berührungssehnen entspricht, von Krümmungslinien gebildet ist, d. h. wenn die Gleichung der Krümmungslinien

$$(98) \qquad \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1}\right),$$

in der R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien bedeuten, außer $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$ auch das Quadrat R^2 des Kugelradius als Partikularintegral besitzt. In diesem Falle bilden die Berührungssehnen eine Normalenkongruenz, deren Orthogonalflächen dasselbe Bild der Krümmungslinien haben wie F.[117]) Die Kreise, die durch die Punkte von F und die Endpunkte der zugehörigen Berührungssehne gelegt werden können, also die inversen Bilder der Berührungssehnen bezüglich der entsprechenden Kugel, bilden eine Normalkongruenz, deren Orthogonalflächen aus denen der Berührungssehnen durch Inversion an den Kugeln der Kongruenz hervorgehen.[118]) Umgekehrt lassen sich jedem Paare von Flächen mit demselben Bilde der Krümmungslinien solche Kongruenzen von Kugeln zuordnen, deren Mittelpunkte auf der einen Fläche liegen und deren Berührungssehnen die Normalen der zweiten

116) *Ribaucour,* Paris C. R. 70 (1870), p. 332; J. de Math. (4) 7 (1891), p. 228.

117) *Ribaucour,* Paris C. R. 67 (1868), p. 1334; *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 140.

118) *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 142

Fläche sind. Die Bestimmung der normalen Kreiskongruenzen ist somit auf das engste verknüpft mit dem Problem der Flächen mit derselben sphärischen Abbildung[119]), und dieses wiederum geht mit Hilfe der *Lie*schen Berührungstransformation, die Kugeln in gerade Linien verwandelt[120]), in die Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegung über. Beide Probleme hängen von der Lösung eines Gleichungssystem von der Form

$$(99)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial\varrho_1} &= \lambda^2\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho_1} & \frac{\partial p}{\partial\varrho_1} &= \lambda^2\frac{\partial q}{\partial\varrho_1} \\ \frac{\partial\beta}{\partial\varrho_2} &= -\lambda^2\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho_2} & \frac{\partial p}{\partial\varrho_2} &= -\lambda^2\frac{\partial q}{\partial\varrho_2} \end{aligned}$$

ab, die auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit gleichen Invarianten hinauskommt.[121])

19. Die normalen Kreiskongruenzen und die Theorie der Biegung. Wenn eine Kurvenkongruenz aus lauter ebenen Kurven besteht, so umhüllen die Ebenen der Kurven eine Fläche F. Die Bedingung dafür, daß die Kongruenz normal ist, d. h. daß ihre Kurven eine Schar von ∞^1 Flächen senkrecht schneiden, hängt nur von den Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche F ab, bleibt also bei einer beliebigen Biegung der Fläche invariant.[122]) Verbiegt man also insbesondere die Hüllfläche der Ebenen aller Kreise, die eine normale Kreiskongruenz bilden, unter Mitführung ihrer Tangentialebenen, so werden die Kreise auch in der neuen Stellung eine normale Kreiskongruenz bilden. Dabei gibt es nun stets — wenn man von dem trivialen Fall absieht, daß die Ebenen der Kreise eine abwickelbare

119) Dieser Zusammenhang der Theorie der Kreissysteme mit dem Problem der sphärischen Abbildung führte *Ribaucour,* Paris C. R. 67 (1868), p. 1334 auf einen neuen Weg zur Begründung der von *Combescure* und *Darboux* gefundenen Parallelzuordnung von dreifach orthogonalen Systemen (vgl. Nr. 5). Ist nämlich ein solches gegeben, für das das Linienelement des Raumes durch den Ausdruck $ds^2 = H^2 d\varrho^2 + H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2$ dargestellt wird, und konstruiert man für alle Flächen $\varrho =$ konst. die Kugeln, für die das Quadrat des Radius dem *Lamé*schen Gleichungssystem (13) genügt, so erhält man eine *Lamé*sche Schar, deren Flächen denen der gegebenen Flächen $\varrho =$ konst. parallel zugeordnet sind.

120) III D 7 (*H. Liebmann*), Nr. **12**, p. 472.

121) *Darboux,* Th. de surf. IV, p. 170. Es ist bemerkenswert, daß die Gleichungen (99), die das Problem der sphärischen Abbildung lösen (bis auf die Bezeichnung der Parameter), mit den ersten beiden Gleichungen des Systems (39) und (44) übereinstimmen, von denen die allgemeinen dreifach orthogonalen Systeme abhängen.

122) *Ribaucour,* Paris C. R. 70 (1870), p. 330; *Bianchi,* Giorn. di Mat. 21 (1883), p. 275; *Darboux,* Th. des surf. III, p. 351.

Fläche umhüllen[123]) — eine solche Biegung, bei der die sämtlichen Kreise der Kongruenz auf einen und denselben Minimalkegel fallen.[124]) Umgekehrt erhält man die allgemeinste normale Kreiskongruenz, indem man die Tangentialebenen einer Fläche mit einem Minimalkegel schneidet und dann die Fläche unter Mitführung ihrer Tangentialebenen beliebig verbiegt. Die Gesamtheit der normalen Kreiskongruenzen, deren Ebenen eine gegebene Fläche F umhüllen, wird damit in Gruppen von je ∞^3 Kongruenzen zerlegt, von denen jede Gruppe einer Biegungsfläche der Fläche F entspricht.

Analytisch stellt sich dieser Zusammenhang zwischen der Theorie der Kreiskongruenzen und dem Biegungsproblem in der Weise dar, daß die Grundgleichung des letzteren[125])

$$(100) \qquad \Delta_{22}q + \Delta_2 q + K(\Delta_1 q - 2q) + 1 = 0,$$

in der $q = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ bedeutet, auch für die Theorie der Kreissysteme grundlegend ist. Bezeichnet R den Radius eines Kreises und a den Abstand seines Mittelpunktes vom Berührungspunkt der Kreisebene mit ihrer Hüllfläche, so genügt die Größe

$$(101) \qquad \tau = \frac{1}{2}(a^2 - R^2)$$

derselben Gleichung. Ist dann (u, v) ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf der Hüllfläche (x_0, y_0, z_0), so wird der Kreismittelpunkt durch die Gleichungen

$$(102) \qquad x_1 = x_0 - \frac{1}{E}\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{G}\frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}, \cdots$$

gegeben.[126]) Dabei ist allerdings zu beachten, daß einem reellen Paar von abwickelbaren Flächen stets imaginäre Kreise entsprechen, während eine Lösung von (100), die auf eine reelle Kreiskongruenz führt, immer eine imaginäre Biegungsfläche ergibt.[127])

Fassen wir die Ausführungen der letzten beiden Nummern zusammen, so ergibt sich, daß die Theorie der Kreissysteme das Band ist, das die Theorie der Biegung mit der Theorie der sphärischen Abbildung derart verknüpft, daß ein Fortschritt auf dem einen Gebiete

123) Betr. dieses Falles vgl. *Ribaucour*, J. de Math. (4) 7 (1891), p. 261; *J. Haag*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 257 (Thèse).

124) *Darboux*, Th. des surf. III, p. 354; *Ribaucour*, Paris C. R. 113 (1891), p. 304, 324. Der Satz gilt auch für den elliptischen und hyperbolischen Raum (*U. Sbrana*, Palermo Rend. 21 (1906), p. 24).

125) III D 6 a (*A. Voß*), p. 396; *Bianchi*, Vorles. p. 116; *Darboux*, Th. des surf. III, p. 259.

126) *L. Bianchi*, Lezioni II, p. 139.

127) Betreffs der Realitätsverhältnisse vgl. *Darboux*, Th. des surf. IV, p. 162. *Bianchi*, Lezioni II, p. 143.

unmittelbar einen Fortschritt in der andern Richtung bedingt. Von den zahlreichen daraus gezogenen Schlußfolgerungen, die sich in der angeführten Literatur finden, sei nur noch ein Satz *Ribaucours* genannt: Besitzen zwei Flächen dieselbe sphärische Abbildung und verbiegt man die Hüllfläche der Ebenen entsprechender Normalen unter Mitführung ihrer Tangentialebenen, so bilden die Geraden auch in der neuen Lage die Normalensysteme zweier Flächen mit derselben sphärischen Abbildung.[128])

20. Besondere Kreiskongruenzen. Der *Darboux*sche Satz der vorigen Nummer ist das wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung besonderer Typen von normalen Kreiskongruenzen, von denen die bemerkenswertesten hier zusammengestellt seien.

1. *Normale Kreissysteme, die aus kongruenten Kreisen bestehen.* Bestehen die Kreise einer Normalkongruenz aus lauter kongruenten Kreisen, so ist die Hüllfläche entweder abwickelbar — in diesem Falle entsteht die Kongruenz, indem die Ebene einer Schar kongruenter Kreise auf einer abwickelbaren Fläche abrollt —, oder aber die Hüllfläche läßt eine solche Biegung zu, daß die in den Tangentialebenen mitgeführten Kreise der Kongruenz alle auf einen Minimalkegel fallen. Ist R der konstante Radius aller Kreise, so wird die Biegungsfläche eine Kugel mit dem Radius Ri; die gesuchten Kongruenzen bestehen demnach aus den Kreisen vom Radius R, die um die Punkte einer Fläche F von dem konstanten Krümmungsmaß $-\frac{1}{R^2}$ in den Tangentialebenen der Fläche konstruiert werden können[129]); die Orthogonalflächen der Kreise sind dann die Flächen desselben Krümmungsmaßes $-\frac{1}{R^2}$, die aus F durch die *Bianchi*sche Komplementärtransformation hervorgehen.

2. Die orthogonalen Kreiskongruenzen, deren Ebenen durch einen Punkt gehen, bestehen aus Kreisen, die eine Kugel senkrecht schneiden oder deren Ebenen einen festen Kegel umhüllen (vgl. Nr. 15).

---

128) *Ribaucour,* Paris C. R. 113 (1891), p. 304, 324; *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 145.

129) *Ribaucour,* Paris C. R. 70 (1870), p. 331; *Bianchi,* Giorn. di Mat. 21 (1883), p. 278. Vgl. III D 6 a (*A. Voss*), p. 417. — Die Frage nach den normalen Kurvenkongruenzen, die aus lauter kongruenten ebenen Kurven bestehen, ist von *Ribaucour,* J. de Math. (4) 7 (1891), p. 256 auf die Bestimmung derjenigen ebenen Kurven zurückgeführt worden, die durch die Gleichung $p\varrho = kx$ zwischen dem Krümmungsradius ϱ, dem Abstand p der Tangente vom Koordinatenanfang und der Abszisse x ($k =$ konst.). Die Ebenen der Kurven umhüllen eine Fläche konstanter Krümmung.

Ihre endliche Darstellung gab *S. Carrus*[130]), auch für den Fall, daß der feste Punkt im Unendlichen liegt.

3. Normale Kreissysteme, deren Achsen eine Normalkongruenz bilden (vgl. Nr. 16); die Orthogonalflächen der Achsenkongruenz haben dasselbe sphärische Bild der Krümmungslinien wie eine pseudosphärische Fläche.[130a]) Genauer untersucht ist der Fall, daß die Kugeln über dem Brennpunktsabstand als Durchmesser eine feste (reelle oder imaginäre) Kugel senkrecht schneiden. Die Normalen ihrer Orthogonalflächen bilden ebenfalls zyklische Normalsysteme derselben Art.[131])

4. Normale Kreiskongruenzen, deren Ebenen ein Paraboloid umhüllen, sind von *Bianchi*[132]) im Anschluß an die Biegungstheorie des Paraboloids untersucht worden, mit der ja das Problem ihrer Bestimmung analytisch gleichwertig ist.

21. Die zyklischen Systeme. Mit den normalen Kreiskongruenzen sind gewisse dreifach orthogonale Systeme auf das engste verknüpft, die als *zyklische Systeme* bezeichnet werden.[133]) Die erste *Lamé*sche Schar eines solchen besteht aus den Orthogonalflächen (F) der Kongruenz; um die Flächen ihrer Ergänzungsscharen zu erhalten, geht man von einer Fläche F aus und konstruiert die Kreise der Kongruenz, die eine beliebige Krümmungslinie von F schneiden; diese liegen dann als Krümmungslinien auf einer der gesuchten Flächen. Die zyklischen Systeme sind demnach dadurch gekennzeichnet, daß zwei ihrer *Lamé*schen Familien aus Flächen besteht, die eine Schar von kreisförmigen Krümmungslinien besitzen.

Zur Bestimmung der zyklischen Systeme geht man entweder von einer zyklischen Linienkongruenz aus[134]) oder von einer Orthogonalfläche der Kreiskongruenz.[135]) Im ersten Falle ist nach Bestimmung der Mittelfläche der Kongruenz durch Auflösung der Gleichung (87) und der daranschließenden Quadraturen der Ort der Kreismittelpunkte

---

130) Ann. de la Fac. de Toulouse (2) 8 (1906), p. 153. Die Kongruenzen von Kreisen, deren Ebenen eine Kugel umhüllen, untersucht *L. Bianchi*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19 (1902), p. 325. Die zugehörige zyklische Strahlenkongruenz ist in diesem Falle eine Normalenkongruenz.

130a) *Bianchi*, Vorl. p. 358.

131) *L. Bianchi*, Annali di Mat. (2) 24 (1896), p. 347.

132) Annali di Mat. (3) 24 (1904), p. 300. Allgemeiner wird dort das Problem der normalen Kreiskongruenzen behandelt, deren Kreisebenen eine Fläche umhüllen, deren erste Fundamentalform $ds^2 = (a_{11}u^2 + 2a_{12}u + a_{22})du^2 \pm 2(a_{11}uv + a_{13}u + a_{12}v + a_{23})du\,dv + (a_{11}v^2 + 2a_{13}v + a_{33})dv^2$ ist.

133) *Ribaucour*, Paris C. R. 70 (1870), p. 331.

134) *Bianchi*, Annali di Mat. (2) 19 (1891), p. 186; Vorles. p. 359.

135) *Darboux*, Th. des surf. II, p. 341

zu bestimmen, worauf sich die Gleichungen der Orthogonalflächen nach Auflösung einer totalen Differentialgleichung ergeben. Im zweiten Falle konstruiert man eine Kongruenz von Kugeln, die die gegebene Orthogonalfläche F berühren, und zwar derart, daß auf dem zweiten Mantel F_1 der Hüllfläche der Kugeln die Krümmungslinien denen der gegebenen Fläche entsprechen; dann ist F_1 eine zweite Orthogonalfläche der Kreiskongruenz. Die Bestimmung dieser Kugeln erfordert die Auflösung der *Rodrigues*schen Differentialgleichungen

$$(103)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + R_1 \frac{\partial \mu}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} + R_2 \frac{\partial \mu}{\partial \varrho_2} = 0,$$

(R_1, R_2 sind die Hauptkrümmungsradien der gegebenen Fläche), die, nach λ bzw. μ aufgelöst, die Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergeben, denen die Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten (x, y, z) bzw. (X, Y, Z, V) von F als Funktionen der Parameter ϱ_1, ϱ_2 ihrer Krümmungslinien genügen. Ist ein zusammengehöriges Lösungssystem λ, μ gefunden, so werden die Kugeln durch eine Gleichung

$$(104)\qquad \frac{\mu}{2\lambda}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] \\ + X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0$$

dargestellt. Ist für λ eine bestimmte Partikularlösung der Gleichung gewählt, der x, y, z nebst $x^2 + y^2 + z^2$ genügen, so wird die zugehörige Funktion μ durch eine Quadratur, also nur bis auf eine additive Konstante ϱ bestimmt; jedem Werte von λ entsprechen demnach ∞^1 Flächen F_1, und alle diese Flächen sind Orthogonalflächen desselben Kreissystems.

Ist ein beliebiges dreifach orthogonales System bekannt, dem die Fläche F angehört, so kennt man auch eine Partikularlösung von λ, den *Lamé*schen Differentialparameter H der Schar $\varrho =$ konst., der die Fläche F angehört. Dieser Lösung entspricht daher auch ein orthogonales System von Kreisen, und zwar ist dieses von den Krümmungskreisen der Orthogonaltrajektorien der Flächen $\varrho =$ konst. in ihren Schnittpunkten mit der gegebenen Fläche F gebildet.[136]) Die Ebenen dieser Krümmungskreise stehen auf den Äquidistanzkurven $H =$ konst. senkrecht.

In der Tatsache, daß zu jedem dreifach orthogonalen Flächensystem längs einer beliebigen seiner Flächen ein berührendes zyklisches System konstruiert werden kann, liegt das Interesse begründet, das dieses spezielle Problem für die allgemeine Theorie der Orthogonalsysteme besitzt.

136) *Ribaucour,* Paris C. R. 70 (1870), p. 332; J. de Math. (4) 7 (1891), p. 231; *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 13 (1885), p. 193.

Wird ein zyklisches System einer *Combescure*schen Paralleltransformation unterworfen, so verwandelt es sich in ein Orthogonalsystem, in welchem die eine *Lamé*sche Schar lauter ebene Orthogonaltrajektorien besitzt und die beiden anderen je eine Schar von ebenen Krümmungslinien. Umgekehrt ist jedes Orthogonalsystem mit einer Schar ebener Krümmungslinien unendlich vielen zyklischen Systemen parallel zugeordnet.[137]) Andererseits steht auch diese Frage mit dem Biegungsproblem in engster Beziehung: Wenn man eine Fläche F auf einer ihrer Biegungsflächen F_1 abrollen läßt, so schneidet eine mit F fest verbundene Tangentenfläche einer Minimalkurve die jeweilige gemeinsame Berührungsebene in einer Kurve C. Die Gesamtheit dieser Kurven C bildet die allgemeinste normale Kongruenz von ebenen Kurven, deren Orthogonalflächen eine *Lamé*sche Schar bilden.[138])

137) Auf diesem Wege bestimmt *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 296 alle Orthogonalsysteme mit einer Schar von ebenen Orthogonaltrajektorien. Die Fragestellung wurde zuerst von *O. Bonnet,* Paris C. R. 54 (1862), p. 554, 655 in Angriff genommen und von *Ribaucour*, Paris C. R. 70 (1870), p. 330; *Darboux,* Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 124; *P. Adam,* Thèse, Paris 1887 (vgl. Fußnote 56) und *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 19 (1891), p. 177, Vorles., p. 648 weiter gefördert. Mit *Lamé*schen Scharen, deren Orthogonaltrajektorien ebene Kurven sind, deren Ebenen durch einen festen Punkt gehen, beschäftigt sich *S. Carrus,* Paris C. R. 143 (1906), p. 23; Toulouse Ann. (2) 8 (1906), p 153—239.

138) *Ribaucour,* Paris C. R. 113 (1891), p. 326; *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 164; *E. Cosserat,* Toulouse Ann. 8 (1894), B. 1—9. Auf dieser Verallgemeinerung des *Darboux*schen Satzes beruht eine zweite Methode zur Bestimmung des Orthogonalsystems mit ebenen Krümmungslinien. — Es ist zu beachten, daß diese Konstruktion nicht die allgemeinste Normalenkongruenz ebener Kurven ergibt, sondern nur diejenigen, deren Orthogonalflächen eine *Lamé*sche Schar bilden. Während dies bei normalen Geraden- und Kreiskongruenzen immer der Fall ist [*Ribaucour,* Paris C. R. 70 (1870), p. 333; *Bianchi,* Giorn. di Mat. 12 (1884), p. 344], ist im allgemeinen die Orthogonalschar einer Kurvenkongruenz offenbar nicht in einem dreifach orthogonalen Flächensystem enthalten, da ja zu jeder beliebigen Schar von Flächen eine Kongruenz von Kurven gehört, die sie senkrecht durchsetzen. Das Problem der Kongruenz ebener Kurven, die eine Schar von Orthogonalflächen besitzen, ist von *A. Ribaucour,* J. de Math. (4) 7 (1891) gestellt, sodann von *E. Cosserat,* Toulouse Mém. (10) 1 (1901), p. 144, Nouv. Ann. (3) 19 (1900), p. 372 für besondere Fälle gelöst. *S. Carrus,* Paris C. R. 140 (1905), p. 208, Toulouse Ann. (2) 8 (1906), p. 153 führt die Aufgabe auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung zurück, die in ihrem Bau mit der *Darboux*schen Gleichung (Nr. 8, Formel 49) die größte Ähnlichkeit aufweist und von der *Darboux,* Paris C. R. 140 (1905), p. 211 ein erstes Integral angibt. An ein spezielles von *Carrus* behandeltes Beispiel knüpft *E. Goursat,* Toulouse Ann. (2) 8, p. 289 an. *E. Mosch,* Math. Ann. 63 (1907), p. 573 behandelt das Problem selbständig und bestimmt insbesondere die Scharen von abwickelbaren Flächen, die ebene Orthogonaltrajektorien besitzen.

Unter diesen Systemen gibt es unendlich viele, bei denen die Flächen der einen *Lamé*schen Schar lauter ebene Krümmungslinien besitzen; diese gehen durch eine Paralleltransformation aus den *Lamé*schen Scharen von Zykliden hervor.[139])

An die Untersuchung der *Lamé*schen Scharen mit ebenen Orthogonaltrajektorien knüpft sich naturgemäß die Bestimmung der dreifach orthogonalen Systeme mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien. Man erhält das allgemeinste derartige System, indem man ein System mit einer Schar ebener Parameterlinien einer Inversion unterwirft und hinterher eine spezielle Paralleltransformation anwendet.[140])

V. Die Bianchischen Systeme.

22. Die Bianchischen Systeme. Die in Nr. 20 erwähnten Kreiskongruenzen, die eine Schar von pseudosphärischen Orthogonalflächen besitzen, führten naturgemäß auf die Frage nach den allgemeinsten *Lamé*schen Scharen, die aus lauter Flächen konstanter Krümmung zusammengesetzt sind. Entwickelt man mit Hilfe der Hauptkrümmungsradien R_{01}, R_{02} (vgl. Formel (10′), Nr. 3) die Bedingung dafür, daß für die Fläche $\varrho =$ konst. das Krümmungsmaß $-\frac{1}{R^2}$ konstant sei ($R = R(\varrho)$), so ergibt sich[141]), daß in dem zugehörigen krummlinigen Koordinatensystem das Linienelement des Raumes durch den Ausdruck:

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varrho}\right)^2 d\varrho^2 + \cos^2 \omega \, d\varrho_1^2 + \sin^2 \omega \, d\varrho_2^2 \tag{105}$$

bestimmt wird, wobei die Funktion ω dem System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
A &\equiv \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} - \frac{\sin \omega \cos \omega}{R^2} = 0, \\
B &\equiv \frac{\partial^3 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_2 \, \partial \varrho_3} - \operatorname{ctg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_2} + \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_1} = 0, \\
C &\equiv \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_1}\right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\sin \omega}{R}\right) - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_2} = 0, \\
D &\equiv \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_2}\right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\cos \omega}{R}\right) + \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho \, \partial \varrho_1} = 0
\end{aligned} \tag{106}$$

genügt[141]), zwischen deren linken Seiten drei Identitäten bestehen.[142])

---

139) *Darboux,* Syst. orth., Anhang III, p. 529, Mém. de l'Acad. des Sc. 51; *J. Haag,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 337.

140) *Darboux,* Th. des surf. IV, p. 300—307. Auf anderem Wege von *C. Guichard,* Paris C. R. 150 (1910), p. 1090 gefunden.

141) *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 13 (1885), p. 185, (2) 14 (1886), p. 118 Palermo Rend. 8 (1894), p. 26; Vorles., p. 679.

142) *Darboux,* Syst. orth., p. 312—313.

Die beiden letzten Gleichungen sind daher, wie *Darboux*[142]) bemerkt hat, einfache Folgerungen der ersten, während die zweite mit der Differentialgleichung dritter Ordnung übereinstimmt, auf die die Bestimmung der allgemeinen dreifach orthogonalen Systeme zurückgeführt wurde (Nr. 7 (41)).

Ein solches *Bianchi*sches System ist bestimmt, wenn eine pseudosphärische Ausgangsfläche $\varrho = 0$, eine Orthogonaltrajektorie ϱ der pseudosphärischen Flächenschar und das Krümmungsmaß $-\frac{1}{R^2}$ als Funktion von ϱ gegeben sind. Die Gesamtheit der *Bianchi*schen Systeme hängt von fünf willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab.[143])

Die Frage nach den *Lamé*schen Scharen aus Flächen konstanter positiver Krümmung ist analytisch dem Problem der pseudosphärischen Scharen gleichwertig; es bietet auch keine Schwierigkeiten, die Gleichungen derart umzugestalten, daß reelle Größen in reeller Form dargestellt werden[144]), und auch die folgenden Entwicklungen gelten, immer unter sachgemäßer Berücksichtigung des Imaginären, für positiv gekrümmte Flächenscharen.

Die Flächen konstanter Krümmung dieser *Bianchi*schen Systeme sind sich durch ihre Orthogonaltrajektorien derart zugeordnet, daß sich auf ihnen die konjugierten Systeme, also auch Asymptotenlinien entsprechen, und zwar letztere derart, daß entsprechende Bogen gleich lang sind.[145])

23. Die Weingartenschen Systeme. Eine Untergruppe der *Bianchi*schen Systeme wird von den Orthogonalsystemen gebildet, die eine *Lamé*sche Schar von *isometrischen* Flächen konstanter Krümmung enthalten. Auf diese Systeme, die für das ganze Problem den Ausgangspunkt bilden, hat zuerst *J. Weingarten*[146]) hingewiesen, der für sie folgende Entstehungsweise angibt: Man trage auf den Normalen einer pseudosphärischen Fläche, für die das Quadrat des Linienelements auf die Form

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

gebracht ist, das unendlich kleine Stück $\varepsilon \frac{dr}{du}$ ab, dann liegen die End-

143) *Bianchi,* Vorles., p. 680.

144) *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 13, p. 187; Vorles., p. 680—681.

145) *Bianchi,* Vorles. p. 682.

146) Nach einer Mitteilung von *L. Bianchi* [Rom. Acc. Linc. Rend. (4) 1 (1885), p. 163]. Indessen schreibt *Weingarten* das Verdienst um die Lösung des Problems durchaus *Bianchi* zu (vgl. das Referat *W.* über die erste Auflage von *Darboux'* Systèmes orthogonaux in dem Jahrb. f. d. Fortschr. der Math. 29 (1898), p. 476), der sie in Annali (2) 13, p. 177—234 eingehend studierte.

punkte wieder auf einer Fläche derselben konstanten Krümmung, und die stetige Wiederholung des Vorgangs ergibt eine *Lamé*sche Familie. Die Gleichungen der *Bianchi*schen Systeme lassen in diesem Falle eine Integration zu, so daß zu der ersten Gleichung (106) noch die partielle Differentialgleichung *zweiter* Ordnung

$$(107)\qquad \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho\,\partial\varrho_2}\right)^2-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}\right)^2=C$$

hinzutritt ($C=$ konst.). Für eine jede solche *Lamé*sche Schar sind die Äquidistanzkurven $\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}=$ konst. parallele geodätische Kreise[147]), und jeder der drei Arten derselben entsprechen drei Arten von *Weingarten*schen Systemen. Von besonderem Interesse sind die Systeme, für die $C=0$ ist, bei denen alle Orthogonaltrajektorien der pseudosphärischen Flächen Kurven der konstanten Krümmung $\frac{1}{R}$ sind und die daher als *Weingarten*sche Systeme konstanter Krümmung bezeichnet werden.[148]) Sie sind die einzigen dreifach orthogonalen Systeme, bei denen die Orthogonalkurven der einen *Lamé*schen Schar aus lauter Kurven derselben konstanten Krümmung besteht. Zu ihnen gehört als einfachste Klasse das zyklische System von konstanten Radien.

Zu den *Weingarten*schen Systemen gehören bemerkenswerte eingehend untersuchte besondere Typen. So erhält man aus jeder beliebigen Schraubenfläche konstanter Krümmung durch Drehung um die Achse eine *Lamé*sche Schar.[149]) Diese wird durch zwei weitere Scharen von Schraubenflächen konstanter Krümmung zu einem dreifach orthogonalen System ergänzt, und zwar besteht zwischen den Krümmungsmaßen K, K_1, K_2 ie dreier sich schneidenden Flächen die einfache Beziehung

$$(108)\qquad K+K_1+K_2=0.$$

Zwei der Scharen enthalten Flächen negativen, die dritte Flächen

147) Annali di Mat. (2) 13, p. 187; Vorles. p. 693.

148) Annali di Mat. (2) 13, p. 177; Vorles. p. 695. An derselben Stelle werden auch die Flächen untersucht, die die Flächen konstanter Krümmung zu einem dreifach orthogonalen System ergänzen. Diese von *Bianchi* so genannten *hyperzyklischen Flächen* sind dadurch charakterisiert, daß eine Schar von Krümmungslinien aus Kurven derselben konstanten Krümmung besteht. Ihre Bestimmung hängt von einer Differentialgleichung dritter Ordnung ab. Die Krümmungsmittelpunkte der Kurvenschar konstanter Krümmung liegen auf einer zweiten hyperzyklischen Fläche.

149) *Bianchi,* Annali di Mat. (2) 13, p. 39—52; Vorles., p. 699. Die ganze Theorie gilt übrigens auch im nichteuklidischen Raume, vgl. *Bianchi,* Atti R. Acc. dei Lincei (4) 4 (1887), p. 221.

positiven Krümmungsmaßes.[150]) Ihre explizite Darstellung wird durch elliptische Funktionen geleistet.[151])

24. Die Bäcklundsche Transformation. Aus jedem *Bianchi*schen System kann man unendlich viele neue durch eine Transformation herleiten, die für jede einzelne Fläche konstanter Krümmung $\varrho =$ konst. des Systems auf eine *Bäcklund*sche Transformation[152]) hinauskommt. Dabei ist die transformierte Flächenfamilie bestimmt, wenn man *einer* Fläche $\varrho =$ konst. eine beliebig gewählte *Bäcklund*sche Transformierte zuordnet. Die Transformation ist durch die Gleichungen

$$(108)\quad \begin{gathered} \frac{\partial \omega_1}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{k}(\cos\omega \sin\omega_1 + \sin\sigma \sin\omega \cos\omega_1), \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} = -\frac{1}{k}(\sin\omega \cos\omega_1 + \sin\sigma \cos\omega \sin\omega_1), \\ \sin\sigma \frac{\partial \omega_1}{\partial \varrho} + k\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho\, \partial \varrho_1} + k\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho\,\partial\varrho_2} + \frac{\partial\omega}{\partial\varrho} = 0 \end{gathered}$$

bestimmt[153]), in denen $k = R\cos\sigma$ eine absolute Konstante ist. Bemerkenswert ist, daß für diese *Bäcklund*sche Transformation die *Weingarten*schen Systeme eine Untergruppe bilden und unter diesen wiederum die Systeme konstanter Krümmung.

Aus der *Bäcklund*schen Transformation ist neuerdings von *Bianchi*[154])

---

150) Mit der Frage nach allen Orthogonalsystemen, die aus lauter Flächen konstanter Krümmung bestehen, beschäftigt sich *L. Carnera* (G. di Mat. 29 (1901), p. 61). Indessen sind seine Untersuchungen nicht ganz erschöpfend.

151) Auf dasselbe System wird *Darboux* (Syst. orth., p. 322) bei der Frage nach den Flächensystemen geführt, für welche die H_i und β_{ik} alle Funktionen desselben Parameters sind [vgl. auch *J. Haag*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27, p. 276]. Weitere besondere Systeme, die Scharen von *Enneper*schen Flächen enthalten, untersucht *Bianchi*, Annali di Mat. (2) 13, p. 202.

152) Vgl. III D 6 a (*A. Voss*), p. 416.

153) Rom. Acc. Linc. Rend. (4) 1 (1885), p. 244, (5) 1 (1392), p. 156; Annali di Mat. (2) 13, p. 215—218; Vorles., p. 684—686. Für die *Lamé*schen Familien der Flächen konstanter Krümmung gilt der Vertauschbarkeitssatz der *Bäcklund*schen Transformationen genau wie für die einzelne Fläche: Sind (F_1), (F_2) zwei pseudosphärische *Lamé*sche Scharen, die mit ein und derselben Schar F durch die *Bäcklund*schen Transformationen B_{k_1} bzw. B_{k_2} verbunden sind, so gibt es eine vierte pseudosphärische Flächenschar F', die mit (F_1), (F_2) durch zwei *Bäcklund*sche Transformationen B'_{k_1} bzw. B'_{k_2} (mit vertauschten Konstanten k_1, k_2) verknüpft sind.

154) Annali di Mat. (3) 19 (1912), p. 251; Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche. Mem Soc. It. delle Sc. (detta dei XL) (3) 18 (1913). Für die aus pseudosphärischen Flächen durch stetige Aufeinanderfolge *Bäcklund*scher Transformationen (von konstantem oder veränderlichem σ) entstehenden Flächenscharen gelten ähnliche Sätze wie für

eine neue Transformation der pseudosphärischen Flächen und ihrer Systeme hergeleitet worden, die sich geometrisch folgendermaßen kennzeichnen läßt. Es sei F eine pseudosphärische Fläche vom Krümmungsmaß -1, F_1 und F_2 zwei Flächen, die aus F durch zwei *Bäcklund*sche Transformationen mit derselben Konstante hervorgehen. Dann liegen entsprechende Punkte von F_1 und F_2 auf einem Kreise, der um den zugeordneten Punkt der Ausgangsfläche F in ihrer Tangentialebene mit dem Radius $\cos\sigma$ konstruiert ist. Sind F_1 und F_2 so gewählt, daß ihr Abstand unendlich klein ist, so kann man durch die Aufeinanderfolge der *Bäcklund*schen Transformationen, die F_1 in F und F in F_2 überführen, die Fläche F_1 in die benachbarte Fläche F_2 überführen. Diesen Vorgang bezeichnet man als eine infinitesimale *Bäcklund*sche Transformation. Wendet man auf F_2 wieder eine infinitesimale *Bäcklund*sche Transformation an und setzt das Verfahren fort, so ergibt sich eine stetige Schar von isometrischen Flächen konstanter Krümmung, auf denen sich, da sie durch eine Folge von *Bäcklund*schen Transformationen auseinander hervorgehen, die Asymptotenlinien entsprechen. Auch jede *Lamé*sche Schar von Flächen konstanter Krümmung wird wieder in eine *Lamé*sche Schar transformiert werden. Die Bahnkurven der Transformation sind *Bertrand*sche Kurven; sie durchsetzen jede der Flächen konstanter Krümmung unter konstantem Winkel.

25. **Die Bianchischen Systeme und die Theorie der Biegung.** Die Schmiegungsebenen an die Orthogonaltrajektorien einer Fläche F konstanter Krümmung, die einem *Weingarten*schen System angehört, umhüllen eine Fläche derselben konstanten Krümmung, die mit F durch eine Komplementärtransformation verknüpft ist. Die Gesamtheit der so aus einer pseudosphärischen *Lamé*schen Schar eines *Weingarten*schen Systems erzeugten Flächen F_1 bildet wieder eine *Lamé*sche Schar, die dem gegebenen komplementären *Weingarten*schen System angehört; die Flächen F_1 sind also, was besonders betont sei, isometrisch.

Ist ein allgemeines *Bianchi*sches System vorgelegt, in dem die Krümmung K der Flächen konstanter Krümmung $\varrho =$ konst. sich von Fläche zu Fläche ändert, so sind die Hüllflächen der Schmiegungs-

die *Weingarten*schen Systeme, in die sie für $\sigma = 0$ übergehen. — Ganz anderer Art ist die infinitesimale Isogonaltransformation, bei der die Richtung der Verschiebung der einzelnen Punkte mit der Fläche einen konstanten Winkel bildet. Vgl. die *Bianchi*sche Untersuchung Annali di Mat. (3) 18 (1911), p. 1—68, 185—244. Die Theorie der *Bianchi*schen Systeme läßt sich übrigens auch für den nichteuklidischen Raum in ganz ähnlicher Weise entwickeln.

ebenen der Orthogonaltrajektorien auch aufeinander abwickelbar[155]), und zwar auf eine Fläche zweiten Grades F_2

$$y^2 + z^2 + (x - y + iz)^2 = \frac{1}{K}.$$

Ihre Gesamtheit bildet eine Schar eines dreifach *konjugierten* Systems (vgl. Nr. 6), und zwar entspricht den Krümmungslinien auf den Flächen des *Bianchi*schen Orthogonalsystems das permanent konjugierte Netz auf den Biegungsflächen[156]) der F_2, und die Trajektorien ϱ bestimmen auf den Flächen der Schar eine Punktzuordnung, die konjugierte Netze wieder in konjugierte überführt.[157])

Dieser bemerkenswerte Zusammenhang des *Bianchi*schen Systems mit der Biegung einer gewissen Fläche zweiten Grades ergibt sich unmittelbar aus den Beziehungen, die in Nr. **19** und **21** zwischen der Theorie der Biegung und den zyklischen Systemen *Ribaucours* einerseits und zwischen diesen und den allgemein dreifach orthogonalen Systemen andererseits dargelegt wurden.

VI. Kinematische Fragestellungen.

26. Die Laméschen Scharen, die aus kongruenten Flächen bestehen. Die Normalen an die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems bilden in jedem Punkte ein rechtwinkliges Dreikant, ein *Soma*[158]), und die Untersuchung der Bewegung, die dieses Soma in alle möglichen Lagen überführt, führt in einem wichtigen Sonderfall auf die Theorie der Orthogonalsysteme. Diese läßt sich demgemäß nicht nur auf rein kinematischer Grundlage aufbauen[159]), wobei sich die *Lamé-Darboux*schen Differentialgleichungen als Folgerungen kinematischer Tatsachen ergeben (vgl. Nr. 3), sie gewinnt vielmehr durch den Anschluß an Bewegungsprobleme an neuen und fruchtbaren Fragestellungen. Insbesondere war es seit seinem ersten Auftreten (1866)

155) *Bianchi,* Vorles., p. 710.

156) Eine *Bäcklund*sche Transformation der Flächen konstanter Krümmung führt auf eine Transformation der zugehörigen F_2; diese ist ein Sonderfall der von *Bianchi* entdeckten Transformationen B_k der Biegungsflächen der Flächen 2. Ordnung. Die *Bianchi*schen Untersuchungen betr. des Biegungsproblems der F_2 sind zusammengefaßt in *Bianchis* Lezioni, Bd. III, in verkürzter Form in seinen „Vorlesungen", Kap. 19—21.

157) *L. Bianchi,* Annali di Mat. (3) 23 (1914), p. 135—214. In der Abhandlung wird noch eine große Anzahl weiterer dreifach konjugierter Systeme studiert, die eine Schar von Biegungsflächen von Flächen 2. Ordnung in derselben Punktzuordnung enthalten.

158) *E. Study,* Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903, p. 556.

159) *E. Beltrami,* Rend. Ist. Lomb. (2) 5 (1872), p. 474; Opere II, p. 426.

das Problem der *Lamé*schen Scharen, die durch die Bewegung einer unveränderlichen Fläche erzeugt werden, das eine große Anzahl von bemerkenswerten Untersuchungen veranlaßt hat.[160]) Auf diese Frage wurde *Darboux*[161]) zum ersten Male bei der Untersuchung eines integrablen Falles der Differentialgleichung für die Funktion V geführt, auf deren Bestimmung er das allgemeine Problem des dreifach orthogonalen Systems zurückgeführt hatte (vgl. Nr. 3, Formel (14)). Die von ihm gefundenen Systeme hängen von drei Funktionen einer Veränderlichen ab, und eine ihrer *Lamé*schen Scharen wird durch die Parallelverschiebung einer unveränderlichen Fläche erzeugt.[162])

Die allgemeine Frage der *Lamé*schen Systeme, die aus kongruenten Flächen bestehen, knüpft zweckmäßig an die Form der Differentialgleichung dritter Ordnung an, die ihr *M. Lévy* (vgl. Nr. 8, Formel (50)) gegeben hat. Setzt man

$$\Delta\vartheta = A\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}, \tag{110}$$

wobei A, B, C die durch die Gleichungen (51) bestimmten Werte besitzen, so wird eine Fläche (x, y, z), wenn die Richtungskosinus ihrer Normalen mit X, Y, Z bezeichnet sind, durch eine Bewegung mit den Drehkomponenten α, β, γ und den Schiebungskomponenten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ eine *Lamé*sche Schar erzeugen, wenn sie der Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha\Delta(Zy - Yz) + \beta\Delta(Xz - Zx) + \gamma\Delta(Yx - Xy)\\ + \alpha_0\Delta X + \beta_0\Delta Y + \gamma_0\Delta Z = 0\end{aligned} \tag{111}$$

genügt.[163]) Aus der bezüglich der Bewegungskomponenten $\alpha \ldots \gamma_0$

160) Fragestellungen speziellerer Natur, die durch kinematische Vorstellungen erzeugt werden, seien kurz erwähnt. 1. Die einzigen Systeme, für die die Determinante des Richtungskosinus der Koordinatenlinien $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$ bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch ist, sind die drei Scharen sich senkrecht durchschneidender Ebenen, das aus diesem durch Inversion entstehende Kugelsystem, sowie die diesem parallel zugeordneten Systeme [*L. Lévy,* Mém. cour. et mém. des Sav. Étr. de l'Acad. de Belgique 54 (1896), p. 46]. 2. Die reversiblen Systeme; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß bei der inversen Bewegung des Normaldreikants das Koordinatendreikant ein dreifach orthogonales System beschreibt. Sie gehören zu den aus *Dupin*schen Zykliden bestehenden dreifach orthogonalen Systemen. *Darboux,* Paris C. R. 147 (1908), p. 287, 325, 367, 399; geometrische Herleitung dieses Systems von *Fouché,* Nouv. Ann. de Math. (4) 12 (1912), p. 49, 97, 156.

161) Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 120.

162) Die Schlußweise ist auch für dreifach konjugierte Systeme anwendbar. S. Syst. orth., p. 364ff.

163) Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7, p. 124; Syst. orth., p. 84.

linearen Form dieser Gleichung ergibt sich, daß eine Fläche, die bei zwei Bewegungen eine *Lamé*sche Fläche erzeugt, eine solche auch bei allen aus ihnen komponierten Bewegungen beschreibt.

Der allgemeinste Fall ist der, daß eine Fläche durch eine einzige Bewegung eine *Lamé*sche Familie erzeugt; die Koeffizienten $\alpha \ldots \gamma_0$ sind dann konstant, und die Bewegung ist i. a. eine Schraubung. Durch passende Wahl des Koordinatensystems läßt sich die Gleichung des Problems auf die einfache Form

$$\Delta \frac{qx - py + k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0 \tag{112}$$

bringen, d. h. einer jeden Lösung der *Lévy*schen Gleichung $\Delta \vartheta = 0$ entspricht die Reduktion der vorliegenden Aufgabe auf eine partielle Differentialgleichung für z, die aber schon in einfachen Fällen wenig handlich ist.[164])

Die geometrische Bedeutung der das Problem beherrschenden Differentialgleichung (111) wurde von *Petot*[165]) aufgedeckt: Konstruiert man für jeden Punkt der Fläche die Mittelpunkte der geodätischen Krümmung der Krümmungslinien, so gehören die Verbindungslinien dieser Punkte einem linearen Komplex an. Unterwirft man die Fläche der Schraubung, die zur Erzeugung der *Lamé*schen Familie führt, so bewegen sich die Komplexgeraden senkrecht zu den Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte.

Reduziert sich die Schraubenbewegung auf eine Schiebung[166]), so reduziert sich das Problem auf die Bestimmung der Flächen, deren Linienelement sich auf die Form

$$ds^2 = \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} d\varrho_1^2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} d\varrho_2^2 \tag{113}$$

bringen läßt. Dabei ist die z-Achse die Verschiebungsrichtung, ϱ_1 und ϱ_2 die Parameter der Krümmungslinien.[167]) In derselben Weise

164) Eine bemerkenswerte Partikularlösung untersucht *Darboux* [Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7, p. 125; Syst. orth., p. 86]; sie entspricht der Lösung $\vartheta =$ konst. und führt auf die Flächen, die mit ihren Parallelflächen kongruent sind. Sie besitzen nach einer Bemerkung von *J. Haag*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 267, zwei Schraubenflächen als Evolutenscharen, woraus eine einfache Erzeugungsweise folgt.

165) Paris C. R. 118 (1894), p. 1409; *Darboux*, Syst. orth., p. 90.

166) Für diesen Fall hat *P. Adam*, Paris C. R. 121 (1895), p. 812 die Differentialgleichung aufgestellt. Partikuläre Integrale (die Perisphären) sind von *L. Lévy* [J. de Math. (4) 8 (1892), p. 351], ganz spezielle Systeme schon vorher von *P. Adam* (Thèse, Paris 1887) angegeben worden. Vgl. auch *Petot*, Paris C. R. 112 (1891), p. 1426.

167) *J. Haag*, Ann. de l'É. Norm. (3) 27 (1910), p. 265.

führt der Fall der Rotation auf Flächen, die durch das Linienelement

$$(114) \qquad ds^2 = \varrho^2\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v}dv^2\right)$$

charakterisiert sind. Ist die Bewegung eine eigentliche Schraubung, so sind außer den von *Darboux*[164]) angegebenen Flächen noch die Systeme bemerkenswert, die als eine Ergänzungsschar der kongruenten Flächen eine *Lamé*sche Familie von Schraubenflächen besitzen und deren Bestimmung, wenn man von bekannten trivialen Fällen absieht, auf das Problem der Biegung der Kugel hinauskommt.[168])

Wenn eine Fläche durch zwei und nur zwei unabhängige Bewegungen eine *Lamé*sche Schar erzeugt, so können die Bewegungen entweder zwei Drehungen um windschiefe Achsen oder eine Drehung und eine Schiebung sein.[169]) In diesem Falle beschreibt die Gerade des *Petot*schen Satzes eine lineare Kongruenz, und die Tangenten an die Krümmungslinien der einen Schar in den Punkten einer und derselben Krümmungslinie der zweiten Schar gehören einem Komplex des durch diese lineare Kongruenz bestimmten Komplexbüschels an.[170])

Die Flächen, die bei drei und mehr unabhängigen Bewegungen eine *Lamé*sche Schar erzeugen, sind von *Demoulin*[171]) vollständig bestimmt worden: drei Bewegungen gestatten die *Dupin*schen Zykliden, bei denen die Schnittgeraden der Ebenen ihrer Krümmungslinien sich schneiden, vier Bewegungen Rotationskegel und Zylinder, fünf endlich Kugeln und Ebenen, die ja, wie schon bekannt ist (vgl. Nr. **10**), bei *jeder* Bewegung eine *Lamé*sche Schar erzeugen.[172])

168) *L. Bianchi,* Annali di Mat. (2) 13 (1884); Toulouse Ann. 11 H (1897); *J. Haag,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 269.

169) Vgl. den zusammenhängenden Bericht von *S. Carrus,* J. de l'Éc. Pol. (2) 12 (1908), p. 63—85, ferner die Arbeiten von *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1897), p. 1426; *Medolaghi,* Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 8, 1. sem. (1899), p. 304; *Demoulin,* Paris C. R. 136 (1903), p. 1541, und *J. Haag,* Paris C. R. 147 (1908), p. 296, in denen Partikularlösungen angegeben und untersucht werden.

170) *J. Haag,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27, p. 271.

171) Paris C. R. 136 (1903), p. 1541.

172) Daß dies die einzigen reellen Flächen sind, die bei jeder Bewegung eine *Lamé*sche Schar erzeugen, ist zuerst von *L. Lévy,* Bull. des Sc. Math. (2) 15 (1890), p. 76 durch Rechnung gezeigt worden, später geometrisch von *E. Goursat,* Paris C. R. 121 (1895), p. 813. *J. Bertrand,* Paris C. R. 121, p. 921 zeigte dasselbe bei Beschränkung auf beliebige Schiebungen. Im Anschluß an seine Schlußweise fand *S. Carrus* [J. de l'Éc. Pol. (2) 12 (1908), p. 63], daß eine Fläche, die bei *zwei* Schiebungen eine *Lamé*sche Schar beschreibt, entweder Ebene, Kugel oder Zylinder ist. (Dasselbe bei *P. Adam,* Paris C. R. 121, p. 812 analytisch.) Gegen den *Bertrand-Carrus*schen Beweis erhob *J. Haag* begründete Einwendungen. [Bull. des Sc. math. (2) 34 (1910), p. 117; Erwiderung von *S. Carrus* ebenda.]

27. Die E-Systeme. Eine wesentlich allgemeinere Frage ist die Bestimmung der *Lamé*schen Scharen, bei denen nicht die Flächen selbst, sondern nur deren sphärische Bilder durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können.[173]) Fallen insbesondere die sphärischen Bilder der Flächen einer Schar zusammen, so bestehen auch die Ergänzungsscharen aus Flächen mit zusammenfallenden sphärischen Bildern. Diese vielfach untersuchten Systeme werden nach *Egorow*, dem wir die wichtigste Förderung des Problems verdanken, als E-Systeme bezeichnet. Die Flächen, die einem solchen E-System angehören, sind dadurch gekennzeichnet, daß das Quadrat des Linienelements sowohl der Fläche selbst als auch ihrer sphärischen Abbildung auf die Form

$$ds^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} d\varrho_1^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} d\varrho_2^2 \tag{115}$$

gebracht werden kann.[174]) Die Untersuchung dieser Systeme knüpft an die durch sie bestimmte Bewegung des Raumes an, die durch die Bedingung

$$\beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} = \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02} \tag{116}$$

zwischen den Drehkomponenten β_{ik} bestimmt ist, eine Gleichung, die bei passender Wahl der krummlinigen Koordinaten auf die Relationen

$$\beta_{ki} = \beta_{ik} \qquad (i \neq k) \tag{117}$$

führt.

Die Bestimmung dieser Größen erfordert die Lösung der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung[175]):

$$\frac{\partial^3 V}{\partial \varrho \, \partial \varrho_1 \, \partial \varrho_2} = 2\sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \, \partial \varrho_1} \, \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \, \partial \varrho_2} \, \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_2}}, \tag{118}$$

aus der sich

$$\beta_{ik} = \sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_i \partial \varrho_k}} \tag{119}$$

ergibt.

Die E-Systeme sind dadurch ausgezeichnet, daß sie eine Gruppe von Paralleltransformationen zulassen[176]); dies beruht im Grunde auf

173) *J. Haag*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 287.

174) *A. Ribaucour*, J. de Math. (4) 7 (1891), p. 44; *Petot*, Paris C. R. 112 (1891), p. 1426. Daß aus der Darstellung des sphärischen Bildes in der Form (115) eine entsprechende Darstellung des Linienelements der Fläche folgt, zeigt *Darboux*, Syst. orth., p. 445, 454. Mit der Bestimmung der sphärischen Systeme der angegebenen Form beschäftigt sich eine Arbeit von *J. Haag*, Paris C. R. 150 (1910), p. 767.

175) *Darboux*, Ann. de l'Éc. Norm. (1) 3 (1866), p. 123.

176) *Egorow*, Paris C. R. 131 (1900), p. 668; 131 (1901), p. 174; Moskau Univ. Abh. 16 (1901), p. 240; Bericht s. Fortschr. der Math. 33 (1902), p. 638—640;

der besonderen Orientierung, die bei ihnen das begleitende Dreikant, d. h. das von den Normalen in einem Punkte gebildete Dreikant, aufweist. Während nämlich bei einem allgemeinen dreifach orthogonalen System nur in einer diskreten Anzahl von Raumpunkten dieses Dreikant dieselbe Stellung besitzt, haben bei den E-Systemen je ∞^1 Punkte parallel zugeordnete Trieder.

Für die Bestimmung der E-Systeme ist die von *Egorow* bemerkte Tatsache grundlegend, daß hier die Abstände

$$P_i = xX_i + yY_i + zZ_i$$

der Tangentialebenen des Systems vom Anfangspunkte denselben Differentialgleichungen genügen wie die Differentialparameter H_i (vgl. Nr. 3, Formel (10) und (16)). Kennt man daher ein E-System, so erhält man aus ihm ein neues, wenn man für die P_i des neuen Systems die H_i des alten setzt oder umgekehrt. Das erste Verfahren erfordert nur Differentiationen, da das aus (x, y, z) hervorgehende System (x_1, y_1, z_1) durch die Gleichungen

$$(120)\quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}, \\ y_1 &= \frac{\partial y}{\partial \varrho} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2}, \\ z_1 &= \frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} \end{aligned}$$

bestimmt ist.[177]) Dagegen erfordert das zweite Verfahren die Ausführung der Quadraturen

$$(121)\quad \begin{aligned} dx_{-1} &= x\,d\Theta_{00} + y\,d\Theta_{01} + z\,d\Theta_{02}, \\ dy_{-1} &= x\,d\Theta_{01} + y\,d\Theta_{11} + z\,d\Theta_{12}, \\ dz_{-1} &= x\,d\Theta_{02} + y\,d\Theta_{02} + z\,d\Theta_{22}, \end{aligned}$$

in denen die $\Theta_{i\varkappa}$ durch die vollständigen Differentiale

$$(122)\quad \begin{aligned} d\Theta_{00} &= X^2 d\varrho + X_1^2 d\varrho_1 + X_2^2 d\varrho_2, \\ d\Theta_{11} &= Y^2 d\varrho + Y_1^2 d\varrho_1 + Y_2^2 d\varrho_2, \\ d\Theta_{22} &= Z^2 d\varrho + Z_1^2 d\varrho_1 + Z_2^2 d\varrho_2, \\ d\Theta_{12} &= YZ d\varrho + Y_1 Z_1 d\varrho_1 + Y_2 Z_2 d\varrho_2, \\ d\Theta_{20} &= ZX d\varrho + Z_1 X_1 d\varrho_1 + Z_2 X_2 d\varrho_2, \\ d\Theta_{01} &= XY d\varrho + X_1 Y_1 d\varrho_1 + X_2 Y_2 d\varrho_2 \end{aligned}$$

gegeben wird. Die i. a. nach beiden Seiten beliebig fortsetzbare

---

M. Fouché, Paris C. R. 126 (1898), p. 210; 131 (1900), p. 872; *Demoulin*, Paris C. R. 136 (1903), p. 1541; *Guichard*, Syst. triple-orth., p. 86—90. Vgl. die zusammenfassende Darstellung von *Darboux*, Syst. orth., p. 429—456.

177) Eine geometrische Deutung der Transformation ist von *Haag*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 292 angegeben.

Reihe der Systeme $(x_\varkappa y_\varkappa z_\varkappa)$ ist so beschaffen, daß aus jedem das dem nächst größeren $\varkappa$ entsprechende durch das erste Verfahren, das dem nächst kleineren $\varkappa$ entsprechende durch das zweite Verfahren hervorgeht

28. Die Guichardschen Systeme. Das eben beschriebene Rekursionsverfahren für E-Systeme läßt sich auf die umfassendere Klasse von Systemen anwenden[178]), deren Rotationskomponenten nicht nur die *Darboux*schen Gleichungen ((7′), (8′), Nr. 3)

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_l} = \beta_{il}\beta_{lk},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \varrho_k} + \beta_{li}\beta_{lk} = 0$$

erfüllen, sondern auch diejenigen, die aus ihnen hervorgehen, wenn in $\beta_{i\varkappa}$ die Indizes vertauscht werden, d. h.

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \varrho_i} + \beta_{il}\beta_{kl} = 0.$$

Für ein jedes Lösungssystem der Gleichungen (A), (B), (B′) gibt es zwei Reihen von parallel zugeordneten Orthogonalsystemen, wobei die Rotationskomponenten der einen Reihe nach Vertauschung der Indizes in die der zweiten Reihe übergehen. Während also die erste Reihe durch die Gleichungen

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} U_k \qquad\qquad \frac{\partial U_i}{\partial \varrho_i} = -\beta_{ki} U_k - \beta_{li} U_l \qquad \text{(D)}$$

für die Richtungskosinus,

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ki} H_k \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho_i} = H_i U_i \qquad \text{(F)}$$

für die Parameter und Koordinaten gekennzeichnet sind, lauten dieselben Gleichungen für das zweite System

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \frac{\partial U_i'}{\partial \varrho_k} = \beta_{ki} U_k' \qquad\qquad \frac{\partial U_i'}{\partial \varrho_i} = -\beta_{ik} U_k' - \beta_{il} U_l' \qquad \text{(D}'\text{)}$$

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \frac{\partial H_i'}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} H_k' \qquad\qquad \frac{\partial u'}{\partial \varrho_i} = H_i' U_i'. \qquad \text{(F}'\text{)}$$

Da die Gleichungen (E) und (C′) identisch sind, so ergibt sich aus einem System der zweiten Reihe ein solches der ersten Reihe, wenn man für H_i die Werte

$$\text{(123)} \qquad H_i = a X_i' + b Y_i' + c Z_i'$$

setzt. Die Koordinaten des abgeleiteten Systems lassen sich in der Form

---

178) *C. Guichard,* Syst. triple-orth., p. 79—80; *Darboux,* Paris C. R. 150. (1900), p. 1156, 1208; Syst. orth., p. 458; *J. E. Campbell,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1911), p. 410.

$$(124)\qquad \begin{aligned} x &= a\Theta_{00} + b\Theta_{01} + c\Theta_{02} \\ y &= a\Theta_{10} + b\Theta_{11} + c\Theta_{12} \\ z &= a\Theta_{20} + b\Theta_{21} + c\Theta_{22} \end{aligned}$$

schreiben, wobei die Θ_{ik} durch die Quadraturen

$$(125)\qquad \begin{matrix} d\Theta_{00} = \Sigma X_i X_i' d\varrho_i & d\Theta_{01} = \Sigma X_i Y_i' d\varrho_i & d\Theta_{02} = \Sigma X_i Z_i' d\varrho_i \\ d\Theta_{10} = \Sigma Y_i X_i' d\varrho_i & d\Theta_{11} = \Sigma Y_i Y_i' d\varrho_i & d\Theta_{12} = \Sigma Y_i Z_i' d\varrho_i \\ d\Theta_{20} = \Sigma Z_i X_i' d\varrho_i & d\Theta_{21} = \Sigma Z_i Y_i' d\varrho_i & d\Theta_{21} = \Sigma Z_i Z_i' d\varrho_i \end{matrix}$$

gegeben sind.

Den Ausgangspunkt der *Guichard*schen Untersuchungen bildete die Frage nach denjenigen Orthogonalsystemen, für die die Gleichung

$$(126)\qquad H_i^2 + H_k^2 + H_l^2 = 0$$

besteht, Systeme, die das Problem der orthogonalen Isothermnetze auf den Raum ausdehnen.[179]) Auch die allgemeinen Systeme

$$(127)\qquad H_i^2 + H_k^2 + H_l^2 = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta$$

gehören, wie von *Darboux*[180]) bemerkt wurde, zu der *Guichard*schen Klasse.

VII. Hilfsmittel der mehrdimensionalen Geometrie.

29. Die n-fach orthogonalen Systeme im R_n. Das Problem der dreifach orthogonalen Systeme läßt sich unmittelbar auf den n-fach ausgedehnten Raum R_n ausdehnen, und zwar in zweierlei Weise: Man sucht entweder die n-fach orthogonalen Systeme der Hyperflächen des R_n auf oder betrachtet die dreifach orthogonalen Systeme von Flächen im R_n. Beide Wege sind verfolgt worden, nicht nur wegen des Interesses, das die Fragestellungen an sich darbieten, sondern vor allem auch, weil sie weittragende Hilfsmittel an die Hand geben, um das eigentlich geometrisch wichtige Problem, das der dreifach orthogonalen Systeme im R_3, zu fördern. Wir berichten zunächst über die Untersuchungen der n-fach orthogonalen oder „vollkommen orthogonalen Systeme", die von *Darboux*[181]) zum ersten Male angestellt wurden.

---

179) In der Tat läßt sich das Quadrat für das Linienelement einer Isothermfläche $ds^2 = H_i^2 d\varrho_i^2 + H_k^2 d\varrho_k^2$ immer so umformen, daß $H_i^2 + H_k^2 = 0$ ist.

180) Syst. orth., p. 462—467.

181) Paris C. R. 69 (1869), p. 392; *Lie,* Gött. Nachr. (1871), p. 191, 535; Math. Mitt. an die Ges. der Wiss. Christiania vom 26. IX. 1871, abgedruckt Vidensk. Selsk. Skr. 1899, Nr. 9, p. 13; 1872, p. 25; Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, p. 103; *Darboux,* Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7, p. 227; Syst. orth., p. 120—182. An sie schließen sich die analytischen Untersuchungen von

Das erste Beispiel eines vollkommen orthogonalen Systems im R_n wurde von *Jacobi*[182]) in den allgemeinen elliptischen Koordinaten angegeben, ihm stellte *Darboux* das System der zyklidischen Koordinaten im R_n an die Seite. Das allgemeine Problem kommt darauf hinaus, n Funktionen ϱ_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ der n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ zu bestimmen, die den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen

$$(128) \qquad \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_1}\frac{\partial \varrho_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_2}\frac{\partial \varrho_k}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_n}\frac{\partial \varrho_k}{\partial x_n} = 0 \qquad (i \neq k)$$

genügen.

Durch ein der Analyse des Falles $n = 3$ genau entsprechendes Verfahren wird man auf die Bedingungen geführt, die eine der Funktionen ϱ_i zu erfüllen hat, nämlich auf $\binom{n}{3}$ Differentialgleichungen dritter Ordnung, die sich in zwei Gruppen scheiden. Die erste Gruppe von $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Gleichungen entspricht der Gleichung $S = 0$ (vgl. Nr. 8 (Formel 49)) des dreidimensionalen Problems, während die übrigen $\frac{1}{6}(n-1)(n-2(n-3)$ Gleichungen, die im Falle des R_3 nicht auftreten, die Bedingung dafür ausdrücken, daß die Hyperfläche $\varrho =$ konst. überhaupt einem vollständig orthogonalen System angehören kann.[183]) Diese Flächen sind dadurch charakterisiert, daß die sphärischen Abbildungen ihrer Krümmungslinien rechtwinklig sind.[184])

Für die vollständig orthogonalen Systeme bestehen Gleichungen, die den *Lamé*schen (vgl. Nr. 3) völlig analog sind und aus denen sich eine Transformation, die der *Combescure*schen Paralleltransformation entspricht, unmittelbar herleiten läßt.

Kennt man ein vollständig orthogonales System im R_n, so kann man auf verschiedenen Wegen zu ebensolchen Systemen im R_{n-1} übergehen und durch Wiederholung des Verfahrens auf dreifach orthogonale Flächensysteme im R_3 kommen:

1. Durch Vermittlung der sphärischen Abbildung. Zieht man zu den Normalen an die Hyperfläche $\varrho_k =$ konst., die die Richtungskosinus $X_k^i (i = 1, 2 \ldots n)$ besitzen, die Parallelen durch den Anfangspunkt, so bestimmen sie auf der Hyperkugel

$$(129) \qquad \sum_{i=1}^{n} (X_k^i)^2 = 1$$

J. Drach, Paris C. R. 125 (1897), p. 598; Bull. de la Soc. Math. de France 36 (1908), p. 85; *Ricci*, Paris C. R. 125 (1897), p. 810; *A. Pellet*, Paris C. R. 128 (1899), p. 281; Toulouse Ann. (2) 2 (1900), p. 137; Nouv. Ann. (4) 16 (1916), p. 37

182) Vorlesungen über Dynamik, 26. Vorl., p. 198.

183) *Darboux*, Syst. orth., p. 137.

184) *Darboux*, Syst. orth., p. 177.

ein Orthogonalsystem derart, daß

$$(130) \qquad (dX_k^1)^2 + (dX_k^2)^2 + \ldots (dX_k^n)^2 = \sum \beta_{ki}^2 d\varrho_i^2 \qquad (i \neq k)$$

wird. Die Anwendung einer stereographischen Transformation

$$(131) \qquad y_i = \frac{X_k^i}{1 - X_k^n} \qquad (i = 1, 2 \ldots (n-1))$$

führt auf ein vollständig orthogonales System im R_{n-1}. Auf diese Weise ergibt sich aus dem System der elliptischen Koordinaten im R_n das System der zyklidischen Koordinaten im $(n-1)$-dimensionalen Raume.[185])

2. Man setze $\varrho_k, \varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_n$ konstant und definiere n Funktionen y_i durch die Gleichungen

$$y_i = x_i + A_k X_k^i + \cdots + A_n X_k^i, \qquad (i = 1, \ldots n)$$

dann bilden die y, als Funktion von $\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1}, A_k, \ldots, A_n$ betrachtet, ein vollständig orthogonales System im R_n. Setzt man insbesondere

$$y_k = A_k, \ldots, y_n = A_n,$$

so bilden die $y_1, \ldots, y_{k-1}$ als Funktionen von $\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1}$ ein vollständig orthogonales System im R_{k-1}.[186])

30. Die Guichardsche Theorie der Netze und Kongruenzen. War auch schon früher gelegentlich der Frage nach den dreifach orthogonalen Systemen die allgemeinere der dreifach konjugierten Systeme ohne Beschränkung auf die Dimensionenzahl des Raumes behandelt[187]), so war es doch erst *Guichard*, der systematisch und konsequent die Theorie der von drei Parametern abhängigen Gebilde im R_n zur Untersuchung der mit ihnen zusammenhängenden Gebilde des R_3 benutzte und weiter entwickelte. Von dieser Seite aus gesehen ist die Frage nichts als der nächste Schritt nach der Untersuchung der zweidimensionalen Gebilde des R_n, deren Theorie einen großen Teil der differentialgeometrischen Fragestellungen, das Biegungsproblem, die Theorie der Linien-, Kreis- und Kugelkongruenzen als besondere Anwendungen in sich schließt. Von der Tatsache ausgehend, daß alle diese Fragen mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine Reihe von durch gewisse Relationen verbundenen Partikularintegralen besitzen, analytisch gleichwertig sind, erkannte *Guichard*[188]), daß sie mit der Theorie der Kurvennetze und

185) *Darboux*, Paris C. R. 69 (1869), p. 392; Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 300; Syst. orth., p. 170; *S. Lie*, Götting. Nachr. 1871, p. 191.

186) *Darboux*, Ann. de l'Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 302; Syst. orth., p. 174.

187) *Darboux*, Th. des surf. IV, p. 267 ff.

188) Die *Guichard*schen Untersuchungen, zunächst meist ohne Beweis in zahlreichen Noten des Paris C. R. mitgeteilt, sind, soweit sie auf die Theorie der

Linienkongruenzen im R_n auf das engste verknüpft sind. Wenn auch diese *Guichard*schen Begriffsbildungen an dieser Stelle nicht in ihrer ganzen Bedeutung darzustellen sind, da sie von dem Ziele des Berichtes zu weit ablenken würden, so ist doch eine kurze Entwicklung derselben für das Verständnis der entsprechenden Vorstellungen in der Theorie der von drei Parametern abhängigen Systeme notwendig.

Ein System von ∞^2 Punkten im R_n heißt ein *Netz* (réseau), wenn die Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ seiner Punkte ein und derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(132) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = P \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + Q \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2}$$

genügen. Einen Grenzfall bildet das *Punktnetz,* bei dem die Kurven des Netzes auf einen Punkt zusammenschrumpfen; es wird erhalten, wenn man zu den Tangenten eines Netzes durch einen festen Punkt die Parallelen zieht. An Stelle der Gleichung (132), die hier inhaltslos wird, treten Beziehungen zwischen den Richtungsgrößen ξ_i, η_i dieser Parallelen, die stets auf die Form

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \varrho_2} = n \eta_i, \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial \varrho_1} = m \xi_i$$

gebracht werden können.

Ein System von ∞^2 Geraden heißt eine Kongruenz, wenn sie in zwei Scharen von abwickelbaren Flächen zerlegbar ist; die Richtungsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ihrer Geraden genügen einer Gleichung von der Form

$$(133) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} + P \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + Q \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} + R \vartheta = 0,$$

und umgekehrt sind je n Partikularlösungen einer solchen Gleichung die Richtungsgrößen einer Schar von Kongruenzen, die nach Auflösung der Gleichung

$$(134) \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} + P \frac{\partial t}{\partial \varrho_1} + Q \frac{\partial t}{\partial \varrho_2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial Q}{\partial \varrho_2} - R\right) t = 0$$

für den Abstand $2t$ ihrer Brennpunkte durch Quadraturen bestimmt sind.[190])

Orthogonalsysteme Bezug haben, zusammengefaßt in der großen monographischen Arbeit: Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14 (1897), p. 467—516; (3) 15 (1898), p. 179—227; (3) 20 (1903), p. 75—132, 181—288.

189) Diese Netze sind die einzigen Kurvensysteme, zu denen parallele Kurvensysteme existieren, die nicht homothetisch sind.

190) Für den R_3 vgl. *C. Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 344; *Bianchi,* Vorles., p. 280, für den R_n *Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14, p. 178.

Unter den Wechselbeziehungen, die zwischen Kongruenzen und Netzen auftreten, sind hervorzuheben:

1. *Die konjugierte Lage.* Ein Netz und eine Kongruenz sind konjugiert, wenn die Punkte des Netzes auf den zugeordneten Strahlen der Kongruenz liegen und die Kurven des Netzes den Abwickelbaren der Kongruenz entsprechen. — Man erhält alle zu einem Netze konjugierten Kongruenzen, indem man die Punkte des Netzes mit den entsprechenden eines parallelen Netzes verbindet.

2. *Die harmonische Lage.* Eine Kongruenz liegt harmonisch zu einem Netz, wenn ihre Brennpunkte auf den Tangenten des Netzes liegen. — Man erhält alle zu einem Netz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ harmonischen Kongruenzen, wenn man ihre Brennpunkte $(y_1 \ldots y_n)$, $(z_1 \ldots z_n)$ durch die Gleichungen

$$(135) \qquad y_i = x_i - \frac{\vartheta}{\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1}} \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_1}, \quad z_i = x_i - \frac{\vartheta}{\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2}} \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_2}$$

bestimmt, in denen ϑ eine beliebige Lösung der Gleichung (132) bedeutet, der die Koordinaten des Netzes genügen.[191])

Eine Beziehung, die für die Differentialgeometrie die gleiche Bedeutung hat wie das Dualitätsprinzip in der algebraischen[192]), ist durch das Gesetz der Orthogonalität der Elemente gegeben, das in Räumen ungerader Ordnungszahl einer Kongruenz ein Netz und umgekehrt einem Netz eine Kongruenz zuordnet, in Räumen gerader Ordnungszahl dagegen einer Kongruenz wieder eine Kongruenz und einem Netz ein ebensolches.

Das Orthogonalitätsgesetz wird in einem R_n ($n = 2p + 1$ ungerade) durch folgende Konstruktion vermittelt. Zu einem gegebenen Netze N konstruiere man das parallele Punktnetz mit den Koordinaten (ξ_i, η_i) und bestimme die Größen $X_1 \ldots X_n$ aus den Gleichungen

$$\Sigma X\xi = 0, \quad \Sigma X \frac{\partial \xi}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma X \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial \varrho_1^{p-1}} = 0$$

$$\Sigma X\eta = 0, \quad \Sigma X \frac{\partial \eta}{\partial \varrho_2} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma X \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial \varrho_2^{p-1}} = 0,$$

dann sind diese die Richtungsgrößen einer zum gegebenen Netz orthogonalen Kongruenz (G).

Auf jeder ihrer Brennflächen bestimmt eine Kongruenz (G) ein Netz, und jedes dieser Netze ist orthogonal zu der Kongruenz, die

191) *L. Lévy,* J. de l'Éc. Pol. cah. 56 (1886), p. 77; *Darboux,* Th. des surfaces II, p. 327; *Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14, p. 484.

192) *C. Guichard,* Syst. triple-orth., p. 3.

aus den Tangenten an die demselben Parameter entsprechende Kurvenschar eines zu (G) orthogonalen Netzes gebildet wird.[193]) Ist ein Netz zu einer Kongruenz orthogonal, so ist jede Kongruenz, die zum Netze konjugiert (bzw. harmonisch) ist, orthogonal zu einem Netz, das zur Kongruenz konjugiert (bzw. harmonisch) ist.

Im R_n ($n = 2p$ gerade) konstruiert man zu einer Kongruenz mit den Richtungsparametern $(Y_1 \ldots Y_n)$ eine orthogonale mit den Parametern $(X_1 \ldots X_n)$ durch die Gleichungen

$$\Sigma XY = 0,\quad \Sigma X\frac{\partial Y}{\partial \varrho_1} = 0,\ \ldots,\ \Sigma X\frac{\partial^{p-1} Y}{\partial \varrho_1^{p-1}} = 0$$

$$\Sigma X\frac{\partial Y}{\partial \varrho_2} = 0,\ \ldots,\ \Sigma X\frac{\partial^{p-1} Y}{\partial \varrho_2^{p-1}} = 0.$$

Zwei Netze heißen orthogonal, wenn die Kongruenzen der Tangenten an ihre Kurven paarweis orthogonal sind. Sind zwei Kongruenzen orthogonal, so ist das dem Parameter ϱ_1 entsprechende Brennpunktnetz der ersten orthogonal zu dem dem Parameter ϱ_2 entsprechenden Brennpunktnetz der zweiten, und jedes dem einen konjugierte Netz ist orthogonal zu einem dem andern harmonischen Netz.

Unter den Netzen und Kongruenzen sind besonders wichtige Typen hervorzuheben.

1. *Die rechtwinkligen Netze.* Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die Tangenten der Netzkurven aufeinander senkrecht stehen; die Gleichung (132), der die Koordinaten des Netzes genügen, besitzt in diesem Falle auch die Lösung

$$\varrho = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2.$$

Ist das Netz nicht singulär, d. h. ist weder $\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2 = 0$ noch $\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2 = 0$, so heißt das Netz ein orthogonales oder 0-Netz.

2. *Die zyklischen Netze.* Ein Netz heißt zyklisch, wenn es auf ein Netz im dreidimensionalen Raum abwickelbar ist, wenn demnach seine Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ durch drei Größen y_1, y_2, y_3 so ergänzt werden können, daß

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2$$

wird.

3. Die Projektion eines (0-Netzes) (bzw. C-Netzes) eines R_{n+p-} in einem R_n bezeichnet man als $(p, 0)$-Netz (bzw. (p, C)-Netz).

193) Ann. de l'Éc. Norm. (3) 20, p. 91. Vgl. für den R_3 den *Ribaucour*schen Satz Nr. 17, Fußnote 113.

4. Eine J-Kongruenz ist durch die Gleichung

$$\Sigma X_i^2 = 0$$

ihrer Richtungsgrößen gekennzeichnet, eine zyklische Kongruenz C durch die Gleichung

$$\Sigma X_i^2 = h^2 F_1^2 + l^2 F_2^2,$$

in der F_i eine Funktion von ϱ_i allein bedeutet, und h, l die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} + R\vartheta,$$

der die Richtungsgrößen X_i genügen.[194])

5. Eine (p, J)-Kongruenz (bzw. eine (p, C)-Kongruenz) im R_n ist die Projektion einer J-Kongruenz bzw. C-Kongruenz des R_{n+p-1}.

Zwischen den oben angeführten Netzen und Kongruenzen bestehen nun zahlreiche Beziehungen der harmonischen und konjugierten Lage[195]), Beziehungen, von denen eine jede einer geometrischen Tatsache entspricht. Die wichtigste Frage, die sich in dieser Theorie nun unmittelbar stellt, ist die Bestimmung aller Netze, die gleichzeitig pO und qC, oder pO und qO, oder endlich pC und qC sind, Aufgaben, die die Verallgemeinerung wohlbekannter Probleme darstellen.

Ohne indessen hier auf eine erschöpfende Darstellung flächentheoretischer Einzelheiten einzugehen, sei nur an bekannten Beispielen der Anwendungsbereich der *Guichard*schen Methoden gekennzeichnet.

1. *Das Biegungsproblem.* Ist (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) ein Paar isometrischer Flächen, so gibt es auf der ersten immer ein Netz konjugierter Kurven, dem auf der zweiten ein konjugiertes Kurvensystem entspricht; bezieht man die Flächen auf dieses Netz, so sind x, y, z, x_1, y_1, z_1 Lösungen ein und derselben Gleichung (132), und diese besitzt außerdem

$$\varrho = x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$$

als siebente Lösung. Die Bestimmung isometrischer Flächenpaare kommt somit auf die Frage der orthogonalen Netze im R_6 hinaus.

2. *Kugel- und Kreiskongruenzen.* Werden die Koordinaten einer Kugel als Richtungsgrößen einer Geraden im R_5 aufgefaßt, so entspricht einer Kugelkongruenz eine Linienkongruenz, und die Theorie der Kugel- und Kreissysteme wird auf diese Weise der *Guichard*schen Methode zugänglich.[196])

---

194) *Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 15 (1898), p. 192; für den R_3 vgl. Nr. 16, Formel (86).

195) Vgl. die ausführlichen Tafeln dieser Beziehungen von *Guichard,* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 20, p. 124, 131, 188.

196) Ann. de l'Éc. Norm. (3) 20, p. 190.

31. Die Guichardsche Theorie der dreifachen Flächensysteme. Die ganze Betrachtungsweise läßt sich sinngemäß auf das dreidimensionale Gebiet ausdehnen. Sind jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Funktionen von drei Parametern $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, die sämtlich drei Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = P \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + Q \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_2 \partial \varrho} = P_1 \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + Q_1 \frac{\partial x}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho \partial \varrho_1} = P_2 \frac{\partial x}{\partial \varrho} + Q_2 \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}$$

genügen, so müssen diese die *Lamé*sche Form (vgl. Nr. 3, Formel (13)) haben, wenn man die x_i als die kartesischen Koordinaten eines Punktes im R_n auffassen will, der für $\varrho_i =$ konst. ein Netz beschreibt. Die Gesamtheit dieser ∞^3 Punkte wird als Punktsystem bezeichnet; ein solches ist von den Bedingungsgleichungen eines dreifach-konjugierten Systems (vgl. Nr. 6) im R_3 abhängig, auf dessen Bestimmung die Aufgabe für $n = 3$ zurückkommt. Die Tangenten einer Schar von Parameterkurven bilden eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden, ein *Geradensystem*, und die Ebenen, die durch die Tangenten an zwei Parameterkurven eines Punktsystems bestimmt werden, ein Ebenensystem. Zwischen diesen drei Systemen bestehen nun Zusammenhänge, die der konjugierten Lage von Netzen und Kongruenzen entsprechen, und auch hier gilt ein Orthogonalitätsprinzip, das ganz ähnlich wie vorher begründet werden kann, und das die drei Arten räumlicher Systeme miteinander vertauscht, und zwar je nach der Dimensionenzahl verschieden, entsprechend dem folgenden Schema:

n	Punktsystem	Geradensystem	Ebenensystem
$3p$	Punktsystem	Ebenensystem	Geradensystem
$3p+1$	Geradensystem	Punktsystem	Ebenensystem
$3p+2$	Ebenensystem	Geradensystem	Punktsystem

Schneiden sich die Parameterkurven überall rechtwinklig, so ist das Punktsystem orthogonal (ein 0-System), und es wird

$$(136)\quad dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = H^2 d\varrho^2 + H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2.$$

Ein System im R_n heißt $(p, 0)$, wenn es die Projektion eines 0-Systemes im R_{n+p-1} ist.

Von den 0-Systemen sind bisher nur einzelne Beispiele behandelt worden: die assoziierten Systeme, d. h. die Paare von solchen 0-Sy-

stemen, deren Koordinaten demselben *Lamé*schen Gleichungssystem (13) genügen; zu ihnen gehören die von *Guichard*[197]) untersuchten Paare, deren gleichbenannte Differentialparameter sich durch multiplikative Konstanten unterscheiden; ferner diejenigen Systeme des R_3, die auf ein 0-System des R_1 abwickelbar sind; dies sind die in Nr. 28 nebst ihren Transformationen besprochenen Systeme.

197) Paris C. R. 136 (1903), p. 490, 547; Syst. triple-orth., Chap. VII, VIII.

(Abgeschlossen im April 1920.)

(Die Literatur seit 1914 konnte nur teilweise berücksichtigt werden.)

III E 1. NEUERE ARBEITEN DER ALGEBRAISCHEN INVARIANTENTHEORIE. DIFFERENTIALINVARIANTEN.

VON
R. WEITZENBÖCK
IN GRAZ.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

a) Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie.

A. Projektive Invarianten.

B. Nicht-projektive Invarianten.

Zweiter Teil.

b) Differentialinvarianten.

A. Einleitung.

B. Differentialinvarianten spezieller Transformationsgruppen.

C. Theorie der Differentialformen.

Literatur.

Erster Teil.

Lehrbücher und Monographien.

A. Capelli, Lezioni sulla theoria delle forme algebriche, Neapel 1902.

J. H. Grace und *A. Young,* The algebra of invariants, Cambridge 1903.

T. J. Bromwich, Quadratic forms and their classifications by means of invariants factors, Cambridge 1906.

A. Clebsch-F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, neu herausgeg., Leipzig 1906.

W. Scheibner, Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie, Leipzig 1907.

R. Weitzenböck, Komplex-Symbolik. Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume, Sammlung Schubert 57 (1908).
W. Fr. Meyer, Allgemeine Formen- und Invariantentheorie, I. Band (binär); Sammlung Schubert, 33; Leipzig 1909.

Zweiter Teil.
Bücher und wichtigste Arbeiten.

M. Halphen, Sur les invariants differentiels, Thèse, Paris 1878.
S. Lie, Über Differentialinvarianten, Math. Ann. 24 (1884), S. 537—578.
S. Lie-F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I, § 25, Leipzig 1888.
A. R. Forsyth, Invariants, Covariants associated with linear Differential-Equations, Phil. Trans. 179 (1888), p. 377—489.
S. Lie-G. Scheffers, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891.
— —, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893.
G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Padua 1898.
L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, Leipzig 1899.
Ch. L. Bouton, Invariants of the general linear differential equations and their relation to the theory of continuous groups, Am. J. of. math. 21 (1899), p. 25—84.
G. Fano, Über lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen, Math. Ann. 53 (1900), p. 493—590.
G. Ricci und *T. Levi-Civita,* Methodes de calcul différentiel absolu, Math. Ann. 54 (1901), p. 125—201.
E. J. Wilczynski, Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leipzig 1906.
J. E. Wright, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge 1908.
H. Liebmann u. *F. Engel,* Die Berührungstransformationen, Jahresb. D. Math.-Ver., Ergänzungsband V (1914).
H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Berlin 1918.
F. Klein, Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrh., Seminarvorträge (Maschinenschrift), Göttingen 1917—1918.

Erster Teil.

a) Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie.

A. Projektive Invarianten.

1. Einleitung. In den letzten zwanzig Jahren hat die algebraische Invariantentheorie hauptsächlich in zwei Richtungen einen wesentlichen Fortschritt zu verzeichnen: die eine ist gegeben durch die Bearbeitung der *projektiven* Invarianten von Formen in einem Gebiete n^{ter} Stufe bei Berücksichtigung der verschiedenen, in solchen Gebieten verwendeten Variablenreihen (Punkt-, Linien-, Ebenen- usw. Koordinaten); die zweite Richtung führt in die Theorie der Invarianten bezüglich der wichtigsten *Untergruppen* der allgemeinen projektiven Gruppe.

Wir begnügen uns demgemäß mit der Aufzählung der wichtigsten Arbeiten über projektive Invarianten binärer und ternärer Formen (Nr. 2—6) und behandeln erst von den quaternären Formen an die projektiven Invarianten ausführlicher, wobei die Literatur im Anschlusse an den Artikel I B 2 „Invariantentheorie" von *W. Fr. Meyer* ab 1898 berücksichtigt ist. Wir schließen uns auch im großen ganzen an die dort verwendeten Bezeichnungen an; das gleiche gilt bezüglich der Artikel III AB 1a und 1b von *G. Fano.*

Nicht berücksichtigt wurden Arbeiten, die in die arithmetische Theorie der Formen gehören, wie z. B. die zahlreichen Abhandlungen von *L. E. Dickson*[1]) und seinen Schülern über Invarianten in bestimmten Rationalitätsbereichen und der von *E. Noether* gegebene Endlichkeitsbeweis für das System der ganzzahligen Invarianten binärer Formen (Gött. Nachr. 1919).

2. Binäre Formen. Allgemeines.[2]) Den Aufbau und die Formenzusammenhänge der Komitanten binärer Formen f_n wurde von englischen und amerikanischen Mathematikern eingehend behandelt. Hier sind in erster Linie die Arbeiten von *J. H. Grace*[3]), *P. W. Wood*[4]) und *A. Young*[5]) über Perpetuanten[6]) zu nennen. Der Erzeugung von Komitanten aus Leitgliedern ist eine längere Arbeit von *E. B. Elliott*[7]) gewidmet.

P. Gordan[8]) gibt einen, auf dem allgemeinen *Hilbert*schen Endlichkeitssatze beruhenden Endlichkeitsbeweis für vollständige Formensysteme Σ von Grundformen f_i, zugleich einen neuen Beweis des *Hilbert*schen Satzes. Die Erweiterung von Σ, die sich ergibt, wenn

---

1) Ab 1906 in den Trans. Am. math. Soc., im Am. J. und Quart. J.; zusammenfassender Bericht im Madison Colloquium 1913, New York 1914.

2) Bezüglich der Differentialgleichungen für Komitanten vgl. Nr. 9; bezüglich solcher Formen, deren Ordnung nicht notwendig eine ganze positive Zahl ist, vgl. Nr. 4.

3) Proc. London math. Soc. 35 (1903), drei Arbeiten und ebenda (2) 1 (1904), p. 202—208.

4) Ebenda (1904), (1905), (1906).

5) Ebenda (1903—1905). Hierzu: *E. B. Elliott,* ebenda (3) 4 (1906), p. 228—246; *L. Isserlis,* ebenda (2) 6 (1908), p. 406—409; *H. Piaggio,* ebenda (2) 8 (1910), p. 438—468 und (2) 12 (1913), p. 377—392. Betreffs eines formalen Zusammenhanges zwischen symbolisch geschriebenen Invarianten und chemischen Formeln vgl. *E. Study,* Ztschr. f. phys. Chem. 37 (1901); Beibl. Ann. d. Phys. 25 (1901); ferner *Grace* u. *Young,* p. 366.

6) Definition z. B. bei *Grace* u. *Young,* p. 326.

7) Proc. London math. Soc. 32 (1900), p. 213—239.

8) J. de Math. (5) 6 (1900), p. 141—146.

zu den f_i eine neue Grundform φ hinzutritt, behandelt *S. Cherubino*[9]). *E. Kasner*[10]) untersucht den Zusammenhang zwischen den Formensystemen, die sich bei einer doppelt-binären Form $a_x^m \alpha_y^n$ ergeben, je nachdem die x_i dieselben Transformationen erleiden wie die y_i oder nicht.

Spezielle Untersuchungen über Überschiebungen wurden angestellt von *F. Petrucci*[11]), *L. Brusotti*[12]) und *O. Chiomio*[13]); eine geometrische Deutung binärer Prozesse findet sich bei *H. Wiener*[14]).

G. Guareschi[15]) gibt die Bedingungen dafür, daß zwei f_n die Polaren einer f_m sind. *J. H. Grave*[16]) gibt bei drei f_n ein Beispiel zu *Hilberts* Nullformen. *L. Tenca*[17]) gibt im Anschlusse an einen *Rosanes*schen Satz die Bedingung dafür, daß bei zwei f_n jede gleich der Summe der n^{ten} Potenzen der Linearfaktoren der anderen ist.

E. Pascal[18]) stellt die Bedingungen dafür auf, daß f_m und f_n drei Linearfaktoren gemein haben. *T. Cazzaniga*[19]) behandelt im Anschlusse an *Brioschi* Komitanten von zerfallenden Formen.

Mit Reihenentwicklungen mehrfach-binärer Formen beschäftigen sich Arbeiten von *E. Waelsch*[20]), *A. Reissinger*[21]), *K. Petr*[22]) und *W. Godt*[23]).

Eine Reihe von Arbeiten untersucht Formen f_n durch Abbildung auf die Punkte eines R_N, wo $N+1$ die Anzahl der Koeffizienten von f_n ist.[24]) So gibt *L. Autonne*[25]) eine mehrdimensionale Deutung des *Christoffel*schen Äquivalenztheorems.

9) Giorn. di mat. 49 (1911), p. 109—128.

10) Trans. Am. math. Soc. 4 (1903), p. 86—102.

11) Giorn. di mat. 39 (1901), p. 264—272.

12) Ebenda 40 (1902), S. 225—246.

13) Ebenda 44 (1906). S. 240—248.

14) Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 291—313.

15) Rend. Ist. Lomb. (2) 42 (1909), p. 157—162.

16) Proc. London math. Soc. 34 (1902), p. 168—172.

17) Periodico di Mat. (3) 1 (1903), p. 38—42.

18) Rend. Ist. Lomb. 37 (1904), p. 917—929. Hierzu auch p. 980 u. 1010; ferner hierzu: *O. E. Glenn*, Bull. Am. math. Soc. (2) 17 (1911), p. 449—457.

19) Gion. di mat. 38 (1900), p. 321—336.

20) Wien. Ber. 113 (1904), p. 1209—1217.

21) Progr. Realschule Kempten 1907.

22) Časopis 36 (1907), p. 243—251.

23) Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 1—12.

24) Betreffs einer von *E. Waelsch* besonders ausgebildeten Richtung dieser „Binäranalyse" höherer Räume vgl. Nr. 18.

25) Bull. Soc. Mat. 27 (1899), p. 263—282; hierzu auch: *L. Brusotti*, Rend. Lomb. Ist. (2) 42 (1909), p. 144—148 und *A. B. Coble*, Am. J. 31 (1909), p. 183—202 und p. 355—364; ebenda 32 (1910), p. 333—364.

A. Ostrowski[26]) findet für die Diskriminante $\Delta(a_i)$ einer $f_n = a_x^n = f(x_1, x_2; a_i)$ eine charakteristische Eigenschaft. Eine lineare Transformation der x_i induziert eine ebensolche Transformation T_a der Koeffizienten a_i. $\Delta(a_i)$ ist bei den T_a invariant. Hiervon gilt auch das umgekehrte[27]): Alle linearen Transformationen der als unabhängige Veränderlichen betrachteten Koeffizienten a_i, bei denen $\Delta(a_i)$ invariant bleibt, bilden eine (und zwar die größte) Gruppe von Transformationen T_a, wobei T_a eine induzierte Substitution bedeutet (vgl. Nr. **18**). *Ostrowski* gibt auch zwei analoge Sätze für die Resultante binärer Formen.

3. Binäre Formen. Spezielles. Die bei den Komitanten zweier f_2 bestehenden Syzygien überträgt *M. Pasch*[28]) auf Bilinearformen. Zu dem von *v. Gall*[29]) aufgestellten vollständigen Formensystem dreier f_3 gibt *L. Sinigallia*[30]) Ergänzungen und einige Syzygien. Analoge Untersuchungen bei dem von *S. Gundelfinger*[31]) aufgestellten Formensystem einer f_3 und einer f_4 führt *E. Pascal*[32]) durch.

A. Young[33]) untersucht Syzygien bei Komitanten mehrerer f_4; *J. E. Rowe*[34]) behandelt eine f_4 und eine f_5.

Die Theorie der f_5 ist Gegenstand von Arbeiten von *A. B. Coble*[35]), *E. B. Elliott*[36]), *H. F. Baker*[37]), *R. Perrin*[38]).

R. K. Morley[39]) zeigt anschließend an *Hammond* an den Komitanten der f_7 und höheren Formen, daß der von *Sylvester-Franklin* herrührende, sogenannte „Fundamentalsatz der Siebung" nicht allge-

26) Math. Ann. 79 (1919), p. 360—387.

27) Für kontinuierliche Gruppen schon bei *G. Kowalewski*, Leipzig. Ber. 54 (1902), p. 371—392.

28) Math. Ann. 65 (1908), p. 567—569.

29) Ebenda 45 (1894), p. 207—234.

30) Rend. di Palermo 21 (1906), p. 75—80.

31) Stuttgart 1869.

32) Rend. Ist. Lomb. 37 (1904), p. 1010—1020; ebenda 38 (1905), p. 201—210 und p. 373—381. Verallgemeinerung hierzu bei *B. J. Miller*, Johns Hopkins Univ. Circ., Nr. 7 (1913), p. 56—58.

33) Proc. London math. Soc. 32 (1900), p. 384—404.

34) Trans. Am. math. Soc. 13 (1912), p. 387—404.

35) Trans. Am. math. Soc. 9 (1908), p. 396—424; eine spezielle f_6 wird behandelt Am. J. of Math. 28 (1906), p. 333—366.

36) Proc. London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 224—239.

37) Ebenda, p. 122—140.

38) Verh. Kongreß Paris 1900, p. 199—223. Hierzu *A. B. Coble*, Johns Hopkins Univ. Circ. 1901, p. 54—55. Betreffs f_5 mit mehrfachen Faktoren vgl. *E. Pascal*, Rend. Ist. Lomb. 37 (1904), p. 980—993.

39) Am. J. 34 (1912), p. 47—68.

mein gilt.[40]) Von *A. Young*[41]) stammt eine Zusammenstellung der maximalen Ordnungs- und Gradzahlen für die Komitanten einer f_n bis $n = 100$.

4. Allgemeine Formen. Unter „allgemeiner" Form verstehen wir mit *W. Groß*[42]) analytische Funktionen F der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die der *Euler*schen Differentialgleichung $\sum \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = \nu F$ genügen, wobei die Ordnung ν nicht notwendig ganzzahlig ist.

Auch für solche allgemeine Formen ($\nu \neq 0$) läßt sich eine symbolische Darstellung $F = \alpha_x^\nu$ verwenden und es lassen sich die fundamentalen Bildungen der Invariantentheorie (Polarenprozeß, Überschiebung, Faltung) fast ausnahmslos an dieser Darstellung in formal derselben Weise erzeugen wie bei ganzen rationalen Formen.

Speziell für binäre und ternäre allgemeine Formen ist diese Erweiterung der Formentheorie durchgeführt worden. Im Binären ist es vor allem die sogenannte „invariante" Darstellung von linearen Differentialgleichungen, bei der ausgiebig von Überschiebungen Gebrauch gemacht wird.[43])

Ist ν eine ganze positive Zahl, ohne daß f_ν selbst ganz ist (z. B. wenn f_ν gleich dem Quotienten zweier ganzer Formen), so wird die ν^{te} Polare

$$D_{x,y}^\nu = \frac{1}{\nu!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\nu f$$

von der Ordnung Null in den x_i, und hier ergibt sich beim weiteren Polarenbilden oder Überschieben eine gewisse Schwierigkeit; man gelangt hier zu singulären Kovarianten[42]), für die *G. Pick*[44]) den Namen „Derivate" gebraucht. Bei f_ν ist das Derivat z. B. dargestellt durch

$$\frac{1}{(xy)^{\nu+1}} \cdot \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\nu+1} f(x_1, x_2).$$

Es ist dies eine Form $(-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die von den y_i unabhängig ist.

---

40) Vgl. auch I B 2, Anm. 187).

41) Proc. London Royal Soc. 72 (1903), p. 399—400.

42) Wien. Ber. 127 (1918), p. 1396—1444.

43) Vgl. *D. Hilbert*, Diss. Königsberg 1885, Math. Ann. 30 (1887), p. 15—29; *G. Pick*, Wien. Ber. 96 (1887), p. 872; Math. Ann. 50 (1898), p. 381—397; Wien. Ber. 101 (1892), p. 893—896; *E. Waelsch*, Mitt. der Deutsch. math. Ges. Prag 1892; *A. Hirsch*, Diss. Königsberg 1892; *J. Wellstein*, Math. Ann. 52 (1899), p. 70—80; *G. Pick*, Wien. Ber. 112 (1903), p. 82—93; Wien. Monatsh. 18 (1907), p. 219—234; Wien. Ber. 115 (1906), p. 1475; ebenda 117 (1908), p. 103; *W. Groß*, Wien. Monatsh. 22 (1911), p. 323. Bezüglich einer Verallgemeinerung der Überschiebungen auf Potenzreihen vgl. *J. E. Wright*, Proc. London math. Soc. (2) 2 (1905), p. 470—477.

44) Wien. Ber. 96 (1887), p. 872.

W. Groß[45]) gibt für allgemeine binäre und ternäre Formen Reihenentwicklungen mit Benützung von Hilfspunkten und leitet aus den Koeffizienten dieser Reihen Differentialgleichungen (mit unendlich vielen Veränderlichen) für die Komitanten allgemeiner Formen her.

Spezielle Invariantenbildungen von allgemeinen Formen, die durch algebraische Gleichungen gegeben sind, behandelt *E. Wölffing*[46]).

5. Ternäre Formen. Allgemeines. Den Aufbau und die Zusammenhänge für In- und Kovarianten einer C_n untersucht *O. Chiomio*[47]). Er betrachtet sogenannte „*S*-Kovarianten" von der Gestalt $(abc)^{r_1}(abd)^{r_2}\ldots a_x^{s_1}b_x^{s_2}\ldots$ und gibt[48]) deren Typen für den 3., 4. und 5. Grad in den Koeffizienten der C_n.

Die Erzeugung aus einem Leitgliede[49]) bei ternären Formen wird von *A. R. Forsyth*[50]) und *E. B. Elliott*[51]) behandelt.

S. Gundelfinger[52]) erörtert die Frage, wann bei zwei ternären C_{2n+1} a_x^{2n+1} und α_x^{2n+1} die Kontravariante $(a\alpha u)^{2n+1}$ identisch verschwindet. *J. Rosanes*[53]) behandelt Systeme von „konjugierten" Formen a_x^n und α_u^n, für welche die Simultaninvariante a_α^n verschwindet und gibt geometrische Anwendungen hierzu.

Von *A. Brill*[54]) wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für das Zerfallen einer C_n in Linearfaktoren gegeben. Diese $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen können, wie *O. E. Glenn*[55]) nachweist, durch Nullsetzen von ebensovielen Seminvarianten vom Grade $2n-1$ dargestellt werden. Betreffs der Darstellbarkeit einer C_n als Summe von p n^{ten} Potenzen von Linearformen zeigt *F. Palatini*[56]), daß im allgemeinen Falle $p \geqq \frac{1}{6}[(n+1)(n+2)+4\varepsilon]$ ist; ε ist 1 oder Null, je nachdem n durch 3 teilbar ist oder nicht. Ist C_n als Summe von $\frac{1}{2}n(n+1)$ n^{ten} Potenzen von Linearformen dargestellt, so bilden diese ein konjugiertes Polarsystem.[57])

45) Wien. Monatsh. 22 (1911), p. 323; Wien. Ber. 127 (1918), p. 1396.

46) Math. Ann. 43 (1897), p. 26—62.

47) Giorn. di mat. 43 (1905), p. 117—155.

48) Ebenda 46 (1908), p. 109—134 u. p. 349—371.

49) Vgl. für binäre Formen etwa: *Grace* u. *Young*, The algebra of Invariants, 1903, p. 29.

50) Proc. London math. Soc. 29 (1898), p. 487—517. Hierzu I B 2, Anm. 154).

51) Ebenda (2) 11 (1912), p. 269—276.

52) Arch. Math. Phys. (3) 15 (1909), p. 113—115.

53) J. f. reine u. angew. Math. 142 (1912), p. 57—60.

54) Gött. Nachr. 1893. Vgl. I B 2, Anm. 405).

55) Trans. Am. math. Soc. 12 (1911), p. 367—374; Am. J. 34 (1912), p. 449—460. Hierzu auch *F. Junker,* Math. Ann. 64 (1907), p. 328—343.

56) Rend. Acc. Linc. (5) 12 (1903), p. 378—384.

57) Hierzu *L. Tenca,* Periodico di Mat. (3) 1 (1903), p. 138—142.

6. Ternäre Formen. Spezielles. Projektive Invarianten von Linearformen untersuchen *J. G. Hun*[58]), *D. D. Leib*[59]) und *Ch. Thaer*[60]); die Arbeiten der beiden erstgenannten beziehen sich auf die Figur zweier Dreiecke in derselben Ebene.

Das Formensystem dreier Kegelschnitte[61]) bearbeitet, an *E. Fischer* und *K. Mumelter* anschließend, *R. Seelig*[62]); er bestätigt die von *C. Ciamberlini*[61]) angegebene Zahl von 128 Komitanten. *H. W. Turnbull*[63]) gibt das vollständige Formensystem für vier Kegelschnitte bestehend aus 784 Komitanten und zeigt bei fünf C_2, daß man bei Invarianten noch den siebenten Grad zu berücksichtigen hat.[64])

Bei einer $C_3 = a_x^3$ und ihrer *Hesse*schen α_x^3 ist $(a\alpha u)^3 \equiv 0$; *S. Gundelfinger*[65]) gibt hierzu die Umkehrung.

Das Formensystem einer allgemeinen C_4 behandeln *E. Pascal*[66]) und *E. Noether*[67]); letztere gibt ein „relativ-vollständiges" System von 331 Komitanten. Eine spezielle Kovariante der C_4 untersucht *E. Ciani*[68]). Besondere C_4 und C_6 treten bei einer von *A. B. Coble*[69]) aufgeworfenen Frage auf; eine C_6, die bei der *Valentiner*gruppe G_{360} invariant bleibt, wird von *P. Gordan*[70]) behandelt.

Die Komitanten der ersten vier Grade einer allgemeinen C_5 stellt *A. Perna*[71]) auf.

Darstellungen als Summe von Potenzen von Linearformen geben: *E. Lasker*[72]) für spezielle C_4 als Summe von 5 vierten Potenzen; *F. Palatini* und *H. G. Dawson*[73]) für die C_5 als Summe von 7 fünften Potenzen; *A. C. Dixon* und *T. Stuart*[74]) ebenso und für die C_7 als

---

58) Trans. Am. math. Soc. 5 (1904), p. 39—55.

59) John Hopkins Univ. Circ. 1908, p. 123—135.

60) Über Invarianten, die symmetrischen Eigenschaften eines Punktsystems entsprechen, Leipzig 1906 (Teubner).

61) I B 2, Anm. 145); dann III C 1, Nr. 90.

62) Wien. Monatsh. 29 (1918), p. 255—267.

63) Proc. London math. Soc. (2) 9 (1910), p. 81—121.

64) Hierzu auch *E. Wölffing*, Math.-naturw. Mitt. (2) 8 (1906), p. 27—31.

65) Arch. Math. Phys. (3) 15 (1909), p. 113—115.

66) Atti Napoli (2) 12 (1905), p. 1—100.

67) J. f. reine u. angew. Math 134 (1908).

68) Rend. di Palermo 14 (1900), p. 16—21.

69) Am. J. of Math. 28 (1906), p. 333—366.

70) Math. Ann. 61 (1906), p. 453—526; ebenda 68 (1909), p. 1—23.

71) Giorn. di mat. 40 (1902), p. 142—153.

72) Math. Ann. 58 (1904), p. 434—440.

73) Rend. Acc. Linc. (5) 12_1 (1903), p. 378—384; Quart. J. 37 (1906), p. 379—384; *H. W. Richmond*, Cambridge Proc. 13 (1906), p. 296.

74) Proc. London math. Soc. (2) 4 (1906), p. 160—168.

Summe von 12 siebenten Potenzen; *A. C. Dixon*[75]) für die C_6 als Summe von 10 sechsten Potenzen.

Den Konnex (1, 1) behandelt *M. Panelli*[76]), während trilineare Formen von *M. Pasch*[77]) und *Ph. Maennchen*[78]) untersucht werden.

7. Spezielle n-äre Formen. $n > 3$. Bei $n = 4$ kommen das erste Mal neben Punktkoordinaten x_i und Ebenenkoordinaten u_i' auch Formen mit Linienkoordinaten $p_{ik} = p'_{mn}$ vor. Wir schreiben von hier an $(u'x) = \sum u_i' x_i$ an Stelle von u_x' und bezeichnen jede zu x kogrediente (kontragrediente) Reihe mit einem Buchstaben ohne (mit) Strich.[79])

($n = 4$): Invarianten von Punkten im R_3 behandelt *L. B. Robinson*[80]). Das vollständige Formensystem[81]) von zwei F_2 stellt *P. Gordan*[82]) auf; es besteht aus 580 Komitanten. *R. Weitzenböck*[83]) gibt Invarianten von linearen und quadratischen Komplexen, vom linearen Komplex und einer F_2, für eine Kollineation[84]) und eine Korrelation[85]). Den linearen Punkt-Geraden Konnex behandelt *E. Kasner*[86]), während *L. Godeaux*[87]) Andeutungen über den Konnex Punkt-Gerade-Ebene macht.

A. C. Dixon[88]) erörtert im Anschluß an *Reye* die Darstellung einer $F_4 = (a'x)^4$ als Summe von zehn Biquadraten.

($n = 5$): Invarianten von linearen Linien- und Ebenenkomplexen $\sum a'_{ik} p_{ik}$ bzw. $\sum a'_{ikl} p_{ikl}$ gibt *R. Weitzenböck*[89]). Aus den Identitäten

---

75) Ebenda, p. 223—227.

76) Giorn. di mat. 36 (1898), p. 81—99.

77) Math. Ann. 52 (1899), p. 127—129.

78) Ebenda 55 (1901), p. 81—85.

79) So sind z. B. p_{ik} die „Linien“-, p'_{ik} die „Achsen“-Koordinaten einer Geraden.

80) Bull. Am. math. Soc. (2) 19 (1912), p. 57.

81) Ein vollständiges *Formen*system von Grundformen F_i ist ein vollständiges *Invarianten*system von Formen F_i, G_k, wo die G_k Linearformen mit je einer Koordinatenreihe des betreffenden Gebietes sind (siehe Nr. 10).

82) Math. Ann. 56 (1903), p. 1—48; hierzu auch *G. Pick*, Wien. Ber. 98 (1884), p. 536 und ebenda 100 (1891), p. 561.

83) Komplex-Symbolik, vgl. Anm. 94); ferner Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 225—238.

84) Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 206—223.

85) Rend. di Palermo 30 (1910).

86) Trans. Am. math. Soc. 4 (1903), p. 213—233.

87) Belg. Bull. Scient. 1009, p. 1161.

88) Proc. London math. Soc. (2) 4 (1906), p. 223—227.

89) Wien. Ber. 119 (1910), p. 43—54; ebenda 121 (1912), p. 2553—2632; Rend. di Palermo 31 (1911).

die zwischen Linienkoordinaten p_{ik} bestehen, konstruiert *W. H. Young*[90]) ein Beispiel für die Sätze von *Hilbert* über Syzygienketten.

Fünf F_2, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet, werden von *O. Toeplitz*[91]) untersucht. Bei *F. Palatini*[92]) findet sich die Darstellung einer F_3 als Summe von acht Kuben. Spezielle F_4 behandelt *A. B. Cobble*[93]).

$(n > 5)$: Ebenenkomplexe werden für $n = 6$ und 7 ausführlich von *W. Reichel*[94]) bearbeitet.

8. n-är. Spezielles. Bei allgemeinem n sind quadratische und Bilinearformen in Punktkoordinaten am meisten behandelt worden. Bezüglich ersterer führen wir die Monographie von *T. J. Bromwich*[95]) an. *C. Jordan*[96]) untersucht lineare ∞^m-Scharen von F_2 und von Bilinearformen. Letztere werden auch von *S. Kantor*[97]) behandelt, während *E. v. Weber*[98]) Büschel von alternierenden Bilinearformen betrachtet. Spezielle Komitanten bei mehreren F_2 untersucht *E. Wölffing*[99]).

Bilinearformen mit Transformationen in sich behandelt *A. Loewy*[100]); er dehnt die *Cayley*schen Formeln auf solche Formen aus. *A. B. Cobble*[101]) untersucht Formen $\sum a_{ik} x_i u_k'$, durch die Kollineationen im R_n dargestellt werden. *O. Chiomio*[102]) gibt Identitäten zwischen Komitanten vom Typus $(a'b' \ldots m')^r (a'x)^{m_1 - r} (b'x)^{m_2 - r} \ldots$

Zahlreich sind die Arbeiten, die sich auf Faktorenzerlegung beziehen. So gibt *F. Hocevar*[103]) die notwendigen und hinreichenden

90) Atti di Torino 34 (1899), p. 596—599.

91) Diss. Breslau 1905.

92) Atti di Torino 38 (1903), p. 43—50.

93) Am. J. of Math. 28 (1906), p. 333—366.

94) Diss. Greifswald 1907; hierzu *F. Engel*, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), p. 196—198 und Leipzig. Ber. 52 (1900), p. 63—76, p. 220—239; für $n = 6$ auch: *O. Landsberg*, Diss. Breslau 1899; *R. Weitzenböck*, Komplex-Symbolik, Sammlung Schubert, Leipzig 1908. Vgl. ferner *C. Segre*, Ann. di mat. III, 27 (1917), p. 75.

95) Cambridge, Univ. Press 1906.

96) J. de math. (6) 2 (1906), p. 403—438 und ebenda (6) 3 (1907), p. 5—51.

97) Münchner Ber. 27 (1897), p. 367—381.

98) Ebenda 28 (1898), p. 369—394.

99) Math.-naturw. Mitteil. (2) 8 (1906), p. 27—31.

100) Math. Ann. 50 (1898), p. 557—567.

101) Am. J. 27 (1905), p. 25—46.

102) Giorn. di mat. 42 (1904), p. 243—254.

103) Wien. Ber. 113 (1904), p. 407—428; Paris C. R. 138 (1904), p. 745; Verhandl. Kongreß Heidelberg 1904. Hierzu I B 1 b, Nr. 5, Anm. 5; ferner betr. weiterer Literatur: *O. Dorner*, Wien. Monatsh. 20 (1909), p. 242—288; *O. E. Glenn*, Bull. Am. math. Soc. (2) 17 (1911), p. 449.

Bedingungen dafür, daß F_m in m Linearfaktoren zerfällt: alle dreireihigen Minoren der *Hesse*schen Determinante von F_m müssen durch F_m teilbar sein. Es genügt hierzu schon die Teilbarkeit von $n-1$ solchen Minoren. Das Verhalten der *Hesse*schen Determinante bei zerfallenden F_m untersucht *A. Perna*[104]).

J. Kürschak[105]) gibt als Erweiterung eines *Hilbert*schen Satzes die Bedingungen an, daß F_m die μ^{te} Potenz einer F_p wird $(m = \mu \cdot p)$.

9. Differentialgleichungen für Komitanten. Bei binären Formen behandelt *F. Junker*[106]) die bekannten vier Differentialgleichungen der Invarianten und reduziert dieselben auf eine einzige durch Einführung von Seminvarianten als Veränderlicher. Für isobare Funktionen gibt *R. Occhipinti*[107]), für Diskriminanten und Resultanten *E. Pascal*[108]) charakteristische Differentialgleichungen.

Die relativen Invarianten J von ϱ n-ären Grundformen F_i lassen sich durch $n^2 + \varrho$ lineare, partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung charakterisieren. ϱ von diesen Gleichungen fordern die Homogenität von J bzw. der Koeffizienten jeder der Formen F_i. Sie sind daher überflüssig, wenn — wie üblich — diese Homogenität in die Definition der Invarianten aufgenommen wird. Eine weitere Differentialgleichung, die eine lineare Kombination der eben genannten Gleichungen ist, wird überflüssig, wenn man sich auf unimodulare Transformationen beschränkt.

Die restlichen $n^2 - 1$ Differentialgleichungen

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Gamma_{n^2-1} = 0$$

bilden ein vollständiges System und entsprechen genau den $n^2 - 1$ infinitesimalen Transformationen, aus denen die $(n^2 - 1)$gliedrige projektive Gruppe des Gebietes n^{ter} Stufe (R_{n-1}) erzeugt wird. *E. Study*[109]) beweist, daß schon zwei geeignete lineare Kombinationen (mit konstanten Koeffizienten) der $\Gamma_i = 0$ genügen, um daraus durch Klammerprozesse alle $n^2 - 1$ herzuleiten. *J. Wellstein*[110]) zeigt, daß man sogar mit einer Gleichung auskommt, wenn man von J gewisse Symmetrieeigenschaften fordert.

---

104) Napoli Rend. (3) 17 (1911), p. 440—450; hierzu *U. Perazzo,* Giorn. di mat. 38 (1900), p. 337—354.

105) Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 153—154.

106) Math. Ann. 64 (1907), p. 328—343; hierzu auch *W. Fr. Meyer,* Gött. Nachr. 1908, p. 117—127.

107) Gion. di mat. 47 (1909), p. 33—42.

108) Rend. Acc. Lincei (5) 13 (1904), p. 295, 365, 576.

109) Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 17 (1908), p. 408—417.

110) Math. Ann. 67 (1909), p. 462—489.

Erzeugt man die allgemeine projektive Gruppe durch infinitesimale projektive Schiebungen, so entspricht dies für unimodulare Transformationen dem Ersetzen der $n^2 - 1$ Differentialgleichungen $\Gamma_i = 0$ durch ein zyklisches System von n Gleichungen $D_{i,i+1} = 0$, wie *W. Fr. Meyer*[111]) näher ausführt. Dieses System, sowie ein von *Kronecker*[112]) angegebenes von $2n - 2$ Gleichungen $D_{ik} = 0$ sind Spezialfälle der *Aronhold*schen Differentialgleichungen.[113])

Wir führen hier noch an, daß sich mit speziellen Fragen über Polaroperationen D_{xy}, anschließend an die Arbeiten *Cappellis S. Minetola*[114]), *M. Bosco*[115]) und *A. Perna*[116]) beschäftigen. Mit n-ären Reihenentwicklungen befassen sich *K. Petr*[117]) und *E. Noether*[118]). Letztere gibt eine neue Herleitung für Reihenentwicklungen in Anlehnung an eine Arbeit von *E. Fischer*[119]).

W. Groß[120]) gibt für $n = 2$ und $n = 3$ eine neue Ableitung der Differentialgleichungen für Komitanten, die auch für allgemeine Formen (Nr. 4) gültig ist. Er stellt Komitanten durch gewisse Polaren dar, die mit linearen Hilfsformen gebildet werden; die Differentialgleichungen ergeben sich dann als Bedingungen dafür, daß diese Polaren von den Hilfsformen unabhängig werden.

Durch die Differentialgleichungen für Komitanten und deren allgemeine Lösungen wird die *algebraische* Theorie der Komitanten keineswegs beherrscht, worauf schon *G. Fano*[121]) hingewiesen hat.

10. Vollständige Systeme. In einem Gebiete n^{ter} Stufe (R_{n-1}) hat man $n - 1$ verschiedene Koordinatenreihen zu unterscheiden: Punktkoordinaten X_i, Geradenkoordinaten π_{ik}, Ebenenkoordinaten Π_{ikl}, . . ., R_{n-2}-Koordinaten U_i'. Die mit diesen Reihen gebildeten Linearformen

(1) $\quad L_2 = \sum u_i' X_i, \quad L_2 = \sum \pi_{ik}' \Pi_{ik}, \quad \ldots, \quad L_{n-1} = \sum x_i U_i'$

sollen als System (L) bezeichnet werden.

111) Leipzig. Ber. 60 (1008), p. 190—210; hierzu *E. Study*, l. c. und *J. Wellstein*, l. c.

112) Berlin. Ber. 1889, p. 479, 603 = Werke III, S. 315.

113) J. f. reine u. angew. Math. 62 (1863).

114) Giorn. di math. 45 (1907), p. 27—47.

115) Ebenda 49 (1911), p. 215—225.

116) Ebenda 50 (1912), p. 217—237.

117) Rozpravy 16 (1907), tschechisch; ebenda 17 (1908).

118) Math. Ann. 77 (1916), p. 93—102. Zusatz und Berichtigung Math. Ann. 81 (1920), p. 25—30.

119) J. f. reine u. angew. Math. 140 (1911), p. 48—81.

120) Wien. Ber. 127 (1918), p. 1396.

121) III AB 4b, Schluß von Nr. 33.

Nun sei ein System (F) von Grundformen $F_1, F_2, \ldots, F_h$ gegeben. Dies sind Formen einer oder mehrerer der Reihen $X_i, \Pi_{ik}, \ldots, U_i'$. Nennen wir Invariante eine solche Komitante der (F), die nur Koeffizienten der (F) enthält, so ist es eine der wichtigsten Aufgaben der Invariantentheorie, „ein vollständiges Invariantensystem" $J_1, J_2, \ldots, J_\varrho$ von (F) anzugeben. Jede ganze rationale Invariante der (F) ist dann ganz und rational durch die $J_1, \ldots, J_\varrho$ darstellbar.

Jetzt vereinigen wir (F) und (L) zu dem erweiterten Grundformensystem $\Sigma = (F, L)$. Ein vollständiges *Invarianten*system von Σ heißt dann „ein vollständiges Formensystem" $J_1, \ldots, J_\varrho, K_1, \ldots, K_\sigma$ von (F). Die zu den $J_1, \ldots, J_\varrho$ hinzutretenden Komitanten $K_1, \ldots, K_\sigma$ sind dann Kovarianten, Kontravarianten, Zwischenformen usw. Der Begriff eines vollständigen Formensystems ist besonders für geometrische Untersuchungen von Belang.

Daß es genügt, dem Grundformensystem (F) die Linearformen (1) mit nur je einer Koordinatenreihe hinzuzufügen, um alle Typen von Komitanten der (F) im R_{n-1} zu erhalten, hat *A. Clebsch*[122]) bewiesen. Die Adjunktion von (L) zu (F) und die Bestimmung vollständiger Invariantensysteme von $\Sigma = (F, L)$ ist auch deshalb von Bedeutung, da sich durch das (identische) Verschwinden von Komitanten K_i alle „invarianten Gleichungssysteme" ersetzen lassen. Bestehen nämlich zwischen den Koeffizienten der Formen (F) eine oder mehrere Gleichungen $G_j = 0$, aus denen auch $G_j' = 0$ für die transformierten Grundformen (F') folgt, so ist ein derartiges Gleichungssystem stets durch $K_\alpha \equiv 0$, $K_\beta \equiv 0, \ldots$ darstellbar.[123])

Besteht (F) aus $\nu > N$ gleichartigen Formen, deren allgemeinste N Koeffizienten hat, d. h., sind die F gleicher Ordnung und haben die gleichen Veränderlichenreihen, so genügt es, wie *D. Hilbert*[124]) vermutet und *E. Noether*[125]) bewiesen hat, N der Formen als Grundformen zu nehmen, um alle Komitantentypen zu übersehen. Ist nämlich $J_1, \ldots, J_\varrho$ ein vollständiges Invariantensystem von $F_1, F_2, \ldots, F_N$ und tritt zu diesen N Formen F eine weitere Form F_{N+1} hinzu, so kommen für das vollständige Invariantensystem von $F_1, \ldots, F_N, F_{N+1}$ nur solche Invarianten J_σ hinzuzufügen, die sich aus den $J_1, \ldots, J_\varrho$ durch einen einfachen Polarenprozeß (*Aronhold*scher Prozeß) ableiten lassen, die also formal keinen neuen Typus darstellen.

---

122) Math. Ann 5 (1872), p. 427—435 = Gött. Nachr. 17 (1872).

123) *J. P. Gram,* Math. Ann. 7 (1874), p. 230—241; *Clebsch-Lindemann,* Vorles. I, p. 272 (1. Aufl.); *E. Study,* Methoden usw. 1899, p. 101.

124) Schwarz-Festschrift 1914, p. 448—451.

125) Math. Ann. 77 (1916), p. 93—102.

L. Maurer[126]) untersucht die Frage, inwieweit es möglich ist, die Gleichheit der Invarianten zweier äquivalenter Grundformen aus den Transformationsgleichungen für die Koeffizienten derselben zu erschließen. Bei allgemeinen Formen geht dies immer, nicht aber bei Formen, zwischen deren Koeffizienten Relationen bestehen. Solche sind z. B. die *Hilbert*schen Nullformen, deren sämtliche Invarianten verschwinden.

11. Symbolische Methoden. Fundamentalsätze. Auf die Schwierigkeiten, die sich bei Verwendung der *Aronhold-Clebsch*schen Symbolik im n-ären ($n > 3$) durch das Auftreten der Reihen $p_{ik}, p_{ikl}, \ldots$ ergeben, ist schon von mehreren Seiten hingewiesen worden.[127])

Diese Schwierigkeiten sind heute überwunden. Es lassen sich die beiden Fundamentalsätze der symbolischen Methode auch für n-äre Komitanten aussprechen. Diese Sätze führen die Theorie der ganzen rationalen Komitanten auf solche von Linearformen zurück. Der erste Satz[128]) gibt die Vorschriften zur Komitantenbildung, der zweite[129]) gibt erschöpfende Auskunft über die ganzen rationalen Beziehungen zwischen den Komitanten.

Die Übertragung dieser beiden Sätze auf Formen mit Reihen $p_{ikl\ldots}$ kann man nun entweder mit *E. Noether*[127]) durch Hinzunahme neuer, einfachster Invariantentypen durchführen (Nr. **12**), oder, was übersichtlicher und weitreichender ist, man kann die Größen $p_{ikl\ldots}$ selbst in Symbole zerlegen. Ein erster Versuch hierzu wurde von *E. Waelsch*[130]) unternommen; eine verwandte Methode bei Verwendung alternierender, multilinearer Formen wurde von *E. Study*[131]) angegeben (vgl. Nr. **14**). Bei *R. Weitzenböck*[132]) geschieht diese Zerlegung der $p_{ikl\ldots}$ in „Komplexsymbole" planmäßig, wodurch die beiden Fundamentalsätze in derselben Gestalt wie für Reihen x und u' aufrecht erhalten bleiben (Nr. **13**).

Mit Hilfe der beiden Fundamentalsätze und des *Hilbert*schen End-

126) Weber-Festschrift 1912, p. 242—251.

127) *P. Gordan,* Erlanger Progr. 1875, Anhang; *E. Study,* Methoden usw. 1889, Anm. 17); *E. Noether,* J. f. reine u. angew. Math. 139 (1910), p. 118—154.

128) *A. Clebsch,* ebenda 59 (1861); näheres siehe z. B. bei *E. Study,* l. c. p. 22, 47.

129) Für ternäre Formen z. B. bei *E. Study,* l. c. S. 67, 75; für n-äre Formen bei *E. Pascal,* Rend. Acc. Linc. (4) 4 (1888), p. 119—124; Memor. Acc. Linc. (4) 5 (1888), p. 375—387.

130) Math. Ann. 37 (1890), p. 141—152.

131) *F. Engel,* Leipzig. Ber. 52 (1900), p. 63—76, 220—239; *W. Reichel,* Diss. Greifswald 1907; siehe auch *E. Study,* Geom. der Dynamen (1903), p. 135.

132) Wien. Ber. 122 (1913), p. 154—168 u. 380—416.

lichkeitssatzes gelingt es auch, in komplizierteren Fällen ein vollständiges Invariantensystem wirklich aufzustellen.[133])

12. Der Matrizenkalkül.[134]) Eine Form m^{ter} Ordnung F der Reihen $p_{i_1 i_2 \ldots i_\varrho}$ ist darstellbar als m^{te} Potenz einer Linearform

$$(1) \qquad f = \sum a'_{i_1 \ldots i_\varrho} p_{i \ldots i_\varrho}.$$

Entsprechend den dualen Größen $p'_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}}$ lassen sich bei entsprechender Normierung der Symbolreihen $a'_{i_1 \ldots i_\varrho}$ zu diesen duale Reihen

$$(2) \qquad a_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}} = a'_{i_1 \ldots i_\varrho}$$

definieren, so daß wieder $(j_1, \ldots, j_{n-\varrho})$ und $(i_1, \ldots, i_\varrho)$ algebraisch-komplementär sind. Für f erhält man so eine vierfache Darstellung[135]):

$$(3\text{a}) \qquad f = \sum a'_{i_1 \ldots i_\varrho} \cdot p_{i_1 \ldots i_\varrho} \quad = \sum a_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}} p'_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}}$$

$$(3\text{b}) \qquad f = \sum a'_{i_1 \ldots i_\varrho} \cdot p'_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}} = \sum a_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}} p_{i_1 \ldots i_\varrho}.$$

Denkt man sich in (3a) die Reihen $a'_{i_1 \ldots i_\varrho}$ als ϱ-reihige Determinanten $(a'b' \ldots)_{i_1 \ldots i_\varrho}$, und ebenso die Reihen $p_{i_1 \ldots i_\varrho}$ als ϱ-reihige Determinanten $(xy \ldots)_{i_1 \ldots i_p}$ geschrieben, so erscheint f als Summe von Produkten entsprechender Determinanten zweier Matrizen von gleicher Reihenzahl dargestellt: als „Matrizenprodukt"[136])

$$(4) \qquad f = (a'_\varrho \mid p_\varrho) = (a_{n-\varrho} \mid p'_{n-\varrho}).$$

Aus zwei Reihen $a'_\sigma = a_{n-\sigma}$ und $b'_\tau = b_{n-\tau}$ läßt sich erstens durch Zusammenfassen[137]) eine neue Reihe

$$(5\text{a}) \qquad a'_\sigma b'_\tau = c'_{\sigma+\tau}$$

für $\sigma + \tau \leqq n$ ableiten; ist $\sigma + \tau > n$, so kann man dasselbe mit $a_{n-\sigma}$ und $b_{n-\tau}$ machen:

$$(5\text{b}) \qquad a_{n-\sigma} b_{n-\tau} = c_{2n-\sigma-\tau} = c'_{\sigma+\tau-n}.$$

Zweitens lassen sich aus $a'_\sigma = a_{n-\sigma}$ und $b'_\tau = b_{n-\tau}$ durch „Faltung" neue Reihen bilden: man faßt a'_σ mit $q'_{n-\sigma-\lambda}$ zu $a'_\sigma q'_{n-\sigma-\lambda} = \alpha'_{n-\lambda}$ und ebenso $b_{n-\tau}$ mit $p_{\tau-\lambda}$ zu $b_{n-\tau} p_{\tau-\lambda} = \beta_{n-\lambda}$ zusammen und bildet dann das Matrizenprodukt

$$(6) \qquad (\alpha'_{n-\lambda} \mid \beta_{n-\lambda}) = \sum a_\lambda f_{n-\tau} \cdot p_{\tau-\lambda},$$

wodurch eine neue Reihe $\alpha_\lambda f_{n-\tau}$ definiert ist. λ heißt der Defekt der Faltung.

---

133) *R. Weitzenböck*, Math. Ann. 75 (1914), p. 569—585.

134) *E. Noether,* J. f. reine u. angew. Math. 139 (1910), p. 118—154.

135) *A. Clebsch,* Abh. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 17 (1892), § 5.

136) *E. Noether,* l. c. § 2. *E. Noether* schreibt übrigens a^ϱ statt a'_ϱ.

137) „Kombinatorisches Produkt" bei *H. Graßmann,* Ausdehnungslehre, 1862; hierzu auch *E. Müller,* Wien. Ber. 118 (1909).

Mit Hilfe der in (5) und (6) definierten Symbol- bzw. Größenreihen können dann die beiden Fundamentalsätze formuliert werden (Nr. 11). Die quadratischen Identitäten zwischen den p-reihigen Determinanten p'_ϱ werden z. B.:

(7) $(\varphi'_{n-\varrho-2} p'_\varrho \mid \psi_{\varrho-2} p_{n-\varrho}) = 0$ für alle $\varphi_{\varrho+2}$ und $\psi_{\varrho-2}$.

Der Matrizenkalkül gestattet dann in einfacher Weise das Zurückgehen vom symbolischen Faltungsprozeß zu den unsymbolischen Differentiationsprozessen und gibt damit den Anschluß an die Theorie der Normalformen und Formenreihen.

13. Die Komplexsymbolik.[138]) Der vollständige Anschluß an die Theorie der Linearformen $(a'x) = \sum a_i' x_i$, $(\alpha u') = \sum \alpha_i u_i'$ und damit an die *Aronhold-Clebsch*sche Symbolik wird erst durch weitere Zerlegung der Reihen $p_{i_1 \ldots i_\varrho} = p'_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}}$ erreicht. Diese Zerlegung drückt sich in den Gleichungen aus:

(1a) $$p_{i_1 \ldots i_\varrho} = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_\varrho}$$

(1b) $$p'_{j_1 \ldots j_{n-\varrho}} = p'_{j_1} p'_{j_2} \cdots p'_{j_{n-\varrho}}.$$

Hierbei sind die p_i (und analog die p_j') Symbole („Komplexsymbole"), für welche das Multiplikationsgesetz

(2) $$p_i p_k = -p_k p_i$$

gilt. Die Linearform (1) der vorigen Nr. kann jetzt als ϱ^{te} Potenz

(3) $$f = \sum a'_{i_1 \ldots i_\varrho} p_{i_1 \ldots i_\varrho} = \frac{1}{\varrho!} \left(\sum a_i' p_i\right)^n = \frac{1}{\varrho!} (a'p)^n$$

dargestellt werden und hiermit ist die Zurückführung auf den Typus $(u'x)$ bewirkt.

Statt (3a) der vorigen Nr. kommt jetzt:

(4) $$f = \frac{1}{\varrho!} (a'p)^\varrho = \frac{(-1)^{\varrho(n-\varrho)}}{(n-\varrho)!} (ap')^{n-\varrho},$$

während (3b) eine Erweiterung des Determinantenbegriffes[139]) erfordert, indem jetzt in den n-reihigen Determinanten $(ab\ldots)$ die Reihen $a, b, \ldots$ auch Komplexsymbole p sein können. Statt $(ppc\ldots)$ schreibt man dann kürzer $(p^2c\ldots)$. Es wird so:

(5) $$f = \frac{1}{\varrho!(n-\varrho)!} (a'^\varrho p'^{n-\varrho}) = \frac{1}{(n-\varrho)!\varrho!} (a^{n-\varrho} p^\varrho).$$

Bei dieser Darstellung bleiben die beiden Fundamentalsätze der symbolischen Methode (Nr. 11) in der gewöhnlichen Fassung mit dem

138) Der Name „Komplex"symbolik rührt von der Darstellbarkeit der Linienkomplexe und deren analogen Gebilden mit diesen Symbolen her. *R. Weitzenböck*, Sammlung Schubert 57 (1908).

139) Arch. Math. Phys. (3) 21 (1913), p. 111—128 u. 301—303

Zusatze bestehen[132]), daß die in ihnen vorkommenden Reihen auch von Komplexsymbolen gebildet werden können.

Die Identitäten zwischen den $p'_{i_1 \ldots i_\varrho}$ sehen jetzt so aus:

(6) $\qquad (pq')^2 p_{i_1 \ldots i_{n-\varrho-2}} q'_{j_1 \ldots j_{\varrho-2}} = 0$ für alle Indizesgruppen.

Die Identitäten des zweiten Fundamentalsatzes nehmen mit Berücksichtigung von Komplexsymbolen die verschiedenartigsten Gestalten an. Zerlegt man auch noch für $\varrho = n - 1$ die Reihen $u_i' = p_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ in Komplexsymbole, so wird es möglich, sämtliche dieser Identitäten aus einer einzigen herzuleiten.

14. Vergleich der Methoden. Wir zeigen die Verwendung der in den vorhergehenden Nummern angeführten Methoden an einem Beispiele. Es sei für $n = 6$ (linearer R_5) ein linearer Ebenenkomplex K gegeben. Sind die π_{ikl} die 20 homogenen Koordinaten einer veränderlichen Ebene, so wird K dargestellt:

1) Unsymbolisch: $\qquad \sum a'_{ikl} \pi_{ikl} = 0.$

2) Ausdehnungslehre: $\qquad [A\Pi] = 0.$

3) Matrizenkalkül: $\qquad (a_3' \mid \pi_3) = 0.$

4) *Study*sche[140]) alternierende Formen: $(\alpha' x)(\beta' y)(\gamma' z) = 0.$

5) Komplexsymbolik[138]): $\qquad (a'\pi)^3 = 0.$

Bei 1) und 3) sind die a'_{ikj} bzw. a_3' zwanzig gewöhnliche komplexe Größen $a'_{ikj} = -a'_{kij} = -a'_{ijk}$; bei 2) ist A eine Komplexgröße 3. Stufe[143]); bei 4) geben je drei Symbole $\alpha_i' \beta_k' \gamma_j'$ multipliziert eine Zahl a'_{ikj}; bei 5) sind die a_i' dreifältige Komplexsymbole.

Der Komplex K hat eine (einzige) projektive Invariante J vom vierten Grade in den Koeffizienten $a'_{ikj} = a_{lmn}$. Unsymbolisch ist $J = \sum a'_{ikj} a_{ik\lambda} a_{j\mu\nu} a'_{\mu\nu\lambda}$. In *Study*scher Symbolik der obigen Darstellung 4) entsprechend ist[140]): $J = (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3)(\gamma_2 \beta_3 \gamma_3 \alpha_4 \beta_4 \gamma_4)$; komplexsymbolisch wird[138]): $J = \frac{1}{4}(a'b)^2(bd')(a'c)(cd')^2$. Beim Matrizenkalkül wird vorerst die Einführung neuer Reihen $r_i r_k' = s_i s_k'$ notwendig. Diese Reihen sind definiert durch die identisch in x_i und u_k' bestehende Gleichung $(r \mid u')(r' \mid x) \equiv (a_3' u' \mid a_3 x)$. Es ist dann $J = (r \mid s')(r' \mid s)$.

In analoger Weise[141]) hätte man bei 2) nach *Graßmann*[142]) vorerst die äußeren Produkte $[AX]$ (progressiv) und $[|AU]$ (regressiv), wobei $|A$ die Ergänzung zu A ist, zu bilden. Aus beiden wird dann

140) *W. Reichel*, Diss. Greifswald 1907. Vgl. Anm. 131).

141) Vgl. hierzu *E. Noether*, J. f. reine u. angew. Math. 139 (1910), p. 118—154, Einleitung.

142) Ausdehnungslehre von 1862 = Ges. Werke I, p. 84.

weiter das gemischte Produkt $[[AX]\cdot[|AU]]$ gebildet. Dieses definiert eine zu sich selbst duale „algebraische Punkt-R_4-Größe“[143]) und J könnte dann als eine Art fortschreitendes Produkt dieser Größe mit sich selbst definiert werden.[144])

Das behandelte Beispiel zeigt, daß es bei Bildung von Invarianten unerläßlich sein kann, auf die Struktur der Koeffizientenreihe a'_{ikj} einzugehen und diese Struktur durch Zerlegung in Symbole oder wenigstens nach Indizesreihen zum Ausdrucke zu bringen. Die Bezeichnung der Gesamtheit der 20 Größen a'_{ikj} mit einem einzigen Zeichen A als Vertreter einer extensiven Größe gestattet keine Darstellung der Invariante J.[145])

B. Nicht-projektive Invarianten.

15. Allgemeines. Das Problem, die invarianten Eigenschaften zu bestimmen, welche irgendwelche geometrische Figuren gegenüber einer Transformationsgruppe besitzen, wurde zuerst von *F. Klein*[146]) in seinem Erlanger Programm formuliert. Bei späteren Autoren tritt dann die Aufgabe auf, bei gegebenen Grundformen F und gegebener Gruppe G alle Komitanten J_G der F bzw. G zu finden.

Es sind nur einige wenige Untergruppen G der allgemeinen projektiven Gruppe Γ des R_{n-1} (Gebietes n^{ter} Stufe) für die dieses Problem in demselben Umfange gelöst wurde wie bei projektiven Invarianten.[147]) Hierbei ist G meist dadurch definiert, daß ihre Transformationen gegebene Formen φ_i invariant lassen.[133])

Geometrische Betrachtungen führten *F. Klein* insbesondere zu der Frage, wie sich invariante Beziehungen umsetzen, wenn man statt G

143) *E. Müller,* Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 23 (1914), p. 98—116; Wien. Ber. 118 (1909) und ebenda 127 (1918).

144) Hier versagen die Methoden der Ausdehnungslehre: es müßte eine (überflüssige) Erweiterung derselben eintreten, etwa in der Art, wie Kollineationen mit extensiven Brüchen dargestellt werden. Vgl. hierzu *H. Graßmann,* Werke I, p. 240 u. 438. Ferner *R. Mehmke*, Vorles. über Punkt- u. Vektorenrechnung, p. 320ff., Leipzig 1913 (Teubner).

145) Sollte die Ausdehnungslehre und deren Weiterbildung das werden, was sich manche Geometer von ihr erhoffen, nämlich eine Invariantentheorie der linearen homogenen Gruppe, so müßte vor allem neben exakter arithmetischer und algebraischer Formulierung der Grundbegriffe, der Gruppen- und Invariantenbegriff in den Vordergrund gestellt werden (Nr. 19). Etwa so, wie dies für die linearen Gruppen der Ebene in dem Buche *H. Beck,* Koordinatengeometrie (Springer 1919) geschieht.

146) Erlangen 1872. Wieder abgedruckt: Math. Ann. 43 (1893), p. 63—100 (= Ges. Abhandl. I, p. 377). Hierzu auch *G. Fano,* III AB 4b, Nr. 3.

147) Hierzu *D. Hilbert,* Math. Ann. 36 (1890), p. 532.

eine umfassendere Gruppe G' nimmt. Nehmen wir G' als die allgemeine projektive Gruppe Γ und denken uns die lineare Gruppe G, wie angeführt, dadurch definiert, daß bei ihr gewisse Formen φ_i invariant bleiben, so liegt es nahe, zwecks Aufstellung aller Komitanten J_G von Grundformen F bzw. G folgendes Verfahren einzuschlagen („Adjunktionssatz"): Man adjungiert die φ_i zum Grundformensystem (F_i) und sucht für das so erweiterte System (F_i, φ_i) *projektive* Invarianten J_Γ. Jede J_Γ, in der die Koeffizienten wenigstens einer der F_i wirklich vorkommen, ist dann sicher eine J_G. Das Umgekehrte gilt aber nicht allgemein, wenigstens nicht für ganze rationale Invarianten[148]); inwieweit diese Umkehrung gilt, ist eine noch ungelöste Frage.

Die Theorie der Komitanten solcher Gruppen G, für die der Adjunktionssatz gilt, ist dann zurückgeführt auf die der projektiven Invarianten. Damit ist insbesondere die Endlichkeit der vollständigen Invarianten- und Formensysteme für diese Gruppen G erwiesen.[149])

Neuerdings wurde diese Endlichkeit von *E. Fischer*[150]) für solche Transformationsgruppen bewiesen, die mit $x_i = \sum \alpha_{ik} x_k$ auch die Transformation $x_i = \sum \bar{\alpha}_{ki} x_k'$ enthalten, wo $\bar{\alpha}_{ik}$ komplex-konjugiert zu α_{ik} ist. Derartige Gruppen sind z. B. die Drehungsgruppen; die Frage nach allen solchen Gruppen ist noch offen.

Eine bemerkenswerte transzendente Methode zwecks Bildung der Invarianten von beliebigen endlichen Gruppen wurde von *A. Hurwitz*[151]) angegeben. Bei endlichen diskreten Gruppen erhält man die allgemeinste Invariante, wenn man eine Funktion $F(a_i)$ den endlichvielen Transformationen der Gruppe unterwirft und alle so entstehenden Ausdrücke addiert. *Hurwitz* dehnt dies auf endliche, kontinuierliche Gruppen (im *Lie*schen Sinne) aus, wobei an Stelle der Summe ein über die Mannigfaltigkeit der Parameter (Transformationskoeffizienten) erstrecktes Integral tritt. Im Speziellen führt *Hurwitz* seine Methode für Drehungsinvarianten näher aus (Nr. 17).

Wir geben in den folgenden Nummern bei den einzelnen zur Aufzählung gelangenden Gruppen G die dazu gehörigen Komitantentypen an, d. h. die Komitanten einer Reihe von Linearformen $L_x : (a'x), (b'x), \ldots$ in Punktkoordinaten x und von Linearformen

148) *H. Burkhardt,* Math. Ann. 43 (1893), p. 197—215; *E. Study,* Leipzig. Ber. 48 (1896), p. 649—664; *R. Weitzenböck,* l. c. 133).

149) Diese Frage wurde auch von *L. Maurer* behandelt: Münchner Ber. 29 (1899), p. 147; Math. Ann. 57 (1903), p. 265—313.

150) Gött. Nachr. 1915.

151) Ebenda 1897.

L_u': (au'), (bu'), ... in den zu den x kontragredienten u'. Damit sind auch für beliebige Grundformen die Faktortypen für deren Komitanten aufgezählt; man hat nur die Reihen $a', b', \ldots$ und $a, b, \ldots$ als Symbolreihen aufzufassen. Für die allgemeine projektive Gruppe sind diese Typen:

$$(a'b' \ldots m'), \quad (ab \ldots m), \quad (a'a).$$

16. Seminvarianten. Schiebungsinvarianten. Eine $\frac{1}{2}(n^2+n-2)$-gliedrige Untergruppe G der allgemeinen projektiven Gruppe des R_{n-1}, deren Invariantentheorie ausführlich von *J. Deruyts*[152]) entwickelt wurde, ist gegeben durch die Transformationen (in homogenen Veränderlichen):

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \bar{x}_2 = \alpha_{22}x_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \bar{x}_{n-1} = \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}x_n \\ \bar{x}_n = \alpha_{n,n}x_n. \end{cases}$$

Die Invarianten bezüglich dieser Gruppe heißen *Semi-Invarianten* oder kürzer *Seminvarianten.*

Die linearen Transformationen (1) lassen sich durch die Angabe festlegen, daß ein invarianter R_{n-2} $(x_n = 0)$, in diesem ein invarianter R_{n-3} $(x_n = 0, x_{n-1} = 0)$, ..., in diesem eine invariante Gerade $(x_n = 0, \ldots, x_2 = 0)$ und auf dieser ein invarianter Punkt $1:0:0:\ldots:0$ vorhanden ist. Für Linearformen $(a'x)$, ... und (au'), ... gibt es die folgenden Typen von Seminvarianten:

$$(2)\quad \begin{cases} (a'\alpha), \\ a_1', \quad (a'b')_{12} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}, \quad (a'b'c')_{123} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad (a'b' \ldots m') \\ \alpha_n, \ (\alpha\beta)_{n-1,n} = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_{n-1} & \beta_n \end{vmatrix}, \ (\alpha\beta\gamma)_{n-2,n-1,1} = \begin{vmatrix} \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n \end{vmatrix}, \ldots, (\alpha\beta\ldots\mu). \end{cases}$$

Bezüglich der Verwendung von Seminvarianten als Leitglieder sowie bezüglich der Differentialgleichungen für Seminvarianten sei auf I B 2, Nr. 23 hingewiesen.[153])

152) *J. Deruyts,* Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Lüttich 1890. Vgl. hierzu *W. Fr. Meyer,* I B 2, Nr. 23 oder ausführlicher den Invariantenber. im Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. I (1890), p. 245.

153) Hierzu noch: *W. Fr. Meyer,* Leipzig. Ber. 60 (1908), p. 190—210; Gött. Nachr. 1908, p. 117—127; Allgemeine Formen- und Invariantentheorie I, § 16, Sammlung Schubert 33 (1909); *Grace* und *Young,* The Algebra of Invariants, p. 28 (Cambridge 1903); *W. E. Story,* Trans. Am. math. Soc. 8 (1907), p. 33—70.

Eine $(n-1)$-gliedrige Untergruppe der durch (1) gegebenen Gruppe wird durch die Translationen des R_{n-1} gegeben:

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha x_1 + \alpha_{1n} x_n \\ \bar{x}_2 = \alpha x_2 + \alpha_{2n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n-1} = \alpha x_{n-1} + \alpha_{n-1,n} x_n \\ \bar{x}_n = \alpha x_n. \end{cases}$$

Die Invarianten dieser Gruppe heißen *Schiebungsinvarianten*; für Linearformen in x und u' gibt es die folgenden:

$$(4)\qquad a_i'(i \neq n),\quad (a'b'\ldots m'),\quad (ab\ldots m),\quad a_n,\quad (a'a).$$

So werden z. B. die Koeffizienten der von x_n freien Glieder einer Form $F_p = (a'x)^p$ Schiebungsinvarianten. Für $n = 2$ sind bei unimodularen Substitutionen Schiebungsinvarianten und Seminvarianten identisch.

Nimmt man zu (3) die Ähnlichkeitstransformationen $\bar{x}_i = \alpha_{ii} x$ hinzu, so erhält man „Schiebungs- und Streckungsinvarianten". (4) bleibt dabei ungeändert, für die Komitanten tritt noch die Forderung hinzu, bezüglich der einzelnen Indizes isobar zu sein.[154])

17. Drehungsinvarianten (orthogonale Invarianten). Die gemischte $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$-gliedrige Gruppe der Euklidischen Drehungen und Spiegelungen des R_{n-1} ist gegeben durch die Transformationen:

$$(5)\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha_{11} x_1 + \cdots\cdots + \alpha_{1,n-1} x_{n-1} \\ \bar{x}_2 = \alpha_{21} x_1 + \cdots\cdots + \alpha_{2,n-1} x_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n-1} = \alpha_{n-1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n-1,n-1} x_{n-1} \\ \bar{x}_n = \pm x_n. \end{cases}$$

Hierbei bilden die α_{ik} eine eigentliche oder uneigentliche orthogonale Matrix. Drehpunkt ist der Anfangspunkt $0:0:\ldots:0:1$. Führt man hier die Reihe $l' = 0:0:\ldots:0:1$ ein, so daß $(l'x) = x_n = 0$ die Gleichung des uneigentlichen R_{n-2} ist, so sind die Invarianten von Linearformen bezüglich (5), die *Drehungsinvarianten* gegeben durch

$$(6)\qquad (ab\ldots m),\quad (ab).$$

Hier sind die $a, b, \ldots$ irgendwelche Reihen $x, y, \ldots, u', v', \ldots$ oder die Reihe l'. Der Unterschied zwischen Ko- und Kontragredienz fällt hier fort. Demgemäß werden hier die beiden Hauptsätze der symbolischen Methode besonders einfach.[155])

---

154) *J. Deruyts*, l. c.; für binäre Formen bei *W. Fr. Meyer*, l. c.

155) *E. Study*, Leipzig. Ber. 49 (1897), p. 442—461; *R. Weitzenböck*, Wiener Denkschriften 89 (1913), p. 709—732.

Statt (6) kann man auch, in ein Gebiet $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe herabsteigend oder zu inhomogenen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ übergehend, die beiden Typen angeben:

$$(7) \qquad (ab \ldots m)_{1,2,\ldots,n-1} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_1 m_2 \cdots m_{n-1} \end{vmatrix}, \quad (a \mid b) = \sum_1^{n-1} a_i b_i.$$

Wegen (6) lassen sich die Drehungsinvarianten auffassen als projektive Invarianten der gegebenen Grundformen, zu denen die beiden Formen $L = (l'x) = x_n$ und $\Phi = \sum_1^n x_i^2$ hinzutreten. Damit ist auch die Endlichkeit für Drehungsinvarianten nachgewiesen. Die Typen (6) und den Endlichkeitsbeweis gaben *D. Hilbert*[156]), *H. Burkhardt*[157]), *E. Study*[155]) und *A. Hurwitz*[158]).

An speziellen Ausführungen ist — abgesehen von Arbeiten aus der Vektoralgebra — nur weniges über Drehungsinvarianten erschienen. Binäre Formen behandelt *E. B. Elliott*[159]). Vollständige Formensysteme wurden angegeben von *R. Weitzenböck* für: Kegelschnitt[160]), Fläche 2. Ordnung[161]), linearer Komplex im R_3[162]).

Drehungsinvarianten ternärer Bilinearformen werden vektoralgebraisch untersucht von *G. Rabinowitsch*[163]); die ternäre C_3 werden behandelt von *J. Thomae*[164]) und *R. Weitzenböck*[165]), die ternäre C_4 von *O. Lüders*[166]).

Erwähnt müssen hier noch werden die besonders für die Theorie der linearen Integralgleichungen wichtigen Verallgemeinerungen auf $n = \infty$, die zuerst von *E. Hellinger*[167]) und *O. Toeplitz*[168]) behandelt worden sind.

18. Binäranalyse. Es sei $f_n = f(x_1, x_2; a_0, \ldots, a_N)$ eine binäre Form mit den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_N$. Diese letzteren können als

156) Math. Ann. 36 (1890), p. 471—534.
157) Ebenda 43 (1893), p. 197—215.
158) Gött. Nachr. 1897.
159) Proc. London math. Soc. 33 (1901), p. 226—257; Quart. J. 37 (1905), p. 91—105; *A. Berry,* Proc. Cambr. Phil. Soc. 13 (1905), p. 55—57.
160) Wien. Ber. 122 (1913), p. 1595—1606.
161) Monatsh. Math. Phys. 25 (1914), p. 89—120.
162) Ebenda, p. 121—124.
163) Rend. di Palermo 36 (1913), p. 99—110. Hierzu auch: *A. Terracini,* ebenda 33 (1912), p. 275—280; *M. Bottasso,* ebenda 34 (1912), p. 158—164.
164) Leipzig. Ber. 51 (1899), p. 317—353.
165) Wien. Ber. 128 (1919), p. 9—23.
166) Diss. Halle 1910.
167) Diss. Göttingen 1907.
168) Gött. Nachr. 1907, p. 101—109 u. 110—115.

Punktkoordinaten in einem R_{N+1} von $N+1$ Dimensionen, oder auch als homogene Punktkoordinaten in einem R_N gedeutet werden. Hierdurch wird die Gesamtheit der f_n auf einen mehrdimensionalen Raum R abgebildet.

Eine lineare Transformation T_x der binären Veränderlichen x_1, x_2 induziert eine lineare Transformation T_a der a_i, also eine lineare Punkttransformation des Raumes R. Die T_a bilden eine mit der Gruppe der T_x meroëdrisch isomorphe Untergruppe U der allgemeinen projektiven Gruppe des Raumes R.[169])

Nach *Ostrowski*[26]) wird jede T_a durch N verschiedene T_x erzeugt, die auseinander durch Multiplikation mit n^{ten} Einheitswurzeln hervorgehen. Eine ganzzahlige T_a wird, allenfalls nach Änderung aller Vorzeichen, durch eine ganzzahlige T_x erzeugt. Die Gruppe T_a läßt sich als die größte Gruppe charakterisieren, die die Diskriminante der f_n in sich überführt. Analog läßt sich die Gruppe, die durch T_x bei zwei Formen induziert ist, als die größte Gruppe charakterisieren, die die Resultante der beiden Formen in sich überführt und bei der die Koeffizienten der beiden Formen getrennt transformiert werden.

Auf der Beziehung zwischen T_x und T_a beruht die Möglichkeit einer „Binäranalyse", d. h. die Möglichkeit, das Verhalten geometrischer Gebilde von R gegenüber U mittels binärer Invarianten zu untersuchen.

Derartige Zusammenhänge („n-är-Analysen") sind wiederholt untersucht worden.[170]) Wir führen hier eine von *E. Waelsch*[171]) eingehend behandelte Abbildung näher aus, bei der U die Gruppe der Euklidischen Drehungen um einen Punkt im R_3 (bzw. R_4) ist. Einer $f_2 = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2$ wird der Vektor (a_1, a_2, a_3) zugeordnet:

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{12}), \quad a_2 = -\tfrac{1}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{22}), \quad a_3 = i\,\alpha_{12} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Es ist dann $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \alpha_{11}\alpha_{12} - \alpha_{12}^2$.

Der Vektoraddition entspricht die Addition der zugeordneten Formen, dem Vektorprodukt und dem skalaren Produkt entsprechen 1. und 2. Überschiebung. Lineare Vektorfunktionen können durch doppeltquadratische Binärformen $\alpha_x^2\beta_y^2$, n-Beine durch n-fach quadra-

169) Bezüglich weiterer Eigenschaften der T_a vgl. *A. Hurwitz*, Math. Ann. 45 (1894), p. 381—404; *J. Wellstein*, ebenda 67 (1909), p. 462—489 u. 490—497.

170) Vgl. hierzu *G. Fano*, III AB 4 b, Nr. 28.

171) Wien. Anzeiger 38 (1901), p. 303—314; ebenda 39 (1902), p. 40, 82; Wien. Ber. 112 (1903), 3 Mitteilungen. Die gesamten diesbezüglichen Arbeiten findet man angegeben in der Literaturzusammenstellung am Schlusse des Buches von *J. A. Schouten*, Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis, Leipzig 1914 (Teubner). Nachträge hierzu Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), p. 382.

tische Formen dargestellt werden.[172]) Hieran schließen sich zahlreiche Anwendungen, besonders auf Kugelfunktionen im R_3.[173])

Drehungen im R_4 können analog dargestellt werden durch inkongruente lineare Transformationen zweier binärer Veränderlicher; hierbei werden die Punkte des R_4 auf binäre Bilinearformen abgebildet.[174]) *E. Waelsch*[175]) gibt auch hierzu zahlreiche Anwendungen.

19. Vektor- und Tensoralgebra. Die Vektoralgebra ist die Theorie der Drehungsinvarianten einer Reihe von Linearformen, deren Koeffizienten $a_i, b_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ als skalare Komponenten von Vektoren $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ aufgefaßt werden. Im besonderen sind es Euklidische Drehungs- und Umlegungsinvarianten, wenn die quadratische Fundamentalform die spezielle Gestalt $\Phi = (xx) = \sum x_i^2$ hat. Es gibt dann für $n = 4$ z. B. (dreidimensionaler Raum) nur die beiden Typen (7) von Invarianten[157]): $(abc) = [\bar{a}\bar{b}\bar{c}]$ ist das äußere Produkt der drei Vektoren $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$; $(a \mid b)$ ist das innere Produkt von $\bar{a}$ und $\bar{b}$.

Die Bezeichnung der Gesamtheit der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit einem einzigen Zeichen a (Vektor $\bar{a}$, extensive „Größe" a) gründet sich auf genau dieselbe Abstraktion, die man in der Invariantentheorie seit langem vollzieht, wenn man von dem „Punkt" oder von der „Größenreihe" (Symbolreihe) a spricht. Es sind ganz wenige Regeln aus den Elementen der Algebra und der Determinantentheorie, die zusammen mit den für Drehungsinvarianten bestehenden Identitäten die gesamten Umformungsgesetze der Vektoralgebra (und damit auch die der Vektoranalysis) ausmachen.

Verwendet man inhomogene Koordinaten $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ im R_{n-1}, so ist ein *Tensor* p^{ter} Stufe durch eine multilineare Form $F_p = \sum a^{ikl\ldots}_{\lambda\mu\nu\ldots} x_i y_k z_l \ldots u_\lambda v_\mu w_\nu \ldots$ gegeben.[176]) Die Tensoralgebra ist die Theorie der affinen und orthogonalen Invarianten der Formen F_p. Es sind bisher hauptsächlich Tensoren 2. Stufe und von diesen die einfachsten Invarianten behandelt worden, wobei mehr der formalen Seite Rechnung getragen wurde.[177])

172) Wien. Ber. 113 (1904), drei Arbeiten; ebenda 114 (1905); Wien. Monatsh. 17 (1906), p. 241—280; Paris C. R. 143 (1906).

173) Wien. Monatsh. 16 (1905), p. 273—311; ebenda 20 (1909); Wien. Ber. 118 (1908); Paris C. R. 144 (1907) und ebenda 145 (1907).

174) *E. Study,* Am. J. 15 (1895), p. 198.

175) Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 90; Paris C. R. 154 (1912); Wien. Ber. 122 (1913); ebenda 125 (1916).

176) Vgl. z. B. *H. Weyl,* Raum, Zeit, Materie, p. 30 (Springer 1918).

177) So heißt beispielsweise ein Tensor 2. Stufe auch: Affinor (*Jung*), dyadic (*Gibbs, Wilson*), Tensortripel (*Vogt*), komplette Dyade (*Jaumann*), asymetrischer Tensor (*R. H. Weber*), Diatensor (*Budde*). Für spezielle Tensoren 2. Stufe

20. Bewegungsinvarianten. Die Untergruppe G der allgemeinen projektiven Gruppe des R_{n-1}, deren Transformationen eine nicht-singuläre Punktmannigfaltigkeit $\Phi = (m'x)^2 = 0$ invariant lassen, besitzt eine Invariantentheorie, die mit der bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe identisch ist, wenn man den gegebenen Grundformen F_i die quadratische Form Φ adjungiert.[178] Die Diskriminante von Φ ist hierbei eine reine Zahl. Nimmt man Φ als absolute Maßfläche einer nichteuklidischen Maßbestimmung, so sind die Invarianten von (F_i, Φ) nichteuklidische Bewegungsinvarianten. Deren Struktur wird besonders einfach für $\Phi = \sum x_i^2$.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Diskriminante von Φ verschwindet. Nimmt man insbesondere für Φ eine einfach-singuläre quadratische Mannigfaltigkeit von R_{n-2}-Koordinaten u_i' : $\Phi = (mu')^2 = 0$, deren zugehöriges Punktgebilde (für $n = 3$ die „Kreispunkte", für $n = 4$ der „Kugelkreis") im linearen, uneigentlichen $R_{n-2} : L = (l'x) = 0$ gelegen ist, so bilden die linearen Transformationen, die Φ' in sich überführen, die „Hauptgruppe" des R_{n-1}. Ihre Invarianten heißen „Hauptinvarianten".

Nimmt man $\Phi' = (u' \mid u') = \sum_1^{n-1} u_2'^2$ und $L = (l'x) = x_n$, so sind die Transformationen der Hauptgruppe gegeben durch:

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \cdots\cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \varepsilon_1 x_n \\ \bar{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \cdots\cdots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} + \varepsilon_2 x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n-1} = \alpha_{n-1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}x_n \\ \bar{x}_n = \varepsilon_n x_n. \end{cases}$$

Hierbei ist die Matrix der α_{ik} orthogonal: $|\alpha_{ik}| = \pm 1$ und $\varepsilon_n \neq 0$. Für $|\varepsilon_n| = 1$ entsteht die gemischte Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen, deren Invarianten „*Bewegungsinvarianten*" heißen. Sie unterscheiden sich von den Hauptinvarianten nur dadurch, daß letztere bezüglich der Reihen x_n homogen sein müssen.

Bewegungsinvarianten von Grundformen F_i lassen sich als projektive Invarianten von (F_i, Φ', L) darstellen.[179] Hieraus ergeben sich

---

gibt es noch die Bezeichnungen: Deviatoren (*Schouten*), Antitensoren (*Spielrein*), Axiator (*Spielrein*), Idemfaktor (*Gibbs*).

Eine lehrreiche Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen findet man bei *E. Jahnke*, Arch. Math. Phys. 25 (1917), p. 310—328. In formaler Hinsicht geht am weitesten *J. A. Schouten*, Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis, Leipzig 1914 (Teubner).

178) *E. Study*, Leipzig. Ber. 49 (1897), p. 442—461.

179) *R. Weitzenböck*, Math. Ann. 75 (1914), p. 569—585.

die beiden Fundamentalsätze[180]) und die Endlichkeit vollständiger Systeme.[180]) Für Linearformen in $x, \ldots$ und $u', \ldots$ erhält man $2n+2$ Typen, die z. B. für quaternäre Formen ($n = 4$) lauten[181]):

$$f_1 = (a'b'c'd'); \quad f_2 = (a'b'c'l') = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}; \quad f_3 = (a'a);$$

$$f_4 = (l'a) = a_4; \quad f_5 = (abcd); \quad f_6 = (a'|b') = a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3';$$

$$f_7 = (a'|abc) = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}; \quad f_8 = (a'|b'|ab) = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & 0 \\ b_1' & b_2' & b_3' & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix};$$

$$f_9 = (ab\|cd) = \sum_i (ab)_{i4}(cd)_{i4} = \sum_1^3 \begin{vmatrix} a_i & a_4 \\ b_i & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_i & c_4 \\ d_i & d_4 \end{vmatrix};$$

$$f_{10} = (abc\|def) = \sum_{ik} (abc)_{ik4}(def)_{ik4} = \sum_{(1,2,3)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_2 & d_3 & d_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix}.$$

Spezielle Ausführungen finden sich in den genannten Arbeiten von *R. Weitzenböck*[182]). Für ternäre und quaternäre quadratische Formen gelangen Bewegungsinvarianten seit langem bei der metrischen Klassifikation von Kurven und Flächen 2. Ordnung zur Aufzählung.[183])

21. Affine Invarianten. Die ($n^2 - n$)-gliedrige affine Gruppe[184]) des R_{n-1} ist gegeben durch die Transformationen

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \cdots\cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n-1} = \alpha_{n-1,1}x_1 + \cdots\cdots + \alpha_{n-1,n}x_n \\ \bar{x}_n = \alpha_{nn}x_n. \end{cases}$$

Hierbei ist $L = (l'x) = x_n = 0$ die Gleichung des uneigentlichen (unendlichfernen) R_{n-2} des Gebietes n^{ter} Stufe R_{n-1}.

Die Komitanten der Grundformen F_i bezüglich der affinen Gruppe, die *Affininvarianten,* sind projektive Invarianten des Systems (F_i, L); für Linearformen in x und u' haben wir die folgenden Typen[185]):

$$(2)\qquad (a'b'\ldots m'),\quad (ab\ldots m),\quad (a'a),\quad (a'b'\ldots l'),\quad (l'a).$$

180) *R. Weitzenböck,* Wien. Ber. 122ff. (ab 1913), 1., 2., 3. u. 7. Mitteilung.
181) Ebenda, 7. Mitteilung.
182) Ebenda, 5. bis 15. Mitteilung.
183) Vgl. z. B. *C. Koehler,* Arch. Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 21—33.
184) „Allgemeine lineare Gruppe" nach *S. Lie.* Vgl. hierzu *G. Fano,* III AB 4b, Nr. 7.
185) *R. Weitzenböck,* Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 192—209.

Hierbei ist l' die Größenreihen $0:0:0:\ldots:1$. Hieraus folgt insbesondere auch die Endlichkeit vollständiger Systeme von affinen Invarianten.

Analoge Sätze gelten für die „spezielle lineare Gruppe" $\alpha_{nn} = 1$, $|\alpha_{ik}| = 1$, sowie für die dualen Gruppen, bei deren Transformationen nicht ein linearer R_{n-2}, sondern ein Punkt fest bleibt.

Ebenso gilt für die „affine Gruppe mit festem Punkt" Γ_0, deren Transformationen einen linearen $R_{n-2}: L = (l'x) = 0$ und einen Punkt $P = (lu') = 0$ invariant lassen, der Adjunktionssatz (Nr. **15**): Die Invarianten bezüglich Γ_0 sind projektive Invarianten von (F_i, L, P).[185]

22. Weitere Gruppen.[186] Von speziellen Gruppen, deren Komitanten bisher behandelt wurden, sind in erster Linie *die Gruppen der reziproken Radien* G_r zu erwähnen, deren Transformationen sich aus den Transformationen der Hauptgruppe durch Hinzunahme der Inversionen ergeben. Bei Verwendung polysphärischer Koordinaten deckt sich die Invariantentheorie der G_r mit der der projektiven Gruppe von Transformationen, die eine nicht-singuläre quadratische Punktmannigfaltigkeit in sich überführen und die von *E. Study*[187] ausführlich untersucht wurde. Von demselben Geometer stammt auch eine vorbildliche invariantentheoretische Behandlung des Apollonischen Problems.[188] [189]

Für eine spezielle zehngliedrige Gruppe des R_4, die „*Galilei-Newton*-Gruppe", gibt *R. Weitzenböck* alle Invariantentypen an.[190]

P. Benedetti[191] behandelt Komitanten von hyperalgebraischen Formen[192] bezüglich projektiver und antiprojektiver Transformationen.

H. Hilton[193] untersucht Invarianten von einzelnen Punkten im R_{n-1} gegenüber einer einzigen linearen Substitution.

---

186) Vgl. hierzu *G. Fano,* III AB 4b, Nr. **34**—**42**.

187) Leipzig. Ber. 49 (1897), p. 442—461.

188) Math. Ann. 49 (1897), p. 497.

189) Betreffs weiterer Literatur über kreis- und kugelgeometrische Arbeiten sei auf III AB 4b, Nr. **11**—**13** verwiesen. Ferner auf die bei *R. Weitzenböck,* Wien. Ber. 121 (1912), angegebene Literatur. Vgl. auch *E. Kasner,* Trans. Am. mat. Soc. 1 (1900), p. 430—498.

190) Math. Ann. 80 (1919), p. 76—82.

191) Pisa Ann. 8 (1899), p. 1—113.

192) *G. Fano,* III AB 4a, Nr. **16**—**18**.

193) Proc. London math. Soc. (2) 10 (1912) und (2) 11 (1912).

Zweiter Teil.

b) Differentialinvarianten.

A. Einleitung.

1. Historisches. Die Differentialinvarianten haben ihren Ursprung in der Differentialgeometrie und in der Theorie der Differentialgleichungen. Wenn auch gelegentlich schon in älteren Arbeiten Differentialinvarianten vorkommen, so beginnt deren systematische Bearbeitung doch erst in der 2. Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Hier ist in erster Linie *Riemann* (1854) zu nennen, dessen Verallgemeinerung des *Gauß*schen Krümmungsmaßes den Anstoß zum weiteren Ausbau der Theorie der Differentialformen gegeben hat, welcher Ausbau von *Christoffel* (1869), *Lipschitz* (1869), *Beez*, *Voß*, *Schur*, *Killing*, *Mangoldt*, *Ricci* u. a. angebahnt worden ist.

Ebenfalls von geometrischer Seite her, teilweise aber einen spezielleren Standpunkt einnehmend, werden Differentialinvarianten von *Lamé* (1859) und *Beltrami* (1866) behandelt. Hier tritt der Begriff „Differentialparameter" in den Vordergrund.

In der Theorie der Differentialgleichungen werden Differentialinvarianten zuerst von *Cockle* (1862), *Schwarz*, *Laguerre*, *Brioschi*, *Halphen*, *Forsyth* u. a. behandelt.

Systematische Behandlung von Differentialinvarianten bei Zugrundelegung des Gruppenbegriffes finden wir erst bei *Lie* (1872, 1882) und von geometrischer Seite her in den grundlegenden Arbeiten von *Halphen* (1875). Ersterer entwickelte dann in zahlreichen Arbeiten 1878—1884 eine allgemeine Theorie der projektiven Differentialinvarianten der krummen Linien, die dann vielfach, besonders von englischen Mathematikern (*Sylvester*, *Cayley* u. a.), weiter ausgebaut worden ist.

Zu Beginn dieses Jahrhunderts setzen zahlreiche Untersuchungen von *E. Pascal*, *Sinigallia* u. a. über höhere Differentiale und Formen solcher ein, während amerikanische Autoren, hauptsächlich *Wright*, *Maschke*, *Haskins*, *Curtiss*, *Wilczynski* u. a. die Theorie der Differentialformen und die der projektiven Differentialinvarianten weiter ausbauen.

Die Theorie der Differentialformen (Tensoren) hat mit Rücksicht auf ihre Verwendung in modernen physikalischen Theorien in den letzten Jahren eine ausführliche Bearbeitung erfahren. Wir erwähnen diesbezüglich die Arbeiten von *Ricci*, *Levi-Civita*, *Hessenberg*, *Einstein*, *Hilbert*, *Klein*, *E. Noether*, *Weyl*.[1])

1) Bezüglich ausführlicher Literaturangaben siehe die folgenden Nummern.

2. Transformationen und deren Objekte. Es sei durch die n Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

eine endliche oder unendliche kontinuierliche Transformationsgruppe G gegeben. Die f_i sollen stetige und genügend oft stetig-differentierbare Funktionen sein.

Objekte für die Transformationen von G sind erstens die n unabhängigen Veränderlichen x_i selbst; zweitens Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der x_i, die vermöge (1) übergehen in

$$F'(x_1', x_2', \ldots, x_n') = F(x_1, x_2, \ldots, x_n); \tag{2}$$

drittens Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_i'}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k'}, \ldots$, die nach (1) und (2) so transformiert werden:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i'} &= \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i'} \\ \frac{\partial^2 F'}{\partial x_i' \partial x_k'} &= \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i'}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_k'} + \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x_\lambda}\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x_i' \partial x_k'}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Viertens sollen die ersten und höheren Differentiale $dx_i, d^2x_i, \ldots, d\delta x_i, \ldots$ den Transformationen der Gruppe G unterliegen. Hierunter ist folgendes zu verstehen. Sind die x_i Funktionen einer unabhängig Veränderlichen $t: x_i = \varphi_i(t)$, so ist:

$$dx_i = \frac{d\varphi_i}{dt}\cdot dt, \quad d^2 x_i = \frac{d^2\varphi_i}{dt^2}\cdot (dt)^2, \ \ldots; \tag{4}$$

es werden auch die x_i' Funktionen von $t: x_i' = \psi_i(t)$ und daher

$$\left\{\begin{aligned} dx_i' &= \frac{d\psi_i}{dt}dt = \sum_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda}\frac{\partial \varphi_\lambda}{dt}dt = \sum_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda}dx_\lambda \\ d^2 x_i' &= \frac{d^2\psi_i}{dt^2}(dt)^2 = \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}dx_\lambda dx_\mu + \sum_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda} d^2 x_\lambda \end{aligned}\right. \tag{5}$$

u. s. f.

Unterscheidet man mehrere Arten von Differentialen $dx, \delta x, \ldots$, so hat man anzunehmen, daß die x_i Funktionen von ebenso vielen Hilfsveränderlichen $t, \tau, \ldots$ sind: $x_i = \varphi_i(t, \tau, \ldots)$. Es ist dann[2])

$$\left\{\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}dt, \quad \delta x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}d\tau, \ \ldots, \\ d\delta x_i &= \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial \tau}\cdot dt \cdot d\tau, \quad \ldots, \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

2) Man kann auch etwas anders verfahren, indem man statt der Reihe $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ein System von irgend n Größen $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ als „Differentiale d" festlegt. Dieser formale Kalkül mit Differentialen wurde von *Cauchy* begründet.

Endlich sind fünftens Funktionen $\Phi\left(x, F(x), \frac{\partial F}{\partial x}, dx, \ldots\right)$ der unter erstens bis viertens angeführten Dinge Objekte, die den Transformationen von G unterworfen werden. Unter diesen Funktionen sind besonders hervorzuheben die *Differentialformen*, das sind ganze, rationale Funktionen der $dx, \delta x, \ldots$, *homogen* in allen Reihen von Differentialen.

3. Der Invariantenbegriff. Ebenso wie in der Theorie der algebraischen Invarianten gibt es auch bei den Differentialinvarianten eine große Menge von Namen und Bezeichnungen. Ein und dasselbe Ding trägt oft verschiedene Namen.[3])

Jedem Invariantenbegriff liegen entweder einzelne Transformationen, in der Regel jedoch eine Transformationsgruppe zugrunde. Wir nennen im folgenden eine am Schlusse der vorigen Nr. mit Φ bezeichnete Funktion *allgemein eine „Differentialinvariante“* bezüglich der Transformationsgruppe G, wenn für jede Transformation von G die Identität besteht

$$(7)\qquad \Phi\left(x', F'(x'), \frac{\partial F'}{\partial x'}, dx', \ldots\right) \equiv \omega \cdot \Phi\left(x, F(x), \frac{\partial F}{\partial x}, dx, \ldots\right),$$

und zwar *identisch in allen Reihen* $x, F(x), \frac{\partial F}{\partial x}, dx, \ldots$, wenn links die transformierten Größen vermöge der Transformationsformeln (1), (2), (3) und (5) durch die $x, F(x), \ldots$ ausgedrückt werden. Der Faktor ω kann die verschiedenartigsten Gestalten annehmen; ist er für jede Transformation von G gleich 1, so ist Φ eine *absolute Differentialinvariante*, im anderen Falle eine *relative*. Den Zusatz „bei der Gruppe G“ läßt man gewöhnlich weg, wenn keine nähere Angabe notwendig ist.[4])

---

3) Wir führen die folgenden Namen an: Differentialkovarianten, Differentialkontravarianten, Differentialformen, Tensoren, Differentialausdrücke, Differentialparameter. Spezielle Bezeichnungen sind: Kurveninvarianten, Punktinvarianten, Biegungsinvarianten, Fundamentalinvarianten bei *J. Knoblauch*, Grundl. d. Differentialgeom.; Fundamentalinvarianten bei Differentialgleichungen, siehe diese Encykl. II A 4 b, Nr. 33; wesentliche Differentialinvarianten bei *G. Scheffers*, Einführung . . .; Charakteristische Invarianten bei *E. Vessiot*, II A 4 b, Nr. 33; Semiinvarianten bei *M. Halphen*, J. de l'Éc. polyt. 47 (1880); in anderer Bedeutung bei *E. J. Wilczynski*, Proj. Differentialgeom.; natürliche Koordinaten, Invariante Linien- und Flächendifferentiale, kovariante Koordinaten bei *G. Pick*, Wien. Ber. 115 (1906); Leipzig. Ber. 69 (1917); Universelle Invarianten bei *M. Rabut*, J. de l'Éc. polyt. (2) 4 (1898); Deformationsinvarianten bei *J. E. Wright*, Am. J. of math. 27 (1905).

4) Dafür spricht man von projektiven, affinen usw. Invarianten.

Ein System von Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi_1(x, F(x), \ldots) = 0, \\ \Phi_2(x, F(x), \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

heißt *bei G invariant*, wenn vermöge (8) die transformierten Gleichungen bestehen:

$$\Phi_1(x', F'(x'), \ldots) = 0, \quad \Phi_2(x', F'(x'), \ldots) = 0, \quad \ldots$$

B. Differentialinvarianten spezieller Transformationsgruppen.

4. Erweiterung einer Gruppe.[5]) Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n komplexe Veränderliche und durch die n Gleichungen

$$(9)\qquad x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r)$$

eine r-gliedrige, kontinuierliche Transformationsgruppe G_r mit den r wesentlichen Parametern $a_1, \ldots, a_r$ gegeben. Die Gruppe G_r kann anstatt der „endlichen“ Gleichungen (9) auch gegeben werden durch die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$(10)\qquad U_\varrho(f) = \xi_{\varrho 1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{\varrho 2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{\varrho n}\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Hierbei sind die Funktionen $\xi_{\varrho i}$ definiert durch

$$(11)\qquad \xi_{\varrho i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_\varrho}\right)_{a^0},$$

wobei die Klammer mit dem Index a^0 andeuten soll, daß in $\frac{\partial f_i}{\partial a_\varrho}$ für $a_1, \ldots, a_r$ die der identischen Substitution $x_i' = x_i$ zugeordneten Parameterwerte $a_1^0, \ldots, a_r^0$ einzusetzen sind.

Es seien nun die n Veränderlichen x_i Funktionen von $1 \leqq h \leqq n-1$ neuen unabhängigen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_h$

$$(12)\qquad x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_h).$$

Wir setzen dann

$$(13)\qquad x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}, \quad x_{i,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t_\alpha \partial t_\beta} \quad \text{u. s. f.}$$

Wegen (9) und (12) werden auch die x_i' Funktionen der t und $x'_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}$ sollen entsprechend (13) die Ableitungen der x' nach den t bezeichnen.

Durch (9) werden jetzt auch die Ableitungen $x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}$ bei der Gruppe G_r mittransformiert, und zwar wird:

---

5) Vgl. *Lie-Engel*, Kap. 25, p. 522 oder Encykl. II A 6.

$$(14)\begin{cases} x'_{i,\alpha} = \sum_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda} x_{\lambda,\alpha} \\ x'_{i,\alpha\beta} = \sum_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda} x_{\lambda,\alpha\beta} + \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} x_{\lambda,\alpha} x_{\mu,\beta} \\ x'_{i,\alpha\beta\gamma} = \sum_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda} x_{\lambda,\alpha\beta\gamma} + \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} (x_{\lambda,\beta\gamma} x_{\mu,\alpha} + x_{\lambda,\gamma\alpha} x_{\mu,\beta} + x_{\lambda,\alpha\beta} x_{\mu,\gamma}) \\ \qquad + \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\nu} x_{\lambda,\alpha} x_{\mu,\beta} x_{\nu,\gamma}. \end{cases}$$

u. s. f.

Diese Transformationen (14) bilden die „Erweiterung“ der Transformation (9), und zwar spricht man von der 1., 2., ... Erweiterung, je nachdem man nur erste, oder erste und zweite, usw. Ableitungen von (14) hinzunimmt. Ein Beispiel dazu bietet die Transformation der höheren Differentiale dt, δx, dtx, $d\delta x$, ... der vorigen Nummer. An Stelle der endlichen Gleichungen (9) und (14) kann man auch die dazu gehörigen infinitesimalen Transformationen $U_\varrho^{(1)}(f)$, $U_\varrho^{(2)}(f)$, ... der erweiterten Gruppe setzen.

Man findet aus (11) und (14) leicht die folgenden Ausdrücke:

$$(15)\begin{cases} \text{Nullte Erweiterung: } U_\varrho^{(0)}(f) = \sum_i \xi_{\varrho i} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \text{Erste Erweiterung: } U_\varrho^{(1)}(f) = \sum_i \xi_{\varrho i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\alpha \xi_{\varrho i}^{(\alpha)} \frac{df}{\partial x_{i,\alpha}} \\ \text{Zweite Erweiterung: } U_\varrho^{(2)}(f) = \sum_i \xi_{\varrho i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\alpha \xi_{\varrho i}^{(\alpha)} \frac{df}{\partial x_{i,\alpha}} \\ \qquad + \sum_i \sum_{\alpha\beta} \xi_{\varrho i}^{(\alpha\beta)} \frac{\partial f}{\partial x_{i,\alpha\beta}}, \end{cases}$$

u. s. f.

Hierbei ist gesetzt:

$$(16)\begin{cases} \xi_{\varrho i}^{(\alpha)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_{\varrho i}}{\partial x_\lambda} x_{\lambda,\alpha} \\ \xi_{\varrho i}^{(\alpha\beta)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_{\varrho i}}{\partial x_\lambda} \cdot x_{\lambda,\alpha\beta} + \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 \xi_{\varrho i}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} x_{\lambda,\alpha} x_{\mu,\beta} \end{cases}$$

u. s. f.

Bei *Lie* und anderen finden sich die obigen Formeln gewöhnlich in spezieller, unsymmetrischer Gestalt, indem statt der h Veränderlichen t_i h von den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genommen werden, etwa $t_1 = x_1$,

$t_2 = x_2, \ldots, t_h = x_h$. Die restlichen Veränderlichen $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ werden dann nach (12) als abhängige Variable aufgefaßt.[5a])

5. Differentialinvarianten einer Gruppe.[6]) Die Erweiterung einer Gruppe G_r kann so weit getrieben werden, bis die Anzahl der Transformationsgleichungen (9) und (14) zusammen die Anzahl r der Parameter a_i übersteigt. Die so erweiterte G_r ist dann intransitiv[7]) und besitzt Invarianten, die, wenn sie Ableitungen $x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}$ enthalten[8]), „Differentialinvarianten" genannt werden, und zwar m^{ter} Ordnung, wenn m^{te} und keine höheren Ableitungen auftreten[9]). Solche existieren daher bei jeder endlichen Gruppe.[9a])

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten bieten sich zwei Wege dar. Der erste geht aus von den endlichen Transformationsgleichungen (9) und (14) und besteht in der Elimination der Parameter $a_1, \ldots, a_r$. Diese Elimination führt, wie *Lie* bewiesen[10]), stets auf Gleichungen der Form[11])

$$\Omega(x_i', x'_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots) = \Omega(x_i, x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots), \tag{17}$$

$$G(x_i', x'_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots) = \omega \cdot G(x_i, x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots). \tag{18}$$

Auf dieser Methode der Elimination beruhen die direkten, invariantenerzeugenden Prozesse, wie z. B. das „kovariante Ableiten" (Nr. **19**). Bezüglich der entsprechenden formalen Methoden der Variationsrechnung siehe Nr. **28**.

Der zweite Weg, der für die tatsächliche Berechnung von Differentialinvarianten zumeist der gangbarere ist, geht aus von den infinitesimalen Transformationen (15), die die erweiterte Gruppe bestimmen. Erweitert man G_r bis zur m^{ten} Ordnung, sucht also Differentialinvarianten J m^{ter} Ordnung, so erhält man hierfür das vollstän-

---

5a) Explizite Formeln z. B. bei *K. Zorawski*, Krakau Ber. 14 (1893), p. 34—40; *E. Pascal*, Rend. Acc. Linc. (5) 12 (1903).

6) Vgl. hierzu *Lie-Engel* I, Kap. 25; ferner: *T. Levi-Civita*, Atti Ist. Veneto 1894; *Ch. L. Bouton*, Am. J. Math. 21 (1899). Wir lassen hier und im folgenden die Fälle beiseite, wo die durch (12) gegebene Mannigfaltigkeit $(t_1, t_2, \ldots, t_h)$ weniger als h Dimensionen hat oder bei der Gruppe G_r selbst invariant bleibt.

7) Vgl. hierzu *P. Medolaghi*, Rend. Acc. Linc. (5) 7 (1898).

8) Bei einer Gruppe von Ber. Transformationen ist dies nicht notwendig; dort spricht man schon von Differentialinvarianten, wenn J solche x enthält, die Ableitungen bedeuten. Vgl. *Lie-Scheffers*, Ber.Transf., p. 110.

9) Wir zählen auch die Differentialinvarianten nullter Ordnung mit zu den Differentialinvarianten.

9a) *Lie-Engel* I, Kap. 25, p. 549, Theorem 95.

10) *Lie-Engel* I, Kap. 13.

11) Bei (17) ist Ω eine absolute, bei (18) ist G eine relative Invariante, oder $G = 0$ ist eine bei der Gruppe G_r invariante Gleichung.

dige System von r partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$U_\varrho^{(m)}(J) = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{19}$$

mit den $j = N_m + n - r$ unabhängigen Lösungen $J_1, J_2, \ldots, J_j$, wo N_m die Anzahl aller möglichen Ableitungen $x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}$ bis zur m^{ten} Ordnung ist.

6. Vollständige Invariantensysteme m^{ter} Ordnung. Es gibt zu jeder r-gliedrigen Gruppe G_r ∞-viele Differentialinvarianten. Gibt man für die Ordnung eine genügend hohe Schranke m, so existieren j voneinander unabhängige Differentialinvarianten

$$J_1, J_2, \ldots, J_j, \tag{20}$$

und jede analytische Differentialinvariante J m^{ter} oder niedriger Ordnung ist eine analytische Funktion dieser j Invarianten:

$$J = J(J_1, J_2, \ldots, J_j). \tag{21}$$

(20) heißt deshalb *„ein vollständiges System von Differentialinvarianten m^{ter} Ordnung"* oder kurz *„vollständiges System m^{ter} Ordnung"*.

Neben dem Begriff des *vollständigen* Systems, der noch an eine gegebene Ordnungszahl gebunden ist, tritt der des *„wesentlichen Systems"*[12]) oder des Systems von *„wesentlichen Differentialinvarianten"* der gegebenen Gruppe G_r. Hierunter versteht man diejenigen Differentialinvarianten $J_1, J_2, \ldots, J_w$, aus denen sich alle anderen durch Ableiten nach den Veränderlichen t_i ergeben. Es läßt sich für endliche, kontinuierliche Gruppen allgemein beweisen[13]), daß ein solches wesentliches System stets existiert und endlich ist, d. h., daß aus allen Differentialinvarianten stets eine endliche Anzahl $w \geqq h + 1$ von Differentialinvarianten niedrigster Ordnung $J_1, J_2 \ldots, J_w$ so herausgegriffen werden kann, daß jede Differentialinvariante J eine Funktion

$$J = J(J_k, J_{k,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots) \tag{22}$$

dieser J_k und deren Ableitungen $J_{k,\alpha\beta\gamma\ldots}$ nach den Veränderlichen $t_1, \ldots, t_h$ wird.[14])

7. Differentialinvarianten unendlicher Gruppen. *S. Lie*[15]) definiert unendliche Gruppen durch ein System von endlich vielen partiellen Differentialgleichungen, deren allgemeine Lösung entweder von

12) „Volles" System bei *Lie-Scheffers,* Vorles. kontin. Grupppen, p. 760.

13) *Lie-Scheffers,* Vorles. kontin. Gruppen, p. 757; *Lie-Scheffers,* Vorles. Differentialgleich., p. 375; *E. Lindelöf,* Sur les Systèmes complets etc., Helsingfors 1893; *A. Tresse,* Acta math. 18 (1894), p. 1—88.

14) Ein analoger Satz besteht für die Systeme invarianter Gleichungen.

15) *S. Lie,* Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen kontin. Gruppen, Leipzig. Ber. 43 (1891), p. 316—352 (1. Abh.) und p. 353—393 (2. Abh.).

∞-vielen Parametern oder von willkürlichen Funktionen abhängen. Für diese Gruppen existieren bei passender Erweiterung stets Differentialinvarianten, die so wie bei endlichen Gruppen durch die Integration von vollständigen Systemen linearer partieller Differentialgleichungen gewonnen werden können. Hieraus ergeben sich ähnlich wie bei endlichen Gruppen Sätze über die Existenz von *vollständigen* Systemen m^{ter} Ordnung und von *wesentlichen Systemen.*[16])

Von den unendlichen Gruppen ist die Gruppe aller Punkttransformationen in n Veränderlichen am ausführlichsten behandelt.[17])

Neuerdings wurden von *E. Noether*[18]) unter Verwendung eines etwas allgemeineren Gruppenbegriffes Differentialinvarianten von unendlichen Gruppen im Zusammenhang mit einem Variationsprinzip betrachtet.[19])

8. Geometrische Differentialinvarianten.[20]) Wir fassen jetzt die n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ als Koordinaten eines Punktes in einem n-dimensionalen Raume R_n auf. Die n Gleichungen $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$ definieren dann eine Gruppe G_r, welche die Punkte des R_n untereinander vertauscht. Ferner sei $1 \leqq h \leqq n - 1$ und durch die n Gleichungen $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_h)$ sei eine h-dimensionale Punktmannigfaltigkeit M_h im R_n gegeben. Die Veränderlichen t_i sind die h „Parameter", mittels welcher M_h dargestellt wird. Führen wir statt der t neue Parameter τ ein

$$t_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h), \qquad (i = 1, 2, \ldots, h) \tag{23}$$

so wird jetzt M_h durch die Parameter τ dargestellt. Die h Gleichungen (23) geben bei willkürlichen φ_i eine unendliche Gruppe G_∞, deren Transformationen mit T_∞ bezeichnet seien.

Es sei nun $J = J(x_i, x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots)$ eine Differentialinvariante in bezug auf die Gruppe G_r, d. h. bei jeder Transformation T_r von G_r besteht vermöge (9) die Gleichung

$$J(x_i', x'_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots) = J(x_i, x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots), \tag{24}$$

und zwar identisch in allen auftretenden Reihen; $x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}$ bedeuten wieder die Ableitungen der x_i nach den t_α.

Wenn die Funktion $J(x_i, x_{i,\alpha\beta\gamma\ldots}, \ldots)$ auch die Transformationen T_∞ der durch (23) gegebenen G_∞ gestattet (vgl. Nr. **17**), d. h. wenn

16) Weitere Ausführungen bei *A. Tresse,* Acta math. 18 (1894), p. 1—88; ferner für einen speziellen Fall bei *K. Zorawski,* Acta math. 16 (1892), p. 1—64; Krakau Ber. 14 (1893), p. 289—300.

17) *K. Zorawski,* Krakau Ber. 14 (1893), p. 41—55. S. ferner die Nr. **10** ff.

18) *E. Noether*, Invariante Variationsprobleme, Gött. Nachr. 1918.

19) Vgl. Nr. 27.

20) Vgl. hierzu *G. Fano,* III AB 4b, Nr. 33.

(24) auch weiter bestehen bleibt, falls statt der t die τ als Parameter der Mannigfaltigkeit M eingeführt werden, so heißt J eine *„geometrische“ Differentialinvariante.* J hat also jetzt eine *zweifache Invarianz* aufzuweisen: bei der endlichen Gruppe G_r und bei G_∞.

Auch bei geometrischen Differentialinvarianten existieren *vollständige* Systeme m^{ter} Ordnung und *wesentliche* Systeme von Differentialinvarianten (vgl. Nr. **6**).

9. Differentialinvarianten bei Differentialgleichungen. Es sei noch kurz auf die ausgedehnte Verwendung des Begriffes Differentialinvarianten in der Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen hingewiesen. Der Ursprung des Begriffes „Differentialinvarianten“ ist auf diesen Zusammenhang zurückzuführen[21]), wenn auch erst später, hauptsächlich durch *S. Lie*[22]), die Gruppentheorie und die Theorie der dazugehörigen Differentialinvarianten systematisch für Untersuchungen und Integrationsprobleme bei Differentialgleichungen Verwendung fanden.[23]) Es sind meist unendliche Gruppen, auf die sich der Invariantenbegriff hier bezieht. Im übrigen sei — auch betreffs der *„Integralinvarianten“*[24]) — auf die Ausführungen des Bd. II dieser Encykl. (II A 4b (*Vessiot*) und II A 5 (*E. v. Weber*)), insbesondere auf die Nr. **14**, **31**, **33**, **34**, **35** von II A 4b hingewiesen. Für Differentialgleichungen, die aus Variationsproblemen entspringen, vgl. Nr. **27**.

Invarianten von Differentialgleichungen, die durch Nullsetzen von Differentialformen entstehen und denen die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen zugrunde liegt, werden im folgenden Abschnitte besprochen.

---

21) Vgl. *Lie-Engel* I, p. 552; *E. J. Wilczynski,* Proj. Diff.-Geom., p. 39; *A. R. Forsyth,* Phil. Trans. 179 (1888), p. 377—489; *G. Wallenberg,* J. f. Math. 113 (1893), p. 1—41; *G. Fano,* Math. Ann. 53 (1900), p. 493—590.

22) *S. Lie,* Gött. Nachr. 1874; Math. Ann. 24 (1884), p. 537—578; ebenda 25 (1884), p. 71—151.

23) Vgl. das zusammenfassende Werk: *Lie-Scheffers,* Vorles. über Differentialgleich. usw., Leipzig 1891. — Hierzu führen wir noch an: *F. Engel,* Leipzig Ber. 57 (1905), und die von *F. Engel* (Greifswald) veranlaßten Dissertationen von *K. Wünschmann* (1905), *A. Werner* (1908), *H. Hausleitner* (1909), *W. Herbst* (1912).

24) Hierzu noch die folgende Literatur: *Th. de Donder,* Rend. di Palermo 15 (1901), p. 66—131 und 16 (1902), p 155—179; Application nouvelle des invariants intégraux I et II, Bruxelles 1905 (Hayez); Belg. Bull. Sc. 1906, p. 400—409; 1909, p. 66—83; *A. Guldberg,* Paris C. R. 133 (1901), p. 1282; ebenda 134 (1902), p. 81; *E. Goursat,* ebenda 144 (1907), p. 1206; J. de math. (6) 4 (1908), p. 331—365; *H. Liebmann,* München. Ber. 1918, p. 489—505; *E. J. Wilczynski,* Rend. di Palermo 42 (1917), p. 128—137; *F. Klein,* Gött. Nachr., Dez. 1918; *E. Noether,* ebenda 1918.

C. Theorie der Differentialformen.

10. Differentialformen, Tensoren. Es sei

$$F = a_{11\ldots 1}\, dx_1^p + \cdots = \sum_{i_1 \ldots i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx_{i_1} \ldots dx_{i_p} \tag{25}$$

eine *Form* p^{ten} Grades der n Differentiale $dx_1, \ldots, dx_n$, deren Koeffizienten Funktionen (in der Regel analytische oder zumindest genügend oft stetig differentiierbare) der $x_1, \ldots, x_n$ sind.

An Stelle von (25) betrachtet man auch p-fach lineare Differentialformen

$$\bar{F} = \sum_{i_1}\sum_{i_2} \ldots \sum_{i_p} \bar{a}_{i_1 \ldots i_p} d^{(1)}x_{i_1} \ldots d^{(p)}_{i_p}, \tag{26}$$

linear und homogen bezüglich jeder der p Reihen

$$d^{(i)}x_1,\ d^{(i)}x_2, \ldots d^{(i)}x_n. \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{27}$$

(25) ist als Spezialfall in (26) enthalten.

Das duale Gegenstück zu (25) bilden Formen vom Typus („Differentialparameter"):

$$\Phi = \sum_{i_1 \ldots i_p} a_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_p}}, \tag{28}$$

wo an Stelle der Differentiale dx_i die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer willkürlichen Funktion $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ treten. Hieraus ergibt sich bei Weglassung von f ein „*Differentialoperator*"

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{d x_n}\right).$$

Solche Differentialoperatoren („Differentiatoren", „Anihilatoren") sind in der Invariantentheorie, besonders bei englischen Mathematikern, vielfach verwendet und geben dort eine Reihe von „*Prozessen*" (Δ-Prozeß, Φ Prozeß usw.).

Die Beziehungen der Formen (28) zu den Ausdrücken

$$\sum_{i_1 \ldots i_p} \alpha^{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}$$

mit konstanten Koeffizienien α wurden von *C. Somigliana*[25]) untersucht.

Weiter betrachtet man noch Formen

$$\Theta = \sum_{i_1 \ldots i_r,\, k_1 \ldots k_s} a^{k_1 \ldots k_s}_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \ldots dx_{i_r} \frac{\partial f}{\partial x_{k_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{k_s}} \tag{29}$$

---

25) Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 59—92 und p. 265—299; ganze rationale Differentialoperationen werden systematisch behandelt bei *E. Fischer,* J. f. Math. 140 (1911), p. 48—81; ebenda 148 (1918), p. 1—78.

die homogen bezüglich der Differentiale und bezüglich der Ableitungen sind.

Die Formen (25), (28) und (29) nennt man auch *Tensoren*[26]). Mitunter wird nicht die einzelne Form, sondern nur die Gesamtheit ihrer Koeffizienten $a_{i_1 \ldots i_r}$ (bzw. $a^{k_1 \ldots k_s}$ und $a_{i_1 \ldots i_r}^{k_1 \ldots k_s}$) als Tensor[27]) bezeichnet; die einzelnen Koeffizienten selbst heißen dann die „*Komponenten*" des Tensors. Der Grad der Form gibt den *Rang*[28]) oder die *Stufenzahl*[29]) des Tensors. So ist z. B durch (25) ein Tensor p^{ter} Stufe, durch (29) ein Tensor $(r+s)^{\text{ter}}$ Stufe gegeben.

Tensoren erster Stufe werden auch *Vektoren* genannt.

Bildet man von einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ das r^{te} totale Differential $d^r f$, so ergibt sich der Ausdruck

$$(30) \qquad d^r f = \sum_{(m)} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \sum_{(i)} (i_1, \ldots, i_m)\, d^{i_1} x_{j_1} \ldots d^{i_m} x_{j_m},$$

wo $i_1 + \cdots + i_m = r$ und $(i_1, \ldots, i_m)$ ein Zahlenkoeffizient ist.

E. Pascal[30]) und *L. Sinigallia*[30]) betrachten Differentialausdrücke, die aus (30) entstehen, wenn die $\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}$ durch Funktionen $X_{j_1 \ldots j_m}$ ersetzt werden:

$$(31) \qquad X^{(r)} = \sum_{(j)} X_{j_1 \ldots j_m} \cdot \sum_{(i)} (i_1, \ldots, i_m) d^{i_1} x_{j_1} \ldots d^{i_m} x_{j_m}.$$

Diese Differentialausdrücke enthalten zum Unterschiede von Differentialformen (25) auch höhere Differentiale $d^i x$.[31])

11. Kogredienz und Kontragredienz. Es sei nun

$$(32) \qquad x_i = \varphi_i(x_1', \ldots, x_n')$$

eine in einem gewissen Gebiete 1 — 1-deutige, stetige und stetig umkehrbare Transformation und die Funktionen φ_i seien genügend oft stetig differentierbar. Die durch (32) bei willkürlichen φ_i gegebene

26) Vgl. z. B. *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie, p. 45.

27) *A. Einstein*, Die Grundlagen der allg. Rel.-Theorie (= Zusammenfassung seiner früheren Arbeiten), Barth 1916, p. 18; *G. Hessenberg*, Math. Ann. 78 (1917), p. 187—217; *G. Ricci* und *Levi-Civita*, Math. Ann. 54 (1901), p. 125—201 gebrauchen die Bezeichnung „System m^{ter} Ordnung" für Tensor m^{ter} Stufe; *G. Ricci*, Lezioni sulla teoria delle superficie, Padua (1898). — Betreffs der Verwendung von oberen und unteren Indizes vgl. die folgende Nr.

28) *A. Einstein*, l. c. p. 20.

29) *H. Weyl*, l. c. p. 45.

30) *E. Pascal*, Rend. Lomb. Ist. (2) 35 (1902), 36 (1903) und Rend. Acc. Linc. (5) 12 (1903); *L. Sinigallia*, Rend. Lomb. Ist. (2) 35 (1902), p. 749—778.

31) Vgl. Nr. 24. Derartige Differentialformen werden auch von *J. E. Wright* behandelt: Am. J. of Math. 27 (1905), p. 323—342.

Gruppe liegt der Theorie der Differentialformen zugrunde. Es ist dann die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \left|\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\right| = \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_k}\right| \neq 0 \tag{33}$$

und weiter

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta}, \tag{34}$$

wobei

$$\Delta_{ki} = \frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x'_i}} \tag{35}$$

das algebraische Komplement von $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_i}$ in Δ bedeutet.

Zufolge (32) bestehen dann die Gleichungen

$$dx_i = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_\alpha} \cdot dx'_\alpha \tag{36}$$

$$dx'_i = \sum_\alpha \frac{\Delta_{\alpha i}}{\Delta}\, dx_\alpha . \tag{37}$$

Geht $f(x_1, \ldots, x_n)$ zufolge (32) in $f'(x_1', \ldots, x_n')$ über $: f = f'$, so ist

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_i} = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \tag{38}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_\alpha \frac{\Delta_{i\alpha}}{\Delta} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x'_\alpha} . \tag{39}$$

Die Transformationen (36) und (37) [und ebenso (38) und (39)] heißen „*zueinander kontragredient*". Eine Reihe von Größen (Funktionen, Differentialen) $\xi_1, \ldots, \xi_n$, die bei (32) in $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ übergeht und für welche (36) gilt:

$$\xi_i = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_\alpha} \xi'_\alpha ,$$

heißt „*kogredient*" zu den dx_i. Analog sind die η_k, für welche

$$\eta_k = \sum_\alpha \frac{\Delta_{k\alpha}}{\Delta} \eta'_\alpha$$

gilt, zu den dx_i *kontragredient* oder zu den $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *kogredient*.

Diese Bezeichnungen überträgt man auch auf Tensoren. Geht (25) vermöge (32) und (36) über in

$$F = \sum a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \ldots dx_{i_p} = \sum a'_{i_1 \ldots i_p} dx'_{i_1} \ldots dx'_{i_p}, \tag{40}$$

so gelten die „*Transformationsgleichungen*":

$$a'_{i_1 \ldots i_p} = \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial x'_{i_1}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_2}}{\partial x'_{i_2}} \cdots \frac{\partial \varphi_{\alpha_p}}{\partial x'_{i_p}} . \tag{41}$$

Analog für die Tensoren (28) und (29). Die Komponenten eines Tensors erfahren also vermöge (32) eine lineare, homogene Substitution. Man nennt mit Rücksicht auf (36) und (39) den Tensor (25) einen *kovarianten Tensor* p^{ter} Stufe (oder p^{ten} Ranges), den Tensor (28) einen *kontravarianten Tensor* p^{ter} Stufe und den Tensor (29) einen *gemischten Tensor* $(r+s)^{\text{ter}}$ Stufe.[32]) Bei letzterem Tensor gebraucht man auch die Wendung: Die Funktionen $a_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_s}$ sind die „in bezug auf $i_1\ldots i_r$ kovarianten, in bezug auf $k_1\ldots k_s$ kontravarianten Komponenten" des gemischten Tensors.

Ko- und Kontravarianz wird nach *Ricci* und *Levi-Civita*[33]) sehr zweckmäßig durch Tief- und Hochstand der Indizes angezeigt.

Zu den von *E. Pascal* untersuchten Differentialausdrücken $\sum\limits_{(j)} X_{j_1\ldots j_m}\sum\limits_{(i)}(i_1,\ldots,i_m)\,d^{i_1}x_{j_1}\ldots d^{i_m}x_{j_m}$ sind Ausdrücke der Gestalt $\sum\limits_{(m)}\sum\limits_{(j)}\xi_{j_1\ldots j_m}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_m}}$ kontragredient in dem Sinne, daß

$$\sum_{(m)}\sum_{(j)} X_{j_1\ldots j_m}\xi_{j_1\ldots j_m}$$

eine Invariante ist.[30]) Bezüglich der Transformationen von *Pascal*schen Differentialausdrücken vgl. Nr. 24.

12. Tensoralgebra. In der Tensoralgebra treten noch keine Ableitungen der Komponenten eines Tensors nach den Veränderlichen x_i auf. Ihre Fundamentaloperationen sind: 1. Addition von Tensoren und Multiplikation mit einer Zahl, 2. Multiplikation von Tensoren, 3. die *„Verjüngung"*.

Es ist leicht zu zeigen, daß sich die Komponenten $\bar{a}$ eines Tensors (26) so transformieren, wie die Produkte $a_{i_1}^{(1)}a_{i_2}^{(2)}\ldots a_{i_p}^{(p)}$ der Koeffizienten a_i von p linearen Differentialformen

$$L_1=\sum_\alpha a_\alpha^{(1)}d^{(1)}x_\alpha,\ldots,L_p=\sum_\alpha a_\alpha^{(p)}d^{(p)}x_\alpha. \tag{42}$$

Man nennt diese n^p Produkte dann die Komponenten des *„Produktes"* der p Tensoren (42).

Analoges gilt für Tensoren (28) und (29). Allgemein entsteht aus einem Tensor $A_{(r)}^{(s)}$ mit den Komponenten $a_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_s}$ und einem Tensor $B_{(\varrho)}^{(\sigma)}$ mit den Komponenten $b_{i_1\ldots i_\varrho}^{k_1\ldots k_\sigma}$ durch Multiplikation der Tensor $(r+s+\varrho+\sigma)^{\text{ter}}$ Stufe $A_{(r)}^{(s)}B_{(\varrho)}^{(\sigma)}=C_{(r+\varrho)}^{(s+\sigma)}$ mit den Komponenten

$$a_{i_1\ldots i_r}^{k_1\ldots k_s}b_{m_1\ldots m_\varrho}^{n_1\ldots n_\sigma}=c_{i_1\ldots i_r m_1\ldots m_\varrho}^{k_1\ldots k_s n_1\ldots n_\sigma}. \tag{43}$$

32) Bei diesen Festsetzungen sind dann die dx_i die Komponenten eines kontravarianten Tensors erster Stufe („unendlich-kleinen Vektors") und die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die Komponenten eines kovarianten Tensors erster Stufe. Vgl. Anm. 36).

33) Math. Ann. 54 (1901). p. 125—201.

Die *„Verjüngung"* ist ein Prozeß[34]), der aus einem gemischten Tensor q^{ter} Stufe einen Tensor $(q-2)^{\text{ter}}$ Stufe erzeugt: Man setzt einen oberen und einen unteren Index einander gleich und summiert dann über diesen.[35]) So entsteht z. B. aus dem gemischten Tensor 4. Stufe a^i_{klm} durch einmalige Verjüngung der Tensor 2. Stufe $b_{ik}=\sum_\alpha a^\alpha_{\alpha ik}$. Tensoren nullter Stufe sind Invarianten. Einfachste Beispiele hierfür: $\sum_i a^i_i$, $\sum_i a_i b^i$, $\sum_i\sum_k a_{ik}b^{ik}$.

Die Grundformen (25), (28) und (29) sind ebenfalls Spezialfälle solcher, durch Verjüngung enstehender Invarianten.[36])

Für eine Invariante J der Differentialform (25) gilt: $J(a', dx') = J(a, dx)$ identisch in den Koeffizienten a und den Differentialen dx. Dieser Umstand bringt es mit sich, daß es in der Tensoralgebra ganz nebensächlich ist, daß die a Funktionen der x sind. Demzufolge ist hier die Theorie der projektiven Invarianten durchaus anwendbar.[37]) Jeder gewöhnlichen, projektiven Invariante entspricht eine Invariante der Differentialformen (ohne Ableitungen der Koeffizienten) und umgekehrt: alle Differentialinvarianten von Differentialformen, die keine Ableitungen der Koeffizienten enthalten, lassen sich durch projektive Invarianten darstellen.

Daß ein analoger Satz (*„Reduktionssatz"*) auch in der Tensoranalysis gilt, wird in Nr. 22 näher ausgeführt.

Die Grundformen (25) selbst sind in diesem Zusammenhange auch Differentialkovarianten[38]), die Formen (28) Differentialparameter oder Differentialkontravarianten.[39])

Wenn zu dem gegebenen System von Differentialformen F stets eine quadratische Differentialform φ hinzugefügt wird und also simultane Differentialinvarianten von F und φ betrachtet werden, so er-

---

34) *G. Hessenberg,* l. c. sagt *„Faltung"*.

35) Dieser Prozeß ist in der projektiven Invariantentheorie seit langem bekannt. Ist z. B. F eine ternäre Form, die Punktkoordinaten x_i und Linienkoordinaten u_i enthält, so entsteht durch Verjüngung die Invariante $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial u_1}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial u_2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial u_3}$.

36) Konsequenterweise müßte man dann auch dx^i statt dx_i schreiben, wie dies z. B. *G. Hessenberg,* l. c. tut.

37) *G. Ricci* und *Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125—201, Kap. III, § 2; spezielle Fälle bei *H. Kühne,* ebenda 56 (1902), p. 257—264.

38) *„Kovariante des Differentialausdruckes"* bei *E. B. Christoffel,* J. f. Math. 70 (1869), p. 46—70.

39) *„Zugehörige Form"* bei *Christoffel,* l. c.; *„Differentialparameter"* bei *Beltrami,* Werke I, p. 306.

geben sich weitere Begriffsbildungen, die in der Literatur zumeist behandelt wurden. Vgl. hierüber Nr. 18 ff.

13. Tensoranalysis. In der Tensoralgebra besteht der aus der projektiven Invariantentheorie übernommene Satz[40]): Jede Invariante $J(a, dx, \ldots)$ ist der Ausdruck auf der rechten Seite eines Eliminationsresultates $J(a', dx', \ldots) = J(a, dx, \ldots)$, welches man erhält, wenn man aus den Transformationsgleichungen (41) die Transformationskoeffizienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ eliminiert.

In der Tensoranalysis, in welcher man auch Differentialinvarianten betrachtet, die die Ableitungen der Koeffizienten a enthalten, führt dieser Satz zunächst nur bei gewissen Linearformen zu neuen Invarianten.

Bei einer einzelnen Linearform (vgl. Nr. 14)

$$L = \sum_i a_i dx_i \tag{44}$$

haben wir die Transformationsgleichungen

$$a_i' = \sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i'}; \tag{45}$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial x_k'} = \sum_\varrho \sum_\sigma \frac{\partial a_\varrho}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_i'} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_k'} + \sum_\varrho a_\varrho \frac{\partial^2 \varphi_\varrho}{\partial x_i' \partial x_k'}. \tag{46}$$

Hieraus ergibt sich durch Vertauschung von i mit k und Subtraktion der zu L kovariante, schiefsymmetrische Tensor 2. Stufe mit den Komponenten $\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$: die *Rotation* (*curl*) des Tensors a.

Der Kalkül mit Differentialen liefert die Rotation, wenn wir in (44) setzen: $d\varphi = \sum_i a_i dx_i$ und dann $\delta d\varphi - d\delta\varphi$ bilden.

Auf ähnliche Weise erhält man bei einer schiefsymmetrischen bilinearen Differentialform

$$d^1 d^2 \varphi = \sum_i \sum_k a_{ik} d^{(1)} x_i d^{(2)} x_k \qquad (a_{ik} = -a_{ki}) \tag{47}$$

durch Bildung von $d^1 d^2 d^3 \varphi$ und zyklische Vertauschung den Tensor 3. Stufe mit den Komponenten[41])

$$\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x_k} + \frac{d \varphi_{ik}}{\partial x_l}. \tag{48}$$

---

40) *G. Ricci*, Lezioni . . ., Padua 1898. Inwieweit dieser Satz gilt, wurde von *L. Maurer* untersucht: Weber-Festschrift 1912, p. 242—251.

41) *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie, p. 97 (1. Aufl.).

Dieses Verfahren läßt sich auf alternierende p fach lineare Differentialformen übertragen.

Bei beliebigen Tensoren versagt das eben geschilderte einfache Verfahren zur Erzeugung von Invarianten. Die Elimination der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i' \partial x_k'}$ aus den Transformationsgleichungen erfordert dann die Heranziehung weiterer Formen, wie z. B. einer quadratischen Differentialform (vgl. Nr. 18) oder die Benutzung invarianter Gleichungssysteme, die aus einem Variationsprinzip entspringen (vgl. Nr. 28).

14. Lineare Differentialformen. Am ausführlichsten sind bisher behandelt die Differentialformen 1. Ordnung

$$L(dx) = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n = \sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n) dx_i \tag{49}$$

und die durch $L(dx) = 0$ gegebene Differentialgleichung, die nach *J. F. Pfaff* benannt ist. $L(dx)$ wird als „*Pfaffscher Ausdruck*" bezeichnet.[42])

Bezüglich der Theorie dieser Linearformen $L(dx)$ verweisen wir auf den Artikel *E. v. Weber*, Partielle Differentialgleichungen[43]), auf das reichhaltige Werk desselben Verfassers[44]) und auf den bei „Büchern und wichtigsten Arbeiten" eingangs angeführten Bericht von *H. Liebmann* und *F. Engel.*[44a]) Hier sei nur kurz auf die wichtigsten Fragen hingewiesen, die sich in formentheoretischer Hinsicht einstellen.

Die Form (49) besitzt eine bilineare Kovariante, die Rotation:

$$L_1 = \sum_{ik} a_{ik}(dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k), \tag{50}$$

bei der

$$a_{ik} = -a_{ki} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \tag{51}$$

ist und deren identisches Verschwinden notwendig und hinreichend dafür ist, daß $L(dx)$ ein exaktes Differential ist.

L_1 ist das erste Glied einer Reihe multilinearer Kovarianten von $L(dx)$:

42) *J. F. Pfaff*, Berliner Abh. 1814—1815.

43) Diese Encykl. II A 5, III, Nr. 18—27.

44) *E. v. Weber*, Vorles. über das Pfaffsche Problem, Leipzig 1900 (Teubner).

44a) Wir heben daraus hervor die Arbeiten von *S. Kantor*, Wien. Ber. 110 (1901), p. 1147; ebenda 112 (1903), p. 678, 755.

$$(52)\begin{cases} L_2 = \sum\limits_{ik,rs} P_{ik,rs} \begin{vmatrix} d_1x_i & d_1x_k & d_1x_r & d_1x_s \\ d_2x_i & . & . & . \\ d_3x_i & . & . & . \\ d_4x_i & . & . & d_4x_s \end{vmatrix} = \sum P_{ik,rs}(d_1x\, d_2x\, d_3x\, d_4x)_{ikrs} \\ L_3 = \sum P_{i_1i_2,i_3i_4,i_5i_6}(d_1x\, d_2x \dots d_5x\, d_6x)_{i_1i_2\dots i_5i_6} \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Die Koeffizienten dieser Formen sind ganze rationale Funktionen der a_{ik}, die man „*Pfaffsche Aggregate*“ nennt.[45]) Die Quadrate der $P_{i_1i_2\dots i_{2\varrho}}$ sind die 2ϱ-reihigen Hauptminoren der schiefsymmetrischen Matrix[46])

$$(53)\qquad \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Neben dieser Matrix spielen die folgenden zwei eine große Rolle:

$$(54)\qquad \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(55)\qquad \begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -a_1 & 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_2 & a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Die Determinanten (53) und (55) sind relative Differentialinvarianten der Linearform (49), von denen eine stets identisch gleich Null ist, und zwar (53) bei ungeradem n, (55) bei geradem n. Wegen (51) hängt die Theorie der Kovarianten (52) aufs engste zusammen mit der projektiven Invariantentheorie von linearen Linienkomplexen im n-dimensionalen Raume.[47])

Die Frage nach der Äquivalenz zweier linearer Differentialformen wird beantwortet durch den „Hauptsatz“: Zwei *Pfaff*sche Ausdrücke

45) In England „Pfaffians“. Vgl. hierzu *J. Brill*, Proc. London Math. Soc. 30 (1899), p. 263—271 und 31 (1899), p. 315—320.

46) *H. v. Weber,* l. c. Kap. I.

47) *H. v. Weber,* München. Ber. 40 (1900), p. 273—300; ebenda p. 393—462; Leipzig. Ber. 52 (1900), p. 179—213; *H. Rothe,* Wien. Ber. IIa, 121 (1912); *R. Weitzenböck,* Rend. di Palermo 24 (1912).

sind äquivalent, d. h. ineinander transformierbar, wenn sie von derselben *Klasse* k sind.[48]) $L(dx)$ ist von der Klasse k, wenn die Matrix (54) den Rang k hat, d. h. wenn die höchsten Minoren von (54), die nicht identisch verschwinden, k-reihig sind.

Ist $L(dx)$ von der Klasse k, so läßt sich $L(dx)$ auf eine Differentialform mit nur k Differentialen und nicht weniger transformieren und umgekehrt. Ist $k = n$, so heißt der *Pfaff*sche Ausdruck „bedingungslos". Die Klasse läßt sich auch durch das identische Verschwinden von Kovarianten (52) kennzeichnen.[49])

15. Infinitesimale Transformationen. Das duale Gegenstück zu $L(dx)$ bilden die linken Seiten $A(f)$ von linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung (II A 5, Nr. **11**).

$$(56) \qquad A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Die „Symbole" $A(f)$ sind gleichzeitig Symbole für infinitesimale Transformationen (II A 6). Ein Symbol $A(f)$ hat bei lin. Tr. die Invariante

$$(57) \qquad J = \sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i},$$

die man „*Divergenz*" des kontravarianten Tensors 1. Stufe mit den Komponenten A_i nennt. Verschwindet die Divergenz von $\varrho \cdot A(f)$, so gibt es $(n - 1)$ unabhängige Lösungen der Gleichung (56), derart, daß die Funktionaldeterminante $\frac{D(f, f_1, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ bei beliebigem f mit $\varrho A(f)$ identisch wird. ϱ heißt dann ein *Jacobischer Multiplikator* (II A 5, Nr. 12).

Bei zwei Symbolen

$$A(f) = \sum A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B(f) = \sum B_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

läßt sich durch die „Klammeroperation" eine Invariante bilden[50])

$$(58) \quad (AB) = \sum_i M_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \text{wobei} \quad M_i = \sum_k \left(A_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)$$

kogredient den A_i und B_i ist. Betreffs der Rolle, die diese Ausdrücke in der Theorie der vollständigen Systeme spielen, sei auf II A 5, Nr. **13** verwiesen.

48) Teilweise bewiesen von *H. Graßmann*, Ausdehnungslehre (1862) = Ges. Werke I, Teil 2, p. 345; vollständiger Beweis bei *G. Frobenius*, J. f. Math. 82 (1877), p. 230—315; ebenso bei *S. Lie*, Arch. for Math. og Naturw. 2 (1876).

49) Ausdehnung auf quadratische Differentialformen bei *M. Lévy*, Paris C. R. 86 (1878), p. 463 und bei *G. Ricci*, Ann. di mat. (2) 7 (1884), p. 35—168. Für *Pascal*sche Differentialausdrücke bei *E. Pascal*, Rend. Acc. Linc. (5) 12 (1903), p. 31—41.

50) *S. Lie*, Math. Ann. 25 (1884), p. 77.

Wir erwähnen schließlich noch die bei drei Symbolen identisch in f bestehende „*Jacobi*sche Identität“[51]):

$$((AB)C) + ((BC)A) + ((CA)B) \equiv 0. \tag{59}$$

16. Systeme von linearen Differentialformen. Differentialinvarianten, die bei Systemen von linearen Differentialformen auftreten, finden sich an verschiedenen Stellen der Theorie der linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wir heben hier folgendes hervor.

Eine lineare Differentialform $L = \sum_i a_i dx_i$ und ein Symbol $A(f) = \sum_i A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ haben eine simultane Invariante $J = \sum a_i A_i$, die nach *F. Engel*[52]) die „charakteristische Funktion“ heißt

Sind

$$L^{(i)} = a_{i_1} dx_1 + \cdots + a_{i_n} dx_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{60}$$

$n - 1$ lineare, linear-unabhängige Differentialformen, so ist

$$U = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots\cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \sum A_r \frac{\partial u}{\partial x_r} \tag{61}$$

eine Invariante und $U = 0$ heißt die zu $L^{(i)} = 0$ „adjungierte“ partielle Differentialgleichung.[53])

Nehmen wir in (60) nur $i = 1, 2, \ldots, n-2$, so ist

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial v}{\partial x_n} \\ a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n-2,1} & \cdots\cdots & a_{n-2,n} \end{vmatrix} = \sum A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \tag{62}$$

ebenfalls eine Differentialinvariante der Formen (60) und der beiden Funktionen u und v. Hierbei ist $A_{ik} = - A_{ki}$. Nehmen wir eine weitere Linearform $L = \sum a_i dx_i$ und deren bilineare Kovariante

51) Vgl. diesbezüglich und wegen weiterer Beziehungen zu den „*Poisson*schen Klammerausdrücken“ (Φ, Ψ), den Symbolen $[\Phi, \Psi]$ und zur „*Mayer*schen Identität das oben genannte Werk von *E. v. Weber*; ferner *Lie-Engel*, Transf.-Gruppen II, Kap. 7; *E. Goursat*, Leçons sur l'integration etc., Paris 1891; *J. E. Wright*, Trans. Am. math. Soc. 6 (1905), p. 286—315.

52) *F. Engel*, Leipzig. Ber. 48 (1896), p. 414—430.

53) *G. Frobenius*, J. f. Math. 82 (1877), p. 230—315.

$L_1 = \sum a_{ik}(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i)$ hinzu, so ergibt sich aus L_1 und (62) die Invariante

$$K = \sum A_{ik}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right). \tag{63}$$

Setzt man hier statt L die Form $L^{(h)}$ von (60) und nimmt statt der A_{ik} die Minoren $\frac{\partial A_k}{\partial a_{\mu i}}$ von A_k, so erhält man die $n-1$ Invarianten

$$J_h = \sum_{i,k} \frac{\partial A_i}{\partial a_{hk}} \cdot \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i};$$

deren Summe gibt[54]) den jetzt als „Divergenz" bezeichneten Ausdruck:

$$J = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Dual zu (61) kann man aus $n-1$ Symbolen

$$A_i(f) = A_{i_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_{i_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{64}$$

die „adjungierte" totale Differentialgleichung bilden:

$$L(dx) = \begin{vmatrix} dx_1 & \ldots\ldots & dx_n \\ A_{11} & \ldots\ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ A_{n-1,1} & \ldots\ldots & A_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \tag{65}$$

Es besteht dann der Satz, daß bei n linear unabhängigen Symbolen $A_i(f)$, die ein *Jacobi*sches System bilden, bei denen also $(A_i A_k) = 0$ ist, der Quotient

$$\frac{L(dx)}{|A_{ik}|} \tag{66}$$

ein exaktes Differential ist.[55])

Betreffs der Differentialinvarianten von mehr als n linearen Differentialformen vgl. die folgende Nr.

17. Differentialinvarianten willkürlicher Funktionen. Ein Reihe willkürlicher Funktionen

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(\sigma)}, \ldots \tag{67}$$

der Veränderlichen x_i gehe bei den Transformationen (32) über in die Funktionen $F'^{(1)}, F'^{(2)}, \ldots, F'^{(\sigma)}, \ldots$

der Variablen x_i'. Für die Ableitungen dieser Funktionen bestehen dann die *Transformationsgleichungen*:

$$\frac{\partial F'}{\partial x_i'} = \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i'} \tag{68}$$

54) *G. Frobenius*, J. f. Math. 85 (1878), p. 185—213.

55) *G. Frobenius*, J. f. Math. 86 (1879), p. 1—19.

$$(69)\qquad \frac{\partial^2 F'}{\partial x_i' \partial x_k'} = \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i'} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \varphi_k'} + \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x_i' \partial x_k'}$$

$$(70)\qquad \frac{\partial^3 F'}{\partial x_i' \partial x_k' \partial x_j'} = \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial^3 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i'} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_k'} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j'}$$

$$+ 3 \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x_i' \partial x_k'} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j'} + \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_\lambda}{\partial x_i' \partial x_k' \partial x_j'}$$

u. s. f.

Wir fassen alle diese Gleichungen zusammen in

$$(71)\qquad \left(\frac{\partial F'}{\partial x'}\right)_\alpha = G_\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right).$$

Die Elimination der $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i'}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x_i' \partial x_k'}, \ldots$ aus (71) ergibt Relationen

$$(72)\qquad G\left(\frac{\partial F'}{\partial x'}, \frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0.$$

Läßt sich eine derartige Gleichung auf die Form

$$(73)\qquad J\left(\frac{\partial F'}{\partial x'}\right) = J\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

bringen, so ist J eine Differentialinvariante der Funktionen (67) und umgekehrt ist jede Differentialinvariante dieser Funktionen ein solches Eliminationsresultat.[56])

Bei weniger als n Funktionen $F^{(\sigma)}$ ist eine solche Elimination nicht möglich, es gibt dann keine Differentialinvarianten. Gibt es genau n voneinander unabhängige Funktionen $F^{(\sigma)}$, so gibt (68) die einzige relative Differentialinvariante[57])

$$(74)\qquad D = \left|\frac{\partial F^{(\sigma)}}{\partial x_i}\right|,$$

d. i. die *Funktionaldeterminante* der n Funktionen.

Wir nehmen nun an, daß in (67) wenigstens $n + 1$ unabhängige Funktionen $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(n)}, \Phi$ vorhanden sind. Dann läßt sich beweisen, daß es stets abzählbar-unendlichviele Differentialinvarianten J gibt. Ist m die höchste Ableitung, die J enthält, so läßt sich ein System $J_1, \ldots, J_\varrho$ von endlich vielen Differentialinvarianten angeben („vollständiges System m^{ter} Ordnung“ vgl. Nr. 6 und 13), derart, daß jede Differentialinvariante mit Ableitungen höchstens m^{ter} Ordnung eine ganze rationale Funktion dieser $J_1, \ldots, J_\varrho$ wird. Diese Invarianten J sind projektive Invarianten eines gewissen Systems von Tensoren $T_1, T_2, T_3, \ldots$, deren Komponenten sich aus (71) ergeben.

56) Vgl. die bei Anm. 40) genannten Lezioni von *Ricci*.

57) Hierzu *S. Lie*, Leipzig. Ber. 43 (1891), 2. Abhandl., § 12.

Man kann zunächst (69) nach den $\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x_i' \partial x_k'}$ auflösen und hiermit alle höheren Ableitungen der φ_λ durch die ersten ausdrücken. Die Tensoren T_1 sind durch $\frac{\partial F^{(\sigma)}}{\partial x_i}$ gegeben, für T_2 erhält man die Komponenten

$$(75) \qquad (\Phi_{ik}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_\sigma C^{(\sigma)} \frac{\partial^2 F^{(\sigma)}}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Hierbei sind die Invarianten $C^{(\sigma)}$ gegeben durch

$$(76) \qquad C^{(\sigma)} = \sum_\varrho \frac{D_\varrho^{(\sigma)}}{D} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\varrho},$$

wo D die Funktionaldeterminante von $F^{(1)}, \ldots, F^{(n)}$ und $D_\varrho^{(\sigma)}$ die Minoren von $\frac{\partial F^{(\sigma)}}{\partial x_\varrho}$ in D bedeuten.

Durch Elimination der 3. Ableitungen der φ_λ aus (70) erhält man die Tensoren T_3:

$$(77) \qquad (\Phi_{ikj}) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} - \sum_\sigma C^{(\sigma)} \frac{\partial^3 F^{(\sigma)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} - \sum_\sigma \frac{\partial C^{(\sigma)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 F^{(\sigma)}}{\partial x_i \partial x_k}$$
$$- 2 \sum_\sigma \sum_\varrho (\Phi_{i\varrho}) \frac{D_\varrho^{(\sigma)}}{D} \frac{\partial^2 F^{(\sigma)}}{\partial x_k \partial x_j}$$

u. s. f.

Es besteht also für die Differentialinvarianten willkürlicher Funktionen $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots$ und damit auch für die Differentialinvarianten von mindestens $(n+1)$ linearen Differentialformen ein „Reduktionssatz" (vgl. Nr. 22).

Einen besonderen Fall behandelt *J. E. Wright*[58]) bei Bestimmung von Differentialinvarianten 1. und 2. Ordnung von Funktionen $F\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$, in denen die x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ unabhängige, die z_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ abhängige Veränderliche sind.

18. Quadratische Differentialformen. Bei Bildung von Differentialinvarianten einer gegebenen linearen Differentialform F kommt man, wie schon in Nr. 13 bemerkt wurde, wegen des Auftretens der Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'}$ in den Transformationsgleichungen nicht weiter. Die Elimination dieser Ableitungen gelingt, wenn man zu F weitere Differentialformen f hinzunimmt und simultane Differentialinvarianten

58) Trans. Am. math. Soc. 6 (1905), p. 286—315.

von F und f betrachtet. Für f nimmt man fast immer[59]) eine quadratische Differentialform

(78) $$f = \sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

deren Determinante

(79) $$g = |g_{ik}|$$

von Null verschieden ist.

Die quadratische Differentialform f erfüllt dann in invariantentheoretischer Hinsicht einen doppelten Zweck: Erstens läßt sich jedem Tensor ein zu ihm kontravarianter zuordnen, indem man bezüglich f Polaren bildet. Hiervon macht man bei Bildung von Differentialinvarianten durch Verjüngung (Nr. 12) ausgiebig Gebrauch.

Zweitens lassen sich aus den Transformationsgleichungen für die Ableitungen der Komponenten g_{ik} von f:

(80) $$\frac{\partial g'_{ik}}{\partial x'_j} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x'_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x'_k} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x'_j} + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x'_i \partial x'_j} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x'_k} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x'_k \partial x'_j} \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x'_i} \right)$$

und den Transformationsgleichungen für die Ableitungen der Komponenten eines beliebigen Tensors die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x'_i \partial x'_k}$ eliminieren, wodurch man zu neuen Invarianten gelangt.[60])

Zwecks Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x'_i \partial x'_k}$ aus (80) führt man mit *E. B. Christoffel*[61]) die *„Drei-Indizes-Symbole erster Art"*

59) Man kann z. B. auch (siehe Nr. 17) n lineare Differentialformen $L^{(i)} = \sum_\alpha a_\alpha^{(i)} dx_\alpha$ nehmen, deren Determinante $A = |a_k^{(i)}|$ nicht verschwindet. Ist dann $A_\varrho^{(i)} = \frac{\partial A}{\partial a_\varrho^{(i)}}$, so läßt sich für eine lineare Differentialform $\sum b_i dx_i$ (und ebenso für beliebige Tensoren) eine „kovariante Ableitung" definieren durch den Tensor $\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \sum_\sigma \sum_\tau \frac{A_\tau^{(\sigma)}}{A} b_\tau \frac{\partial a_i^{(\sigma)}}{\partial x_k}$.

Die Möglichkeit der Elimination der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{d x'_\alpha \partial x'_\beta}$ aus den Transformationsgleichungen tritt weiter stets dann ein, wenn eine der Grundformen eine *Hesse*sche Determinante vom Range $\geq n-1$ besitzt, wie dies von *L. Sinigallia* näher ausgeführt wurde. Vgl. Rend. di Palermo 19 (1905), p. 161—184. Bemerkungen hierzu bei *Th. de Donder,* ebenda 21 (1906), p. 188—191. Vgl. ferner *E. Pascal,* ebenda 22 (1906), p. 97—105.

60) Vgl. hierzu *J. Knoblauch,* J. f. Math. 131 (1906), p. 247—264.

61) *E. B. Christoffel,* J. f. Math. 70 (1869), p. 46—70; ebenda p. 241—248; bei *R. Lipschitz,* ebenda p. 71—102 ist $\begin{bmatrix} i\,k \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_{i,k,s}$; bei *G. Ricci* und *T. Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125—201 ist $\begin{bmatrix} i\,k \\ s \end{bmatrix} = a_{ik,s}$.

$$(81)\qquad \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}\right)$$

und *zweiter Art*

$$(82)\qquad \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \sum_{\lambda} \begin{bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{bmatrix} g^{\lambda l}$$

ein. Hierbei sind

$$(83)\qquad g^{\lambda l} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda l}}$$

die Komponenten eines kontravarianten (symmetrischen) Tensors 2. Stufe. Man hat dann

$$(84)\qquad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} = \sum_{s} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ s \end{Bmatrix}' \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_s} - \sum_{\mu}\sum_{\nu} \begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x'_\beta}.$$

Ferner ist[62]):

$$(85)\qquad \begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,i \\ j \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} i\,k \\ j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\,i \\ j \end{Bmatrix},$$

$$(86)\qquad \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} r\,i \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s\,i \\ r \end{bmatrix},$$

$$(87)\qquad \sum_i \begin{Bmatrix} i\,k \\ i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log g}{\partial x_r} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r}.$$

19. Kovariante Ableitungen. Es seien $a_{i_1 \dots i_m}$ die Komponenten eines kovarianten Tensors m^{ter} Stufe. Eliminiert man aus den Transformationsgleichungen für $\frac{\partial a_{i_1 \dots i_m}}{\partial x_i}$ die zweiten Ableitungen der φ_α mit Hilfe von (84), so erhält man die Komponenten $a_{i_1 \dots i_m(i)}$ eines kovarianten Tensors $(m+1)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$(88)\qquad a_{i_1 \dots i_m(i)} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_m}}{\partial x_i} - \sum_{\lambda}\left[\begin{Bmatrix} i\,i_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} a_{\lambda i_2 \dots i_m} + \cdots + \begin{Bmatrix} i\,i_m \\ \lambda \end{Bmatrix} a_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}\lambda}\right].$$

Dieser Tensor wurde schon von *E. B. Christoffel*[61]) angegeben und heißt nach *G. Ricci*[63]) und *T. Levi-Civita*[61]) die *„erste kovariante Ableitung“*[64]) des Tensors $a_{i_1 \dots i_m}$.[65]) Die in (88) dargestellte Operation heißt *„kovariante Differentiation“*.

In analoger Weise wird für kontravariante und gemischte Tensoren dieser verallgemeinerte Differentiationsprozeß definiert und auf

62) Vgl. z. B. auch wegen weiterer Formeln: *Bianchi-Lukat*, Vorlesungen über Differentialgeom., p. 44 (Leipzig 1899, Teubner).

63) Rend. dei Linc. (4) 3 (1887), p. 15—18. Vgl. auch *A. Palatini*, Rend. di Palermo 43 (1919), p. 156—191.

64) Genauer: „Mit bezug auf die quadratische Differentialform f“. Eine allgemeinere Definition bei *G. Hessenberg*, Math. Ann. 78 (1917), p. 187—217.

65) *A. Einstein* gebraucht die Bezeichnung „Erweiterung“.

diesen Operationen beruht der sogenannte „absolute Differentialkalkül"[61])[66]).

Wir führen im speziellen noch an[67]): Für einen kovarianten Tensor erster Stufe A_i lautet die Ableitung bezüglich f[68]):

$$(89)\qquad A_{r(s)} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} r\,s \\ \lambda \end{Bmatrix} A_\lambda.$$

Für einen kontravarianten Tensor A^i haben wir:

$$(90)\qquad A^r_{(s)} = \frac{\partial A^r}{\partial x_s} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \lambda\,s \\ r \end{Bmatrix} A^\lambda.$$

Für einen kovarianten Tensor 2. Stufe C_{ik} ist:

$$(91)\qquad C_{ik(l)} = \frac{\partial C_{ik}}{\partial x_l} - \sum_\varrho C_{\varrho k} \begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} - \sum_\varrho C_{i\varrho} \begin{Bmatrix} k\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}.$$

Im besonderen verschwinden für den Fundamentaltensor g_{ik} $(f = \sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k)$ die kovarianten Ableitungen identisch.

Entsprechend den ko- und kontragredienten Differentiationen kann man auch ebenso benannte Differentiale rechnerisch verwenden, wie dies *G. Hessenberg*[69]) tut.

E. Pascal[70]) zeigt umgekehrt, daß, wenn die $a_{i_1 \ldots i_m (i)}$ von (88) die Komponenten eines kovarianten Tensors sind, auch die Funktionen $a_{i_1 \ldots i_m}$ Komponenten eines ebensolchen Tensors sind. Eine Verallgemeinerung für „abgeleitete" Tensoren gibt hierzu *L. Sinigallia.*[71])

20. Normalkoordinaten. Zur Vereinfachung mancher Beweise, sowie zwecks geometrischer und physikalischer Anwendungen, lassen sich in der Umgebung eines Punktes $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $(x_1, \ldots, x_n)$ besondere neue Veränderliche $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ einführen. Sie wurden schon von *B. Riemann*[72]) und

66) Diese Bezeichnung ist — worauf auch *G. Hessenberg*, vgl. Anm. 69), hinweist — unglücklich gewählt; es sollte besser „relativer" Kalkül heißen, da sich die ganze Operation auf die Differentialform f bezieht.

67) Weitere Beispiele bei *A. Einstein,* Die Grundlagen der allg. Rel.-Theorie (Barth 1916), § 11 und *H. Weyl,* Raum, Zeit, Materie (Springer 1918), § 15 ff.

68) Sind die A_i die ersten Ableitungen einer Funktion U: $A_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, so gibt (89) die sog. „zweiten kovarianten Differentialquotienten" von U. Vgl. *Bianchi-Lukat,* Vorles. über Differentialgeom., p. 46 (Leipzig 1899, Teubner).

69) Acta Math. 23 (1899), p. 121—170; Math. Ann. 78 (1917), p. 187—217.

70) Rend. Lomb. Ist. (2) 39 (1906), p. 414—418.

71) Rend. Lomb. Ist. (2) 39 (1906), p. 876—893.

72) Pariser Preisarbeit 1861 = Werke 1892, p. 405, Anmerkungen von *H. Weber.*

nachher besonders von *R. Lipschitz*[73]) benutzt; ihre Bedeutung wurde von *H. Weber*[74]) auseinandergesetzt. Man nennt sie jetzt gewöhnlich „*Riemannsche Normalkoordinaten*“[75]).

Es seien

$$x_i = x_i(t) \tag{92}$$

die Gleichungen einer vom Punkte $P_0(x_i^0 = x_i(t_0))$ ausgehenden (analytischen) Kurve und das Bogendifferential ds auf ihr sei durch φ festgelegt:

$$ds = \sqrt{\varphi(dx, dx)} = \sqrt{\sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k} = \sqrt{\sum g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}\, dt. \tag{93}$$

Führt man in (92) statt t den neuen Parameter s ein, so daß $\sum g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 1$ wird, setzt also $s = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\sum g_{ik}(t) \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{dx_k(t)}{dt}} \cdot dt$, so kann man nach den „kürzesten“ (geodätischen), von P_0 ausgehenden Linien fragen, d. h. nach jenen Kurven, für welche die erste Variation $\delta \int\limits_{t_0}^{t} ds = 0$ ist. Man erhält dann für die Funktionen $x_i(s)$ die *Lagrange*schen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{\partial x_\beta}{ds} = 0. \tag{94}$$

Dies ist ein invariantes Gleichungssystem. Schreibt man für die Lösungen die Anfangswerte vor:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_{s=0} = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0, \tag{95}$$

so wird:

$$x_i = x_i^0 + \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0 s + \cdots + \frac{1}{\varrho!} \left(\frac{d^\varrho x_i}{ds^\varrho}\right)_0 \cdot s^\varrho + \cdots \tag{96}$$

Setzt man hier

$$s \cdot \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0 = \xi_i, \tag{97}$$

so wird aus (96):

$$x_i = x_i^0 + \xi_i + \cdots + \frac{1}{\varrho!} f_\varrho(\xi) + \cdots, \tag{98}$$

wo $f_\varrho(\xi)$ eine Form ϱ^{ten} Grades der ξ ist.

Die ξ sind die *Riemann*schen Normalkoordinaten.

---

73) J. f. Math. 70 (1869), p. 71—102; ebenda 71 (1870), p. 274—287 und p. 288—295; 72 (1870), p. 1—56.

74) Anmerkungen in *Riemanns* Werken, 2. Aufl. 1892, p. 405; vgl. ferner *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p, 537—567; *B. Riemann*, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Neu herausgeg. von *H. Weyl*, Springer 1919.

75) *H. Weber* sagt „Zentralkoordinaten“; *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie, p. 97 sagt „geodätische Koordinaten“.

Wesentlich für Normalkoordinaten ist, daß sie sich bei beliebiger Transformation linear transformieren, d. h. führt man statt der x_i neue Veränderliche x_i' ein, so hängen die ξ mit den ξ' linear homogen (mit konstanten Koeffizienten) zusammen. Bei Normalkoordinaten werden ferner die Komponenten des transformierten Tensors f stationär, d. h. für den betreffenden Punkt wird $\frac{\partial g'_{ik}}{\partial x'_j} = 0$.

Ist es möglich, f auf eine Form mit konstanten Koeffizienten zu transformieren, so wird diese Transformation durch Normalkoordinaten geleistet, und dies gilt, wie *Lipschitz*[76]) bewiesen, auch für Differentialformen p^{ten} Grades $(p > 2)$.

$f = ds^2$ ist mit *Riemann*schen Normalkoordinaten in der Gestalt darstellbar[74]):

$$ds^2 = \sum d\xi_i^2 + \sum_{ik,rs} \mathfrak{P}_{ik,rs}(\xi) \cdot p_{ik} p_{rs}, \tag{99}$$

wobei $p_{ik} = \xi_i d\xi_k - \xi_k d\xi_i$ gesetzt ist und die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ Potenzreihen der ξ_i sind.[77])

21. Der Krümmungstensor. Bei einer quadratischen Differentialform $f = \sum g_{ik} dx_i dx_k = f(dx, dx)$ verschwinden die kovarianten Ableitungen der g_{ik} identisch. Zur Bildung weiterer Differentialinvarianten ist daher die kovariante Differentiation ungeeignet. Weiter kommt man mit Hilfe einer aus f abgeleiteten, quadrilinearen Differentialform K, die zuerst *Riemann*[78]) betrachtet hat und deren invariantentheoretische Bedeutung von *Christoffel* und *Lipschitz* völlig klargestellt wurde.[79])

Dieser Tensor K wird als (*Riemann-Christoffel*scher) „*Krümmungstensor*" bezeichnet und tritt bei der Frage auf, wann f in eine Form mit konstanten Koeffizienten, also auch in eine Summe $\sum dx_i'^2$, transformierbar ist.[80]) Notwendig und hinreichend hierzu ist $K \equiv 0$, identisch in allen vier Reihen von Differentialen.

Nach *Riemann* läßt sich K mit Hilfe des *Cauchy*schen Differentialkalküls so darstellen[81]):

$$K = \delta^2 f(dx, dx) - 2\, d\delta f(dx, \delta x) + d^2 f(\delta x, \delta x) \tag{100}$$

76) J. f. Math. 70 (1869).

77) Hierzu *H. Vermeil*, Math. Ann. 79 (1918), p. 289—312; *Lipschitz*, J. f Math. 72, wo die Normalkoordinaten auch für Formen p^{ter} Dimension entwickelt sind.

78) Pariser Preisarbeit 1861 = Werke 1892, p. 401.

79) J. f. Math. 70 (1869). Die *Christoffel*sche Arbeit ist datiert vom 3., die *Lipschitz*sche Arbeit vom 4. Jänner 1869.

80) nach *G. Ricci* von „nullter Klasse" ist, Ann. di mat. (2) 12 (1884).

81) $-\frac{1}{2}K$ ist bei *Christoffel* mit G_4, bei *Lipschitz* mit Ψ bezeichnet.

mit der Bedingung, daß die zweiten Differentiale $d\delta x, d^2x, \delta^2 x$ aus den identisch für jedes Dx bestehenden Gleichungen zu berechnen sind:

$$(101)\quad \begin{cases} Df(dx,\delta x) - \delta f(dx, Dx) - df(\delta x, Dx) = 0 \\ Df(dx, dx) - 2df(dx, Dx) = 0 \\ Df(\delta x, \delta x) - 2\delta f(\delta x, Dx) = 0. \end{cases}$$

Man erhält dann

$$(102)\quad K = \sum_{|ik,rs} (ik, rs)\cdot(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i)(dx_r\delta x_s - dx_s\delta x_r),$$

wobei die „*Vier-Indizes-Symbole erster Art*"[82]) (ik, rs) folgendes bedeuten:

$$(103)\ K_{ki,rs} = (ik, rs) = \frac{\partial \begin{bmatrix} i\,s \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_r} - \frac{\partial \begin{bmatrix} i\,r \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_s} + \sum_\lambda \left(\begin{bmatrix} i\,r \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,s \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,r \\ \lambda \end{Bmatrix}\right)$$

oder ausgeführt:

$$(104)\quad 2K_{ki\,rs} = 2(ik, rs) = \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial x_k \partial x_s} + \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x_i \partial x} - \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x_i \partial x_s} + 2\sum_\mu \sum_\nu g^{\mu\nu}\left(\begin{bmatrix} i\,r \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,s \\ \nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,s \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,r \\ \nu \end{bmatrix}\right).$$

Quadrilinear geschrieben ist:

$$(105)\quad K = \sum_i\sum_k\sum_r\sum_s (ik, rs)\, d^1x_i \overline{d^2x_k} d^3x_r \overline{d^4x_s}.$$

Wir führen noch eine zweite Ableitung von K an.[83]) Wir bilden nach (89) die kovariante Ableitung eines Tensors 1. Stufe A_μ:

$$A_{\mu(\nu)} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \sum_\varrho \begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \varrho \end{Bmatrix} A_\varrho.$$

Von diesem Tensor 2. Stufe $A_{\mu(\nu)} = A_{\mu\nu}$ bilden wir nach (91) abermals die kovariante Ableitung $A_{\mu\nu(\lambda)} = A_{\mu\nu\lambda}$. Dann ist $A_{\mu\nu\lambda} - A_{\mu\lambda\nu}$ das Produkt (vgl. Nr. 12) der beiden Tensoren A^μ und K.

Zwischen den Vier-Indizes-Symbolen (ik, rs) bestehen eine Reihe von Relationen[84]):

$$(106)\quad (ik, rs) = -(ik, sr) = -(ki, rs)$$

$$(107)\quad (ik, rs) = (rs, ik)$$

$$(108)\quad (ik, rs) + (ir, sk) + (is, kr) = 0,$$

so daß von ihnen nur $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ linear unabhängig sind.

---

82) Verallgemeinerung davon bei *E. Pascal,* Rend. di Palermo 22 (1906), p. 97—105.

83) Vgl. *A. Einstein,* Die Grundlagen der allgem. Rel.-Theorie, (Barth) 1916, § 12. Allgemeiner bei *G. Ricci* u. *T. Lexi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 143, Formel (23).

84) Bezüglich einer einfachen Herleitung siehe *G. Hessenberg,* Math. Ann. 78 (1917), § 3.

Neben (ik, rs) werden auch *„Vier-Indizes-Symbole 2. Art“* verwendet, die definiert sind durch[85])

$$(109)\qquad \{ik, rs\} = \sum_\lambda g^{\lambda k}(i\lambda, rs).$$

Es sind dann die Ausdrücke

$$(110)\quad K^k_{irs} = \{ik,rs\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,s \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_r} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,r \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_s} + \sum_\lambda \left(\begin{Bmatrix} i\,s \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\, r \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,r \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\, s \\ k \end{Bmatrix} \right)$$

die Komponenten eines gemischten Tensors K^k_{irs}[86]). Aus ihm entsteht durch Verjüngung der „Linientensor-Krümmung“[87])

$$(111)\qquad K_{is} = \sum_\lambda K^\lambda_{i\lambda s},$$

und hieraus die Invariante „invariante Krümmung“

$$(112)\qquad K_0 = \sum_{is} g^{is} K_{is}.$$

Der Name „Krümmungstensor“ rührt davon her, daß das *Riemann*sche Krümmungsmaß bezüglich der durch $dx, \delta x$ bestimmten Flächenrichtung gegeben ist durch[88]):

$$(113)\qquad k = \frac{K}{P},$$

wo K durch (102) bestimmt ist und P die kovariante Differentialform bedeutet[89]):

$$(114)\qquad P = \sum\sum\sum\sum (g_{\lambda\mu} g_{\nu\tau} - g_{\lambda\tau} g_{\nu\mu})(dx_\lambda \delta x_\nu - dx_\nu \delta x_\lambda)(dx_\mu \delta x_\tau - dx_\tau \delta x_\mu).$$

Für $n = 2$ fallen aus (113) die Differentiale heraus und k geht über in das *Gaußsche Krümmungsmaß* eines Flächenpunktes[90]).

Sind die Vier-Indizes-Symbole (ik, rs) als Potenzreihen der x_i ge-

85) Vgl. *Bianchi-Lukat*, Vorlesungen über Differentialgeom., Leipzig 1899 (Teubner), p. 49.

86) Vgl. hierzu *E. Pascal*, Rend. Acc. Linc. (5) 15_1 (1906), p. 670—674.

87) *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie, p. 110; weitere Invarianten bei *H. Kühne*, Math. Ann. 56 (1902), p. 257—264.

88) *Bianchi-Lukat*, l. c. p. 572; ferner: *Beltrami*, Werke I, p. 407; *R. Lipschitz*, J. f. Math. 72 (1870), p. 1—56. Hierzu auch *A. Voß*, Math. Ann. 16 (1880), p. 129—179.

89) Bezüglich Verallgemeinerung der Formen K und P in (113) vgl. *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p. 537—567, § 8.

90) Vgl. z. B. *J. Knoblauch*, Grundlagen der Differentialgeom., Leipzig 1913 (Teubner), XII. Abschnitt; ferner hierzu *G. Ricci*, Atti Ist. Veneto 63 (1904), p. 1233—1239.

geben, so lassen sich, wie *Riemann* angedeutet[91]) und *Vermeil* bewiesen[92]) hat, bei gewissen immer zulässigen Normierungen die g_{ik} eindeutig berechnen.

22. Reduktionssatz, Äquivalenz. Es sei wieder f eine quadratische Differentialform und F ein oder mehrere Tensoren; g_{ik} seien die Koeffizienten von f, $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sollen die Komponenten der Tensoren F bedeuten.

Dann kann man nach allen Differentialinvarianten J_m fragen, die aus den g_{ik}, $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und deren Ableitungen bis zur m^{ten} Ordnung gebildet sind. Die Bestimmung aller J_m von f und F wird auf ein Problem der *projektiven* Invariantentheorie zurückgeführt mit Hilfe des „*Reduktionssatzes*"[93]). Dieser besagt, daß es zur Kenntnis aller J_m genügt, alle projektiven Invarianten eines von f und F abgeleiteten Systems Σ_m von Formen anzugeben. Daraus folgt die *Endlichkeit* des Systems der J_m, d. h. es läßt sich aus den J_m eine endliche Anzahl $J_m^{(1)}, J_m^{(2)}, \ldots, J_m^{(h)}$ so auswählen, daß jede J_m eine ganze rationale Funktion dieser h Differentialinvarianten wird. Die $J_m^{(1)}, \ldots, J_m^{(h)}$ bilden dann ein „*vollständiges System*" von Differentialinvarianten m^{ter} Ordnung.

Für eine quadratische Differentialform f und irgendwelche Tensoren F haben *Christoffel*[94]) und *Ricci* und *Levi-Civita*[95]) den Reduktionssatz durch Elimination bewiesen. Allgemein, unabhängig davon, ob eine quadratische Differentialform f gegeben ist oder nicht, und für Differentialausdrücke, die keine *Formen* zu sein brauchen, wurde der Satz von *E. Noether*[93]) bewiesen unter Einführung *Riemann*scher Normalkoordinaten. Für die quadratische Differentialform findet sich die genauere Einzelausführung bei *Vermeil*[92]).

Der Reduktionssatz gibt auch die Antwort auf die Frage nach der *Äquivalenz* zweier Differentialformen: äquivalente Formen $f(dx)$ und $g(dx')$ sind hierbei solche, die durch eine Transformation $x = \varphi(x')$ ineinander übergehen.[96])

---

91) Habilitationsvortrag Göttingen = Werke 1892, p. 272—287 und in der Pariser Preisarbeit = Werke, p. 401.

92) *H. Vermeil*, Math. Ann. 79 (1918), p. 289—312.

93) *E. Noether*, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, Gött. Nachr. 1918.

94) J. f. Math. 70 (1869).

95) Math. Ann. 54 (1901) und die dort angeführte Literatur. Vgl. auch *G. Ricci*, Rend. Acc. Linc. (5) 21_1 (1912), p. 527—532; hierzu Rend. di Palermo 33 (1912), p. 194—200.

96) Äquivalenz bei Berührungstransformationen untersucht *G. Koenigs*, Acta Math. 10 (1887), p. 313—338.

Bei zwei quadratischen Differentialformen ist zuerst von *Christoffel* und *Lipschitz* die Frage beantwortet worden, wann f einer Form $\sum dx_i'^2$ äquivalent ist.[97]) Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß der Krümmungstensor K von f identisch verschwindet. Sind f und ψ zwei quadratische Differentialformen, von denen man weiß, daß sie äquivalent sind, so ist die Bestimmung einer Transformation $x = \varphi(x')$, die f in ψ überführt, ein algebraisches Problem.[94]) Die Frage nach der Äquivalenz von f und ψ wird durch den Satz von *Christoffel* beantwortet[98]): Man bildet die Krümmungsform Φ_4 von f und deren kovariante Ableitungen bezüglich f: $\Phi_5, \Phi_6, \ldots, \Phi_p$; p wird hierbei so gewählt, daß die Formen $f, \Phi_4, \Phi_5, \ldots, \Phi_p$ wenigstens n absolute projektive Invarianten $K_1, \ldots, K_n$ ergeben, wogegen bei $p-1$ dies noch nicht der Fall ist.[99]) Auf dieselbe Art bildet man für ψ die n absoluten Invarianten $K_1', \ldots, K_n'$. Für die Äquivalenz ist dann notwendig und hinreichend[100]), daß sich aus den zu $f = \psi$, $\Phi_i = \Psi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ gehörigen Transformationsgleichungen die x_i und die $\frac{\partial x_i}{\partial x_k'}$ ohne Widerspruch bestimmen lassen und außerdem noch die Transformationsgleichungen von $\Phi_{p+1} = \Psi_{p+1}$ identisch erfüllen. Es ist dann $K_\alpha = K_\alpha'$ und alle einander entsprechenden Invarianten der beiden Formenreihen

$$f, \Phi_4, \Phi_5, \ldots, \Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots$$
$$\psi, \Psi_4, \Psi_5, \ldots, \Psi_p, \Psi_{p+1}, \ldots$$

werden einander gleich.

E. Noether[93]) gibt mit Hilfe ihres allgemeinen Reduktionssatzes die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Äquivalenz von Differentialformen p^{ter} Ordnung (vgl. die folgende Nr.).

E. Pascal[101]) behandelt die Äquivalenz zweier Tensoren, denen multilineare Differentialformen entsprechen.

---

97) Bezüglich Verwendung des Klassenbegriffes analog wie bei Linearformen vgl. *G. Ricci*, Ann. di mat. (II) 7 (1884), p. 135—168; Rend. Acc. Linc. (4) 4 (1888), p. 203—207; Ausdehnung auf Bilinearformen bei *F. Böhm*, Habil.-Schrift, München 1911.

98) Neuerdings bewiesen bei *H. Vermeil*, Math. Ann. 79 (1918), p. 289—312. Für den Fall, wo ψ weniger als n Veränderliche enthält, vgl. *M. Lévy*, Paris C. R. 86 (1878), p. 463—466.

99) Ist dies für kein noch so großes p möglich, so gestattet φ ∞-viele Transformationen in sich. Vgl. hierzu: *W. Killing*, J. f. Math. 109 (1892), p. 121; *H. Mangoldt*, J. f. Math. 94 (1882), p. 27.

100) J. f. Math. 70 (1869), p. 46—70 und in etwas anderer Formulierung ebenda, p. 241—248.

101) Atti Ist. Veneto 65 [(8) 8] (1906), p. 1117—1120; Rend. di Palermo 22 (1906) p. 97—105.

Einen speziellen Fall behandelt *G. Torelli.*[102]) Die Anzahl der unabhängigen Differentialinvarianten m^{ter} Ordnung einer Differentialform p^{ter} Ordnung bestimmt *C. N. Haskins*[103]) mit Hilfe der partiellen Differentialgleichungen, deren Lösungen sie sind.

23. Vollständige Systeme. Der Reduktionssatz führt unmittelbar zu den in der vorigen Nr. genannten „vollständigen Systemen" m^{ter} Ordnung Σ_m.

Ist eine einzelne quadratische Differentialform f gegeben[104]), so ist Σ_m für $m > 1$ identisch mit einem kleinsten, vollständigen System von projektiven Invarianten der Formen

$$f,\ \Phi_4,\ \Phi_5,\ \ldots,\ \Phi_{m+2}. \tag{115}$$

Ist neben f noch ein Tensor S gegeben, so bekommt man Σ_m für f und S, indem man das entsprechende System von projektiven Invarianten der Formen (115) und

$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_m \tag{116}$$

aufsucht, wo S_i die kovariante Ableitung bezüglich f von S_{i-1} ist ($S_0 = S$).

Allgemein konstruiert *E. Noether*[93]) ein System Σ_m einer nichtlinearen Differentialform $f(dx)$ auf folgende Art. Aus $f(dx)$ werden vorerst Polaren

$$f_D = \sum_i \frac{\partial f}{\partial\, d x_i} D x_i,\quad f_{D^2} = \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial d x_i\, \partial d x_k} D x_i D x_k,\quad \ldots \tag{117}$$

abgeleitet. Aus diesen Polaren und deren Differentialen

$$df,\ df_D,\ \ldots,\ d^2 f,\ d^2 f_D,\ \ldots \tag{118}$$

läßt sich durch Verallgemeinerung eines *Riemann*schen[105]) Ansatzes (Formel (100), (101)) eine Reihe von Differentialformen Ω_ϱ erzeugen, die keine gemischten Differentiale $d^\varrho D$, $d^{\varrho-1} D^2, \ldots$ enthalten und die als Normalformen der ϱ^{ten} Variation anzusehen sind:

---

102) Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 23—38.

103) Trans. Am. math. Soc. 4 (1903), p. 38—43. Vgl. hierzu den Schluß von Nr. 25.

104) Spezielle Fälle bei *F. Casorati*, Ann. di mat. Ia, 3 (1860) u. 4 (1861); *G. Ricci* u. *Levi-Civita*, Math. Ann. 54 (1901). Vgl. ferner: *C. N. Haskins*, Trans. Am. math. Soc. 3 (1902), p. 71—91; ebenda 4 (1903), p. 38—43: ebenda 5 (1904), p. 167—192; *A. R. Forsyth*, Phil. Trans. A 202 (1903), p. 277—333, ebenda A 201 (1903), p. 329—402; *J. E. Wright*, Am. J. of Math. 27 (1905), p. 323—342; *T. Levi-Civita*, Atti Ist. Veneto 1894.

105) Werke 1892, p. 401.

$$(119)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = Df - df_D \\ \Omega_2 = D^2 f - Ddf_D + \frac{1}{2} d^2 f_{D^2} \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Aus diesen Formen können dann die zweiten und höheren Differentiale eliminiert werden, wenn man die zweiten Differentiale d^2x, dDx, D^2x durch erste ausdrückt. Das hierzu notwendige invariante Gleichungssystem wird durch die *Lagrange*schen Gleichungen des zu $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ gehörigen Variationsproblems geliefert. Statt (119) erhält man dann ein System

$$(120)\qquad [\Omega_1], [\Omega_2], \ldots, [\Omega_\varrho], \ldots$$

von Differentialformen mit nur ersten Differentialen. Man kann dann „kovariante Ableitungen" eines Tensors definieren und mit Hilfe derselben aus den $[\Omega_\varrho]$ eine Reihe weiterer Differentialformen herleiten, deren projektive Invarianten das gesuchte vollständige System Σ_m bilden. Mit Ausnahme der Homogenitätsgrade $p = 3, 4 \ldots$ genügen schon die Funktionen (120), also insbesondere auch für negatives und gebrochenes p.

24. Pascalsche Differentialausdrücke.[106]) Den durch (31) gegebenen Differentialausdruck schreiben wir so:

$$(121)\qquad X^{(r)} = \sum_{m=1}^{m=r} \sum_{(j)} X_{j_1 \ldots j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m};$$

hierbei ist gesetzt:

$$(122)\qquad \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} = \frac{1}{m!} S_j \sum_{(i)} [i_1 \ldots i_m]\, d^{i_1} x_{j_1} \ldots d^{i_m} x_{j_m}$$

und S_j bedeutet die Summe über alle Permutationen der j, so daß δ in den j symmetrisch wird.

Vermöge einer allgemeinen Punkttransformation

$$(123)\qquad x_i = \varphi_i(x_1', \ldots, x_n')$$

gehe $X^{(r)}$ über in

$$(124)\qquad X'^{(r)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=r} \sum_{(h)} X'_{h_1 \ldots h_\mu} \delta'^{(r)}_{h_1 \ldots h_\mu},$$

---

106) *E. Pascal*, Rend. Lomb. Ist. (2) 35 (1902), p. 835—850; weiteres ebenda 36 (1903), p. 528—539 u. p. 978—985; ferner 9 Arbeiten in den Rend. Acc. Linc. (5) 12 (1903); *L. Sinigallia*, Rend. Lomb. Ist. (2) 35 (1902), p. 749—778. — Vgl. zu dieser Nr. die zusammenfassende Darstellung bei *E. Pascal*, Rom, 4. Math.-Kongreß 2 (1909), p. 138—143 und Mem. Acc. Linc. 1910.

wobei analog (122) gesetzt ist:

$$(125)\qquad \delta'^{(r)}_{h_1\ldots h_\mu} = \frac{1}{\mu!}\, S_h \sum_{(k)} [k_1, \ldots, k_\mu]\, d^{k_1} x_{h_1} \ldots d^{k_\mu} x_{h_\mu}.$$

Der Zusammenhang zwischen den $X_{j_1\ldots j_m}$ und den $X'_{h_1\ldots h_\mu}$ ist dann gegeben durch:

$$(126)\qquad X'_{h_1\ldots h_\mu} = \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{(j)} X_{j_1\ldots j_m} \binom{j_1 \ldots j_m}{h_1 \ldots h_\mu}.$$

Hierbei ist $m \leqq \mu$, $\mu \leqq r$ und die Klammern $\binom{j_1 \ldots j_m}{h_1 \ldots h_\mu}$ sind Produktsummen der $\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$, die gewissen Rekursionsformeln genügen.

Die Frage nach Funktionen $J\left(X, \frac{\partial X}{\partial x}, \ldots\right)$ der $X_{j_1\ldots j_m}$ und deren Ableitungen, die gegenüber (123) invariant sind, führt auf eine Reihe von Ausdrücken („Klammersymbolen"), die eine Erweiterung der *Christoffel*schen Bezeichnungen auf Differentialausdrücke mit höheren Differentialen darstellen. Mit Hilfe dieser Klammersymbole können Invarianten gebildet werden. Die Funktionen $X^{(r)}$ in (121) sind schon Invarianten; die nächst einfacheren sind gegeben durch

$$(127)\quad X^{(s,p)} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{r=1}^{p} \sum_{(j)} \sum_{(i)} ((j_1 \ldots j_m, i_1 \ldots i_r))\, \delta^{(s)}_{j_1\ldots j_m} \delta^{(p)}_{i_1\ldots i_r},$$

wobei gesetzt ist:

$$(128)\,((i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_m)) = \frac{\partial^m X_{i_1\ldots i_r}}{\partial x_{j_1}\ldots \partial x_{j_m}} - \frac{\partial^{m-1} X_{i_1\ldots i_r j_1}}{\partial x_{j_2}\ldots \partial x_{j_m}} - \frac{\partial^{m-1} X_{i_1\ldots i_r j_2}}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_3}\ldots \partial x_{j_m}} - \cdots$$

E. Pascal[107]) behandelt mit Hilfe dieser Begriffsbildungen die Frage nach den infinitesimalen Transformationen, die $X^{(r)}$ gestattet und das Reduktionsproblem: Wann sind Transformationen (123) möglich, die $X^{(r)}$ in $X'^{(r)}$ mit weniger als n Veränderlichen überführen.

L. Sinigallia[108]) behandelt mit denselben Hilfsmitteln analoge Fragen und gibt Sätze, in denen bestimmte Matrizen eine Rolle spielen, die den Matrizen (53) bis (55) analog sind. Derartige Matrizen, aus den Komponenten eines Tensors gebildet, behandelt *E. Pascal*[109]) unter Hinweis auf die Invarianz ihrer Charakteristiken. Im speziellen wird hierzu der Krümmungstensor verwendet.

---

107) Ein spezieller Fall in Rend. Acc. Linc. (5) 12 (1903), p. 31—41.

108) Rend. di Palermo 17 (1903), p. 287—296; ferner Rend. Lomb. Ist. (2) 36 (1903), p. 650—668 und p. 951—968.

109) Atti Ist. Veneto 65 [(8) 8] (1906), p. 1117—1120; *Th. de Donder*, Rend. Acc. Linc. (5) 16_1 (1907), p. 279—283.

E. Pascal[110]) gibt ferner die den Polarformen $\sum g_{ik}\,dx_i\,\delta x_k$ einer quadratischen Differentialform $\sum g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ entsprechenden Bildungen bei Differentialausdrücken mit höheren Differentialen.

*Pascal*sche Differentialausdrücke behandelt *G. Tognoli*[111]) von einem etwas allgemeineren Standpunkte aus. Eine weitere Verallgemeinerung gibt *E. Pascal*[112]) selbst, indem er Formen eingehend untersucht, deren Veränderliche die Ausdrücke $\delta^{(r)}_{j_1\ldots j_m}$ von (122) sind. Solche Formen wären, wenn nur erste Differentiale auftreten, als Tensor-Konnexe zu bezeichnen. *E. Pascal* nennt die Gesamtheit ihrer Koeffizienten „ein kovariantes System mit k Indexgruppen“.

25. Differentialparameter. Differentialparameter sind — allgemein gesprochen — solche Differentialinvarianten, die keine Differentiale, dafür aber neben den Formenkoeffizienten und deren Ableitungen willkürliche Funktionen und deren Ableitungen enthalten. Sie entsprechen den Kontravarianten der projektiven Invariantentheorie und wurden zuerst von *Lamé*[113]) und *Beltrami*[114]) verwendet.[115])

Es sei

$$f = \sum g_{ik}\,dx_i\,dx_k \tag{129}$$

eine quadratische Differentialform mit der Determinante $g = |g_{ik}| \neq 0$. Ferner sei, so wie in (83)

$$g^{ik} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} \tag{130}$$

gesetzt. Dann ist die mit $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ geränderte Determinante g:

$$\Delta_1(U) = \sum g^{ik}\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,\frac{\partial U}{\partial x_k} \tag{131}$$

eine Differentialinvariante, die gewöhnlich nach *Beltrami*[116]) als erster Differentialparameter bezeichnet wird.[117])

---

110) Rend. Acc. Linc. (5) 12_2 (1906), p. 406—409.

111) Ann. Mat. Batt. (3) 13 (1906), p. 139—176. Vgl. auch *F. P. Cappabianca,* Batt. Giorn. 51 (1913), p. 273—314.

112) Rend. di Palermo 23 (1907), p. 38—52.

113) *G. Lamé,* Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859. Bei *Lamé* hat die quadratische Differentialform φ die spezielle Gestalt $\varphi = \sum h_i\,dx_i^2$.

114) Giorn. di mat. 2 (1865) = Werke I, p. 306; Mem. Bologna II, 9 (1869), p. 607—657 = Werke II, p. 74.

115) Vorbereitende Begriffe hierzu bei *Jacobi,* Opuscula Math. II, Berlin 1851. Betreffs weiterer Literatur hierzu siehe *Beltrami,* Werke II, p. 74 ff.

116) Werke II, p. 74—118. Vgl. auch *G. Ricci,* Ann. di mat. 88 a, 14 (1886), p. 1—11 und Studi editi dall' Università di Padova (1888).

117) Geometrische Deutung bei *G. Koenigs,* Acta math. 19 (1887), p. 313.

Die Polarform zu (131)

$$(132)\qquad (U, V) = \sum g^{ik} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_k}$$

heißt *„gemischter" Differentialparameter* von U und V.[118])

Aus einer Funktion U erhält man einen kovarianten Tensor 1. Stufe mit den Komponenten $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, den *„Gradienten"* von U. Bildet man die kovariante Ableitung dieses Tensors bezüglich f, so erhält man nach (89) den Tensor:

$$(133)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_\lambda \left\{ {ik \atop \lambda} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}.$$

Diesen Tensor multiplizieren wir mit g^{ik} und verjüngen, wodurch die Invariante entsteht:

$$(134)\qquad \Delta_2(U) = \sum_{ik} g^{ik} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_\lambda \left\{ {ik \atop \lambda} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda} \right).$$

Dies ist der *„zweite" Differentialparameter* von U. Er kann auch noch so geschrieben werden[119]):

$$(135)\qquad \Delta_2(U) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_\lambda \frac{\partial \left(\sum_i g^{i\lambda} \frac{\partial U}{\partial x_i} \sqrt{g} \right)}{\partial x_\lambda}.$$

Faßt man hier die $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ als Komponenten eines Vektors auf, so bezeichnet man $\Delta_2(U)$ auch als *„allgemeine Divergenz"* desselben.[120]) Hat f die spezielle Gestalt $\sum dx_i^2$, so wird nach (135):

$$(136)\qquad \Delta_2(U) = \sum_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2},$$

also identisch mit dem sog. *Laplace*schen Differentialausdruck.

Differentialparameter, die sich bei gleichzeitiger Transformation von zwei speziellen quadratischen Differentialformen der Flächentheorie einstellen, betrachtet *J. Knoblauch*[121]). *G. Darboux*[122]) gibt für $n = 2$

---

118) Bezeichnung nach *Bianchi-Lukat,* Vorlesungen über Differentialgeom., Leipzig 1899 (Teubner), p. 41 ff. Vgl. hierzu *G. Frobenius,* J. f. Math. 110 (1892), p. 14.

119) *Bianchi-Lukat,* l. c. p. 47.]

120) Vgl. z. B. *A. Einstein,* Die Grundlagen d. allgem. Rel.-Theorie, (Barth) 1916, p. 36.

121) J. f. Math. 115 (1895), p. 185—200; vgl. ferner ebenda 131 (1906), p. 247—264.

122) *G. Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces III (Paris 1889), p. 203 ff. Für allgemeines n siehe *P. Stäckel,* J. f. Math. 113 (1894), p. 58—60 und *J. Knoblauch,* ebenda 111 (1893), p. 329.

einen Beweis, daß sich jeder weitere Differentialparameter durch wiederholte Anwendung von Δ_1, ∇ und Δ_2 ergibt.[123]) Allgemein bestimmt *C. N. Haskins*[124]) die Anzahlen von unabhängigen Differentialparametern; er klärt auch einen diesbezüglichen Widerspruch auf[125]), der sich für $n = 2$ in Untersuchungen von *A. R. Forsyth*[126]) findet. Ebenfalls für $n = 2$ und für eine willkürliche Funktion U geben *J. Knoblauch*[127]) und *K. Żorawsky*[128]) die Anzahlen der unabhängigen Differentialinvarianten und Differentialkovarianten (= Differentialparametern). Letzterer dehnt dann noch[129]) seine Untersuchungen auf beliebiges n aus und erhält dieselben Anzahlen wie *Haskins*. Das vollständige System m^{ter} Ordnung für zwei binäre Differentialformen ist ebenfalls von *Żorawski* gegeben worden.[130])

26. Formale Methoden. So weittragend der durch den Reduktionssatz (Nr. 22) gegebene Zusammenhang zwischen Differentialinvarianten und projektiven Invarianten auch ist, so gelang es bisher noch nicht in befriedigender Weise, die harmonische und der Materie vollkommen angepaßte symbolische Methode der projektiven Invariantentheorie auf Differentialinvarianten zu übertragen.[131]) So wie diese Dinge bisher hauptsächlich geometrischen und physikalischen Anwendungen nutzbar gemacht wurden, kommt man mit Beibehaltung der Indizes (Hoch- und Tiefstand, vgl. Nr. **11**) und Verwendung des üblichen Summenzeichens vollständig aus.[132])

Von den bisher gemachten Ansätzen zu einem symbolischen Kalkül erwähnen wir die folgenden[133]):

G. Ricci und *Levi-Civita*[134]) bezeichnen die kovariante Ableitung eines Tensors $a_{i_1 \dots i_m}$ mit $a_{i_1 \dots i_m i_{m+1}}$, hängen also einfach den Index

123) Vgl. ferner *H. Maschke*, Trans. Am. math. Soc. 7 (1906), p. 69—93.

124) Trans. Am. math. Soc. 5 (1904), p. 167—192.

125) Trans. Am. math. Soc. 7 (1906), p. 588—590.

126) Rend. di Palermo 21 (1906), p. 115—224.

127) J. f. Math. 131 (1906), p. 247—264; Leipzig. Ber. 59 (1907), p. 372—377.

128) Leipzig. Ber. 59 (1907), p. 160—186.

129) Ebenda 60 (1908), p. 20—52.

130) Ebenda 61 (1909), p. 3—30.

131) In der Tensor*algebra* ist dies natürlich ohne weiteres möglich und auch in der Literatur oft angewendet worden.

132) *A. Einstein* läßt auch das Summenzeichen weg. Ebenso *H. Weyl*.

133) Man vgl. hierzu *G. Hessenberg*, Acta Math. 23 (1899), p. 121—170 und Math. Ann. 78 (1917), p. 187—217, § 4. Ferner die Zusammenstellung bei *J. E. Wright*, l. c. (Einleitung) und *J. A. Schouten*, Verhandl. Amsterdam, 1. Sektion, XII, 6 (1918), p. 1—95.

134) Math. Ann. 54 (1901), p. 125—201; *T. Levi-Civita*, Rend. di Palermo 42 (1917).

an, der die Differentiation nach $x_{i_{m+1}}$ anzeigt. Diese Darstellung versagt schon bei gemischten Tensoren und solchen, die durch Produktbildung oder Verjüngung entstanden sind.

G. Hessenberg[133]) kleidet die Theorie bei Zugrundelegung des *Graßmann*schen Begriffes der extensiven Größe in vektor-analytisches Gewand. Seine Grundlage bildet, ebenso wie bei *Levi-Civita*, die Affinverschiebung eines Vektors, was auf eine geometrische Deutung der *Lagrange*schen Gleichungen hinauskommt. Hierbei ergibt sich eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des Begriffes der kovarianten Ableitungen, zu deren Definition n^2 lineare Differentialformen db_{ik}, der sogenannte „Orientierungstensor" verwendet werden. Sind diese db_{ik} exakte Differentiale, so erhält man die gewöhnliche Theorie.

H. Maschke[135]) und *J. A. Schouten*[133]) verwenden eine Symbolik, die derjenigen der projektiven Invariantentheorie noch am nächsten kommt. *Maschke* setzt z. B. $\varphi = \sum a_{ik}dx_i dx_k = (df)^2$, wo f eine „symbolische" Funktion („idealer" Vektor bei *Schouten*) ist, die selbst und ebenso ihre Ableitungen für sich allein keinen Sinn haben. Erst Produkte haben einen solchen. So wird z. B. $f_i f_k = a_{ik}$, $f_{ik} f_m = \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}$ usw.

Im Anschlusse an *H. Maschke* haben dann *L. Ingoldt*[136]) und *J. B. Shaw*[137]) mit Verwendung von Begriffsbildungen der Ausdehnungslehre einen Kalkül ausgearbeitet.

Ferner stammt, ebenfalls bei Verwendung *Graßmann*scher Begriffe, eine Systematik des hier behandelten Gegenstandes von *F. Jung*.[138])

27. **Spezielle Differentialformen.** Von den überaus zahlreichen Fällen, in denen spezielle Differentialformen und Differentialinvarianten in der Analysis auftreten, heben wir die folgenden hervor.

Betreffs linearer Differentialformen genüge der Hinweis auf das *Pfaff*sche Problem (vgl. Nr. **14**). Wenn eine quadratische Differentialform f die besondere Gestalt

$$f = \sum dx_i^2 \tag{137}$$

hat, so werden die kovarianten Ableitungen eines Tensors 1. Stufe a_i durch die gewöhnlichen Ableitungen $\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ gegeben. Der 1. Differentialparameter $\Delta_1(U)$ geht über in

$$\Delta_1(U) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 \tag{138}$$

135) Trans. Am. math. Soc. 1 (1900), p. 197—204 und ebenda 4 (1903), p. 445—469.

136) Trans. Am. math. Soc. 11 (1910), p. 449—474.

137) Am. J. 35 (1913), p. 394—406.

138) Wien. Ber. 119 (1910), p. 377—392 und ebenda 126 (1917). p. 1438—1488.

und der 2. Differentialparameter $\Delta_2(U)$ in den *Laplace*schen Differentialausdruck

$$\Delta_2(U) = \sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}. \tag{139}$$

An den Spezialfall (137) schließt sich eine wiederholt behandelte Transformationsaufgabe an: Den *Laplace*schen Δ_2-Ausdruck (139) auf beliebige Koordinaten x' zu transformieren. Schon *Jacobi*[139]) führt an, daß es hierzu genügt, die Transformierte f' von $f = \sum dx_i^2$, d. h. also die Koeffizienten $g'_{ik}(x')$ zu kennen; doch der von ihm angegebene Umweg über ein mehrfaches Integral[140]) bringt etwas Fremdartiges in die Theorie. Ohne Benutzung eines Variationsproblems verfährt *Lamé*.[141])

Allgemeiner geht *S. Gundelfinger*[142]) vor. *R. Lipschitz*[143]) transformiert $\sum dx_i^2$ auf elliptische Koordinaten im R_n. *F. Schur*[144]) behandelt spezielle quadratische Differentialformen, denen ein konstantes Krümmungsmaß entspricht. Er erörtert die Frage, wann f durch Hinzunahme neuer Veränderlicher auf eine Differentialform $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2 + \cdots + dx_{n+k}^2$ transformierbar ist, und gibt geometrische Anwendungen.

Am ausführlichsten ist bisher der Fall $n = 2$, $p = 2$ behandelt: die Flächentheorie wird von der Theorie binärer quadratischer Differentialformen beherrscht.

G. Koenigs[145]) behandelt ternäre quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante; ferner spezielle Differentialformen, die bei der Berührung von Flächen eine Rolle spielen.[146])

H. de la Goupillière[147]) gibt Resultate über wiederholte Anwendung des 2. Differentialparameters Δ_2 auf spezielle Funktionen.

F. Engel[148]) behandelt lineare Differentialausdrücke

$$ds = w(x, y, y', \ldots) dx$$

---

139) Berlin. Ber. 1839; J. f. Math. 36 (1848), p. 119.

140) Vgl. etwa *H. Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik I (1900), p. 94.

141) Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859; vgl. auch *Fr. Meyer*, Math. Ann. 26 (1886), p. 509—515.

142) J. f. Math. 85 (1878), p. 295—303.

143) Ebenda 74 (1872), p. 150—171.

144) Math. Ann. 27 (1886), p. 163—176; *R. Beez*, Ztschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 379; *Beltrami*, Werke I, p. 406.

145) Paris C. R. 100 (1885), p. 789—791.

146) Ebenda 104 (1887), p. 673 u. 842; Acta math. 10 (1887), p. 313.

147) Paris C. R. 101 (1885), p. 18—19.

148) Jahresb. D. Math.-Ver. 19 (1910), p. 112—120, 306—316. Vgl. hierzu auch Anmerk. 23).

mit einer einzigen unabhängigen Veränderlichen und gibt hierzu kovariante infinitesimale Berührungstransformationen an, deren eingliedrige Bahnkurven die Extremalen des zum Integranden $\omega(x, y, y', \ldots)$ gehörigen Variationsproblems liefern.

28. **Formale Variationsrechnung und Differentialinvarianten.**[149]) Die Erzeugung aller Differentialinvarianten und die Ableitung der Hauptsätze läßt sich am einheitlichsten mit den formalen Methoden der Variationsrechnung durchführen. Dieses Prinzip geht auf *Riemann*[78]) zurück und hat seine hauptsächlichste formentheoretische Durchbildung durch *Lipschitz*[73]) erfahren.

Geht man aus von dem zu einer homogenen Form $f(dx)$ — wo $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial dx_i \partial dx_k}\right| \neq 0$ sei — gehörigen Variationsproblem:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f(x')\,dt = 0, \qquad \left(x_i' = \frac{dx_i}{dt}\right) \tag{140}$$

so wird man durch partielle Integration zu dem invarianten Gleichungssystem geführt:

$$2\psi_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i'} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

wo die *Lagrange*schen Ausdrücke ψ_i zu den dx kontragredient sind. Dies zeigt sich formal am einfachsten, wenn man die ψ_i durch die der partiellen Integration entsprechende integralfreie formale Identität definiert (*Lagrange*sche Zentralgleichung[150]))

$$\delta f - df_\delta = -2\sum \psi_i(d, d)\,\delta x_i, \qquad \left(f_\delta = \sum \frac{\partial f}{\partial dx_i}\delta x_i\right)$$

wo sowohl f wie df_δ Invarianten sind, und folglich auch die rechte Seite. Speziell für eine quadratische Form kommt:

$$\delta \sum g_{ik}\,dx_i dx_k - 2d\sum g_{ik}\,dx_i \delta x_k = -2\sum \psi_\mu(d, d)\,\delta x_\mu.$$

Ersetzt man hier d durch das kogrediente $(d + \lambda\delta)$ und vergleicht die Potenzen in λ, so kommt das entsprechende System von Identitäten:

$$\left\{\begin{aligned} &D\sum g_{ik}\,dx_i dx_k - 2d\sum g_{ik}\,dx_i Dx_k = -2\sum \psi_\mu(d, d)\,Dx_\mu \\ &D\sum g_{ik}\,dx_i \delta x_k - \delta\sum g_{ik}\,dx_i Dx_k \\ &\qquad - d\sum g_{ik}\,\delta x_i Dx_k = -2\sum \psi_\mu(d, \delta)\,Dx_\mu \\ &D\sum g_{ik}\,\delta x_i \delta x_k - 2\delta\sum g_{ik}\,\delta x_i Dx_k = -2\sum \psi_\mu(\delta, \delta)\,Dx_\mu, \end{aligned}\right. \tag{141}$$

woraus $\psi_\mu(d, \delta)$, also speziell auch $\psi_\mu(d, d)$ und $\psi_\mu(\delta, \delta)$ sich als

149) Diese Nr. rührt von *E. Noether* her.

150) Die Bezeichnung rührt für spezielles f von *Heun* her; vgl. dessen Artikel IV, 1 II, p. 447.

kontragrediente Vektoren ergeben. Aus (141) berechnet sich $\psi_\mu(d, \delta)$ zu

$$\psi_\mu(d, \delta) = \sum g_{i\mu}\, d\delta x_i + \sum \begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix} dx_i \delta x_k,$$

und daraus ergibt sich der kogrediente Vektor:

$$(142) \qquad p^\sigma(d, \delta) = \sum g^{\sigma\mu} \psi_\mu = d\delta x_\sigma + \sum \begin{Bmatrix} ik \\ \sigma \end{Bmatrix} dx_i \delta x_k.$$

$p^\sigma(d, d) = 0$ gesetzt stellt ersichtlich die Gleichungen der geodätischen Linien dar.

Die Kenntnis des kogredienten Vektors $p^\sigma(d, \delta)$ führt direkt zur *kovarianten Ableitung* (vgl. Nr. **19**). Ist etwa $h(d, \delta)$ eine Form der beiden Reihen dx und δx, so wird der Ausdruck

$$(143) \quad h^{(1)}(dx, \delta x) = \delta h - \sum \frac{\partial h}{\partial dx_\sigma} p^\sigma(d, \delta) - \sum \frac{\partial h}{\partial \delta x_\sigma} p^\sigma(\delta, \delta)$$

als Differenz von Invarianten selbst eine Invariante, die so gebildet ist, daß die zweiten Differentiale sich wegheben. $h^{(1)}(dx, \delta x)$ stellt also eine Form mit nur ersten Differentialen dar, die kovariante Ableitung von h. Entsprechendes gilt, wenn h mehr Reihen $d^{(1)}x, \ldots, d^{(\lambda)}x$ enthält.[151])

Auf demselben Prinzip beruht die Bildung der *Krümmungsform* bei *Riemann* und *Lipschitz*. Man geht von $\delta^2 f$ über zu der „Normalform der zweiten Variation"

$$(144) \quad \Omega = \delta^2 \sum g_{ik}\, dx_i dx_k - 2\, d\delta \sum g_{ik}\, dx_i \delta x_k + d^2 \sum g_{ik}\, \delta x_i \delta x_k,$$

die als Aggregat von Invarianten selbst wieder eine Invariante darstellt, und bei der jetzt, in Verallgemeinerung der *Lagrange*schen Zentralgleichung, die dritten Differentiale eliminiert sind. Die Elimination der zweiten Differentiale geschieht in Analogie mit der kovarianten Ableitung durch Bildung der Differenz

$$(145) \quad K = \Omega - 2 \sum \{ p^\sigma(d, \delta)\, \psi_\sigma(d, \delta) - p^\sigma(\delta, \delta)\, \psi_\sigma(d, d) \},$$

was sich auch schreiben läßt als[152])

$$(146) \quad \tfrac{1}{2} K = d \sum \psi_\sigma(d, \delta)\, \delta x_\sigma - \delta \sum \psi_\sigma(d, d)\, \delta x_\sigma$$
$$- \sum \{ p^\sigma(d, \delta) \psi_\sigma(d, \delta) - p^\sigma(\delta, \delta) \psi_\sigma(d, d) \}.$$

Das Bildungsgesetz von K läßt sich auch so aussprechen, daß in Ω durch Nullsetzen von $p(d, \delta)$ und $p(\delta, \delta)$ — bzw. der rechten Seiten von (141) — die zweiten Differentiale eliminiert werden. Das ist die Definition der Krümmungsform durch *Riemann* (vgl. Nr. **21**), wobei aber ausdrücklich zu bemerken ist — was (146) besonders deutlich zeigt —, daß erst nach erfolgter Differentiation dies Null-

151) *Lipschitz*, J. f. Math. 72 (1870), p. 17.

152) *Lipschitz*, J. f. Math. 82 (1876), § 1.

setzen geschehen darf; die formale Bildungsweise von *Lipschitz* umgeht diese Schwierigkeit. Entsprechend ließe sich auch die kovariante Ableitung $h^{(1)}$ (143) dadurch definieren, daß in δh die zweiten Differentiale durch Nullsetzen von $p(d, \delta) \ldots$ eliminiert sind.

Aus der Krümmungsform ergibt sich durch sukzessive Bildung der kovarianten Ableitungen eine Formenreihe [Φ_4, $\Phi_5, \ldots$ bei *Christoffel*], deren projektive Invarianten nach Zufügung von f nach *Christoffel* und *Ricci* die Gesamtheit der Differentialinvarianten der quadratischen Form erschöpfen, und deren Äquivalenz gegenüber linearen Transformationen ohne weitere Integrabilitätsbedingung die Äquivalenz zweier quadratischer Differentialformen aussagt (vgl. Nr. 22). Der innere Grund dieses Reduktionssatzes beruht auf der Existenz der aus dem *Variationsproblem* (140) entspringenden *Riemann*schen Normalkoordinaten (vgl. Nr. 20), welche die durch einen Punkt laufenden geodätischen Linien in Gerade transformieren, und sich folglich bei beliebiger Transformation der x linear transformieren. Die Bildung aller Invarianten und die Äquivalenzfrage sind daher zurückgeführt auf die entsprechende Frage für die einzelnen homogenen Bestandteile in der Entwicklung von f nach Normalkoordinaten, und man zeigt, daß diese Bestandteile sich aus f, Φ_4, Φ_5, ... linear zusammensetzen. Für quadratische Formen ist das im einzelnen bei *Vermeil*[92]) durchgeführt, in Anlehnung an eine Note von *E. Noether*[93]). Nach dieser Note bleiben Sätze und Methoden bei Zugrundelegung eines beliebigen Differentialausdruckes erhalten (vgl. Nr. 22 u. 23); es zeigt sich somit die Tragweite der Methoden der formalen Variationsrechnung gegenüber denjenigen der reinen Eliminationstheorie.[153]).

Das Nullsetzen von $p(d, \delta)$ hat *Levi-Cività*[134]) geometrisch gedeutet als „Parallelverschiebung eines Vektors" (vgl. auch *Hessenberg*[133])). Dieser von *Weyl* axiomatisch gefaßte Begriff ist im wesentlichen auf quadratische Formen beschränkt, läßt aber eine Verallgemeinerung anderer Art zu. Er bleibt bei Erweiterung der Gruppe (Multiplikation der g_{ik} mit willkürlicher Funktion) erhalten, sobald außer der quadratischen noch eine Linearform zugrunde gelegt wird. $p(d, \delta)$ ist dann eindeutig bestimmt, und es lassen sich Invariantenbildungen entsprechend den obigen durchführen und geodätische Koordinaten definieren; $p(d, d) = 0$ entspringt aber jetzt nicht mehr aus einem Variationsproblem[154]). Fragen nach Reduktionssatz und Äqui-

153) Vgl. zu diesen Ausführungen und für weitere geometrische Deutungen die unter „Literatur" angegebenen Seminarvorträge von *F. Klein*.

154) *H. Weyl*, Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 384 bis 411 und Raum, Zeit, Materie (3. u. 4. Aufl.).

valenz sind hier noch nicht allgemein angegriffen; nur für Invarianten niedrigster Ordnung hat *R. Weitzenböck* einen Reduktionssatz gegeben.[155])

Schließlich sei hingewiesen auf die allgemeinen „invarianten Variationsprobleme", d. h. auf solche, bei denen das (einfache oder mehrfache) Integral J invariant ist gegenüber irgendeiner Gruppe im *Lie*schen Sinne. Mit speziellen, physikalisch interessanten Fällen beschäftigen sich Arbeiten von *Hamel*[156]), *Herglotz*[157]), *Lorentz*[158]), *Fokker*[159]), *Weyl*[160]) und *Klein*[161]). Die prinzipielle Fassung bei *E. Noether*[162]) zeigt, daß der Invarianz von J gegenüber einer G_ϱ (endliche Gruppe mit ϱ wesentlichen Parametern) ϱ linear-unabhängige Divergenzen entsprechen; der Invarianz gegenüber einer unendlichen Gruppe, die ϱ willkürliche Funktionen bis zur σ^{ten} Ableitung enthält, entsprechen ϱ Abhängigkeiten zwischen den *Lagrange*schen Ausdrücken und ihren Ableitungen bis zur σ^{ten} Ordnung. In beiden Fällen gilt die Umkehrung. Da die *Lagrange*schen Ausdrücke (relative) Invarianten der Gruppe werden, hat man zugleich einen Invarianten erzeugenden Prozeß.

155) Wien. Ber. 129 (1920), p. 683 u. 697.
156) Math. Ann. 59 (1904), p. 416—434; Ztschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1—54.
157) Ann. d. Phys. (4) 36 (1911), p. 511, bes. § 9.
158) Verslag der Amsterd. Akad., April, Sept. 1916, Okt. 1916, Mai 1917.
159) Ebenda, Jan. 1917.
160) Ann. d. Phys. (4) 54 (1917), p. 117, § 2.
161) Gött. Nachr. 1917, p. 469—482; ebenda 1918, p. 171—189.
162) Gött. Nachr. 1918, p. 235—257.

(Abgeschlossen im März 1921.)

III D 11. DIFFERENTIALINVARIANTEN IN DER GEOMETRIE. RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN UND IHRE VERALLGEMEINERUNGEN.

VON

L. BERWALD

IN PRAG.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

1. Lehrbücher und Monographien.

(Darstellungen, die ausschließlich die klassische Kurven- und Flächentheorie behandeln, sind nicht aufgenommen.)

B. Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Habilitationsvortrag von 1854), Gött. Abh. 13 (1868), p. 1; wiederabgedruckt: Ges. Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, p. 272. Neu herausgegeben und erläutert von *H. Weyl,* Berlin 1919, 3. Aufl. 1923 („Habilitationsvortrag").

---

*) Die Bearbeitung der Nr. 16a verdankt der Verfasser Herrn *D. J. Struik.*

F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät etc., Erlangen 1872; abgedruckt (mit Zusätzen) in Math. Ann. 43 (1893), p. 6; Math. Abhandlungen I (1921), p. 460. Wegen der Übersetzungen dieser Schrift vgl. III AB 4b, Literatur (*G. Fano*), („Erlanger Programm").

W. Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885 („Raumformen").

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, I, Paris 1887 (2. Aufl. 1914); II 1889 (2. Aufl. 1915); III 1894; IV 1896 („Surfaces").

G. Loria, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, Turin 1887, 3. Aufl. 1907 (Cap. XI). Deutsche Übersetzung der 1. Aufl.:

G. Loria, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie, in ihrer früheren und jetzigen Entwicklung, deutsch von *F. Schütte,* Leipzig 1888.

S. Lie-F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, I, Leipzig 1888; II 1890; III 1893 (*„Lie-Engel"*).

S. Lie-G. Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Leipzig 1893 (*„Lie-Scheffers"*).

W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, I, Paderborn 1893; II 1898 („Grundlagen").

L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1893, 2. Aufl. 3 Bde, 1902; 3. Aufl. I. 1921, II. 1, 1923, II. 2, 1924 („Lezioni"). (Erweiterte Ausgabe der autogr. Vorlesungen von 1886.) Deutsche Bearbeitung:

L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von *M. Lukat,* Leipzig 1899; 2. Aufl. 1910 (*„Bianchi-Lukat"*).

E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Neapel 1896. Deutsche Bearbeitung:

E. Cesàro-G. Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1901 (*„Cesàro-Kowalewski"*).

R. v. Lilienthal, Grundlagen einer Krümmungstheorie der Kurvenscharen, Leipzig 1896.

G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padua 1898 („Superficie").

G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Paris 1898; 2. Aufl. 1910 („Systèmes orthogonaux").

E. Pascal, Repertorio di matematiche superiori (definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici): II. Geometria, Mailand 1900. Deutsche Ausgabe, besorgt von *A. Schepp:*

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur): II. Teil: Die Geometrie, Leipzig 1902 (insbes. Kap. XX f.).

G. Ricci et *T. Levi-Civita,* Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. 54 (1901), p. 125. Neu herausgegeben von *G. Juvet,* Paris 1923.

E. J. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Leipzig 1906 („Differential geometry").

J. E. Wright, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge 1908 („Invariants").

J. L. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry, Oxford 1909 („Non-euclidean geometry").

L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, Pisa 1918 („Gruppi continui").

H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Berlin 1918; 5. Aufl. 1923 („Raum . . .").

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie: I. Elementare Differentialgeometrie, Berlin 1921, 2. Aufl. 1924; II. Affine Differentialgeometrie, Berlin 1923 („Differentialgeometrie").

M. v. Laue, Die Relativitätstheorie: II. Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft, Braunschweig 1921, 2. Aufl. 1924.

T. Levi-Civita, Questions de mecànica clàssica i relativista, Publicacions de l'Institut de ciències, Barcelona 1922 („Questions"). Deutsche Ausgabe:

T. Levi-Civita, Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik, Berlin 1924.

D. J. Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung, Berlin 1922*) („Grundzüge").

G. Juvet, Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu, Paris 1922.

A. S. Eddington, The mathematical theory of relativity, Cambridge 1923, 2. Aufl. 1924 („Math. Theory").

L. P. Eisenhart, Transformations of surfaces, Princeton 1923 („Transformations").

R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Groningen 1923 („Invariantentheorie").

H. Weyl, Anàlisi matemàtic del problema de l'espai, Publicacions de l'Institut de ciències, Barcelona 1923. Deutsche Bearbeitung:

H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923 („Raumproblem").

G. Fubini ed *E. Čech,* Lezioni di geometria proiettivo-differenziale, Bologna 1925 („Geometria proiettivo-differenziale").

T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto (raccolte da *E. Persico*), Rom 1925 („Lezioni").

J. A. Schouten, Der Riccikalkül, Berlin 1924 („Riccikalkül").

J. A. Schouten und *D. J. Struik,* Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen 1924 (Sonderabdruck aus „Christiaan Huygens").

2. Bibliographische Schriften.

G. B. Halstedt, Bibliography of hyperspace and non-euclidean geometry, Amer. J. Math. 1 (1878), p. 262, 284; 2 (1879), p. 65.

V. Schlegel, 1. Über Entwicklung und Stand der n-dimensionalen Geometrie, Leipzig 1886.

2. Sur le développement et de l'état actuel de la géométrie à n dimensions, L'enseignement math. 2 (1900), p. 77.

R. Bonola, Index operum ad geometriam absolutam spectantium in: Joannis Bolyai in memoriam, Libellus post saec. quam Jo. Bolyai de Bolya anno 1802 a. D. Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem... editus, Claudiopoli 1902 (Leipzig 1903).

---

*) Der Verfasser benutzt die Gelegenheit, um an dieser Stelle den Herren *J. A. Schouten* und *D. J. Struik* in Delft für zahlreiche Literaturnachweise namentlich zum Abschnitt B. dieses Referates seinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Herrn *D. J. Struik* ist er auch für eingehende Analysen ihm nicht zugänglicher Arbeiten außerordentlich verpflichtet, beiden Herren für Rat und Hilfe bei der Korrektur. Für wertvolle Bemerkungen zu dieser dankt er ferner den Herren *W. Blaschke, F. Klein, G. Pick, H. Weyl.* Endlich sagt er noch Dank den zahlreichen Fachgenossen, die ihn durch gelegentliche kleinere Mitteilungen oder durch Übersendung schwer zugänglicher Abhandlungen unterstützt haben.

E. Wölffing, Mathematischer Bücherschatz, I. Teil, Leipzig 1903.
D. M. J. Sommerville, Bibliography of non-euclidean geometry, including the theory of parallels, the foundations of geometry and space of n dimensions, London 1911.

Ein ziemlich vollständiges Literaturverzeichnis über mehrdimensionale Differentialgeometrie findet man auch bei *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 168, einige Literaturnachweise in *F. Müller*, Führer durch die mathematische Literatur..., Leipzig und Berlin 1909, bes. p. 216 ff.

Abkürzungen.

Für häufig wiederkehrende Benennungen werden im Folgenden vielfach stereotype Abkürzungen verwendet. Es bedeutet:

V_n eine n-dimensionale *Riemann*sche Mannigfaltigkeit (Nr. 17).

R_n eine n-dimensionale *Euklidische* („ebene") Mannigfaltigkeit, d. i. eine V_n vom *Riemann*schen Krümmungsmaß (Nr. 19) Null.

S_n eine n-dimensionale *nichteuklidische* Mannigfaltigkeit, d. h. eine V_n mit konstantem, von Null verschiedenem *Riemann*schen Krümmungsmaß.

Bei $V_n (n > 2)$ wird, mit nur geringen Abänderungen, die Bezeichnungsweise des absoluten Differentialkalküls von *G. Ricci* [III D 10b, C. (*R. Weitzenböck*)] verwendet. Dabei werden mit *J. A. Schouten* die kontravarianten Koordinaten eines Tensors durch obere, die kovarianten durch untere *griechische* Zeiger bezeichnet, die orthogonalen (Nr. 20) durch *lateinische* Zeiger, die immer unten angehängt werden. Über einen *griechischen* Zeiger, der in einem Gliede eines Ausdruckes einmal unten und einmal oben auftritt, ist (nach *A. Einstein*) stets von 1 bis n zu summieren. Bei *lateinischen* Zeigern werden dagegen die Summenzeichen stets ausdrücklich geschrieben.

1. Vorbemerkungen. Der vorliegende Bericht über Differentialinvarianten in der Geometrie und *Riemann*sche Mannigfaltigkeiten zerfällt in zwei wesentlich verschiedene Teile. Im ersten Teil werden die Untersuchungen besprochen, die Bezug haben auf die Differentialinvarianten geometrischer Gebilde gegenüber den wichtigsten endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Der zweite ist den Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung gewidmet, sowie den Verallgemeinerungen, die der Begriff dieser „*Riemann*schen" Mannigfaltigkeiten in der letzten Zeit erfahren hat.

Bei der Abfassung des ersten Teiles waren folgende Grundsätze maßgebend:

Die allgemeine, der Hauptsache nach von *S. Lie* herrührende Theorie wird gerade nur soweit berührt, als es zum Verständnis der Arbeiten notwendig ist, die sich mit den einzelnen Gruppen beschäftigen. Das Hauptgewicht ist auf den Bericht über diese besonderen

Untersuchungen gelegt. Jedoch werden auch dabei ältere Theorien, namentlich solche, die schon in anderen Referaten besprochen sind, nur ganz kurz behandelt; eingehender also nur jene Gebiete, die sich erst in der letzten Zeit entwickelt haben, wie z. B. die affine und die projektive Differentialgeometrie. Hier werden auch die erschienenen Arbeiten einigermaßen vollständig angeführt, während sonst in der Regel nur die allerwichtigsten Schriften genannt werden.

Eine gewisse Ungleichmäßigkeit der Behandlungsweise, die aus diesen Grundsätzen folgt, wird noch verstärkt durch den Umstand, daß die Differentialgeometrie der einzelnen Gruppen sich in ganz verschiedenen Entwicklungsstadien befindet, sowie auch dadurch, daß die Zeitumstände eine stark beschleunigte Fertigstellung des Referates notwendig machten. Damit mag auch manche sonstige Unvollkommenheit entschuldigt werden.

Die im zweiten Teile behandelte Theorie der *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen ist verhältnismäßig ausführlich dargestellt: insbesondere wurde hier eine möglichst vollständige Berücksichtigung der vorhandenen Literatur angestrebt, wenn auch sicherlich nicht erreicht.

Über die Literaturangaben schließlich noch eine Bemerkung: *Im Texte* wurden grundsätzlich *nur die bis Ende 1922 veröffentlichten Arbeiten* berücksichtigt. Auf später erschienene Abhandlungen konnte, soweit das überhaupt anging, bloß in den Fußnoten hingewiesen werden. Dabei wurden ausschließlich solche *Abhandlungen* berücksichtigt, die vor Ende 1923 erschienen sind oder sich wenigstens im Jahrgang 1923 einer periodischen Publikation befinden. Bei *Lehrbüchern* konnte diese Zeitgrenze nicht eingehalten werden.

A. Differentialinvarianten in der Geometrie der wichtigsten endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen.

I. Allgemeines.

2. Einordnung der Differentialgeometrie in die gruppentheoretische Auffassung der Geometrie. Geometrische Differentialinvarianten. Die Anwendungen, die man von den Differentialinvarianten — dieses Wort hier im allgemeinsten Sinn genommen[1]) — auf Geometrie machen kann, beruhen in letzter Linie auf der von *F. Klein*[2]) entwickelten gruppentheoretischen Auffassung der Geometrie.

1) III D 10b, Nr. 3 (*R. Weitzenböck*).

2) Erlanger Programm. — Vgl. auch III AB 4b (*G. Fano*), namentlich Nr. 1—3.

Wenn eine Mannigfaltigkeit[3]) und in ihr eine Transformationsgruppe gegeben ist, so versteht man unter der Geometrie dieser Mannigfaltigkeit in bezug auf die gegebene Transformationsgruppe die Gesamtheit aller solchen Eigenschaften der in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde, die durch die Transformationen der Gruppe nicht zerstört werden. Die Entwicklung dieser Geometrie bedeutet dann analytisch nichts anderes als die Entwicklung der zur gegebenen Transformationsgruppe gehörigen Invariantentheorie.

In dieser Invariantentheorie ist auch die Theorie der (zur Gruppe gehörigen) Differentialinvarianten enthalten. Aber nur ein Teil davon bildet die analytische Seite der *Differentialgeometrie*[4]) der Gebilde in der gegebenen Mannigfaltigkeit in bezug auf die vorgelegte Transformationsgruppe. In die analytische Darstellung eines (mindestens eindimensionalen) Gebildes[5]) der Mannigfaltigkeit geht nämlich in der Regel eine endliche Anzahl von Größen ein, deren Wahl bis zu einem gewissen Grade willkürlich bleibt und die mit dem Gebilde als solchem nichts zu tun haben. Solche Größen sind in jedem Falle die zur Darstellung des Gebildes verwendeten Parameter[6]); ferner, bei Gebrauch homogener Koordinaten, die willkürliche Funktion der Parameter, mit der die Koordinaten multipliziert werden dürfen usw. Von der Wahl dieser Größen muß auch eine Differentialinvariante unabhängig sein, wenn ihr eine geometrische Bedeutung zukommen soll; d. h., sie muß nicht nur eine (relative oder absolute) Differentialinvariante gegenüber der gegebenen Transformationsgruppe sein, sondern auch gegenüber der unendlichen Gruppe aller zulässigen Parametersubstitutionen, bei Anwendung homogener Koordinaten auch gegenüber der unendlichen Gruppe, die durch Multiplikation der Koordinaten des Gebildes mit einer willkürlichen Funktion der Parameter erzeugt wird usw. Eine derartige Differentialinvariante nennen wir eine *geometrische Differentialinvariante.*[7])

Eine *absolute* geometrische Differentialinvariante stellt ein Merkmal des Gebildes in der Geometrie dar, die durch die zugrunde ge-

---

3) III AB 1, Nr. 15 (*F. Enriques*); III AB 4a, Nr. 28 (*G. Fano*). — Im Abschnitt A kommt als Mannigfaltigkeit fast durchweg der n-dimensionale ebene Raum in Betracht ($n \geq 2$).

4) III AB 4a, Nr. 34 ff. (*G. Fano*).

5) Gebilde, die nur aus einer diskreten Anzahl von Elementen bestehen, sind hier von der Betrachtung ausgeschlossen.

6) Bei einem p-dimensionalen Gebilde ist die Anzahl der unabhängigen Parameter, die in seine Darstellung eingehen, gleich p.

7) Vgl. III D 10b, Nr. 8 (*R. Weitzenböck*).

legte Gruppe gekennzeichnet wird. Im Gegensatze dazu kommt einer *relativen* an und für sich keine geometrische Bedeutung zu; erst die Gleichung, die entsteht, wenn man sie gleich Null setzt, besitzt eine solche.

In den folgenden Abschnitten wird das Wort *Differentialinvariante* immer in der besonderen Bedeutung einer absoluten geometrischen Differentialinvariante gebraucht, die nur von den Koordinaten des Gebildes in der Mannigfaltigkeit und deren Ableitungen nach den Parametern abhängt, nicht aber von den Differentialen der Koordinaten. Für eine absolute geometrische Differentialinvariante, in die auch diese Differentiale eingehen, gebrauchen wir im folgenden immer das Wort *Differentialform.*

Gelegentlich gebrauchen wir auch für die in einer Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde den Ausdruck *Mannigfaltigkeiten.*

3. Äquivalenzprobleme. Es sei wieder eine — n-dimensionale — Mannigfaltigkeit gegeben, deren Elemente wir *Punkte* nennen wollen, und in ihr eine endliche kontinuierliche Transformationsgruppe G. Ferner betrachten wir in der Mannigfaltigkeit Gebilde, die Örter von ∞^k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ Punkten sind.[8]) Es entstehen dann die beiden folgenden miteinander verwandten grundlegenden Probleme:

1. Ein solches Gebilde durch eine endliche Anzahl von Differentialinvarianten bzw. Differentialformen bis auf eine beliebige Transformation von G zu kennzeichnen.[9])
2. Die notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür anzugeben, daß zwei Gebilde von gleicher Dimensionenzahl durch mindestens eine Transformation von G ineinander übergeführt werden können.

   S. Lie, von dem dieses *Äquivalenzproblem* herrührt, hat gezeigt, daß die Anzahl der Kriterien für die Äquivalenz zweier Gebilde immer endlich ist.[10])

Im allgemeinen zerfallen die Gebilde von gleicher Dimensionenzahl in mehrere Klassen, für deren jede die angegebenen Probleme besonders gelöst werden müssen. Anzahl und Umfang dieser Klassen

8) Die Gebilde werden im folgenden stets als regulär-analytisch vorausgesetzt. Wir beschränken uns ferner auf die Umgebung eines Punktes des Gebildes, der keine Besonderheit gegenüber G aufweist.

9) Zwei Gebilde, die durch eine Transformation von G ineinander übergeführt werden können, werden dabei als identisch angesehen.

10) Vgl. die Darstellung bei *Lie-Scheffers,* Kap. 23, § 4. — Der Satz bleibt richtig, wenn G eine unendliche Gruppe im Sinne von *Lie* ist; vgl. etwa *S. Lie,* Leipz. Ber. 43 (1891). p. 316, 353.

können ganz verschieden sein, je nachdem man sich auf das reelle Gebiet beschränkt oder nicht.

Wir wollen hier nicht allgemein erörtern, wie sich diese Probleme mittels der *Lie*schen Theorie der Differentialinvarianten in Angriff nehmen lassen[10]), sondern uns darauf beschränken, den speziellen Fall der Kurven in der Ebene[11]) zu besprechen, der von *G. Pick*[11a]) und neuerdings wieder von *G. Kowalewski* behandelt worden ist.[12])

Wir betrachten demnach in der Ebene eine r-gliedrige endliche kontinuierliche Gruppe G, von der wir auch noch annehmen, daß sie die Punkte (x, y) der Ebene transitiv vertauscht. Eine Kurve $y = y(x)$ der Ebene besitzt dann ein bei den Transformationen von G invariantes Differential von niedrigster Ordnung

$$(1) \qquad d\sigma = K(x, y, y', y'', \ldots)\, dx, \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx} \text{ usw.}\right),$$

das *Bogenelement* der Gruppe.[12a]) Abgesehen von gewissen Gruppen[13]) und nach Ausschluß der durch $K = 0$ charakterisierten Kurven

---

11) *S. Lie,* Archiv for Math. og Nat. 8 (1883), p. 187 = Math. Ann. 22 (1888), p. 213 hat die endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene auf *Normalformen* zurückgeführt und für diese die niedrigsten invarianten Differentialgleichungen und die Differentialinvarianten bestimmt. *F. Engel* u. *F. Schwanhäusser,* Leipz. Ber. 74 (1922), p. 43 lösen die gleiche Aufgabe für alle Gruppen, die zu einigen dieser Normalformen durch Punkttransformation ähnlich sind, aus den Definitionsgleichungen des betr. Gruppentypus.

11a) *G. Pick,* Wien. Ber. 115 (1906), p. 139. Die Bedeutung dieser Abhandlung besteht u. a. darin, daß sie, für Kurven in der Ebene, die Methoden, die namentlich *E. Cesàro* unter dem Namen „*Natürliche Geometrie* (*geometria intrinseca*)" für die Gruppen der euklidischen und nicht-euklidischen Bewegungen entwickelt hat, auf den Fall beliebiger kontinuierlichen r-gliedrigen Transformationsgruppen überträgt, die in den Elementen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung transitiv sind. S. auch *G. Kowalewski*[12]). — Über die *natürliche Geometrie* vgl. III AB 4b, Nr. **38b** (*G. Fano*), III AB 7, Nr. **34** (*E. Müller*), III D 4 (*G. Scheffers*), mehrfach, sowie im folgenden Fußnote [38]) und [51]). Außerdem: *Cesàro-Kowalewski* sowie *L. Braude,* Le coordonnées intrinsèques, Paris 1914.

12) Das folgende ist der Hauptsache nach ein Bericht über: *G. Pick,* Wien. Ber. 115 (1906), p. 139; *G. Kowalewski,* Paris C. R. 158 (1914), p. 554; Leipz. Ber. 73 (1921), p. 311; 74 (1922), p. 61, 84; *G. Kowalewski* und *A. Weizsaecker,* Sitzgsb. Böhm. Ges. Prag 1919, 3. Abh. Anwendungen bei *E. Nohel,* Wien. Ber. 123 (1914), p. 2085; *J. Fuhrich,* Mitt. Math. Sem. Gießen 1, VI. Abh. (1922). — Neuere Arbeiten von *G. Kowalewski* über Gruppen von Punkt- und Berührungstransformationen der Ebene: Leipz. Ber. 75 (1923), p. 15, 81, 86; Math. Ztschr. 18 (1923), p. 307.

12a) Diese Bogenelemente hat für die ebenen Gruppen (und für einige räumliche) *C. Heineck,* Diss. Leipzig 1899, bestimmt.

13) derjenigen, deren Bogenelement integrabel ist und integriert eine Invariante der Gruppe liefert. *G. Pick,* a. a. O.[11a]).

ist $d\sigma$ bis auf einen Zahlenfaktor und eine etwa in K eingehende Irrationalität bestimmt und gibt integriert einen gegenüber G invarianten Parameter, den *Bogen* oder *natürlichen Parameter* der Kurve gegenüber G. Außerdem hat die Kurve gegenüber G eine einzige *wesentliche*[14]) Differentialinvariante I, deren Ordnung o entweder $r-1$ oder $r-2$ ist, und die durch bloße Quadraturen gefunden werden kann.[15]) Die Operation $\frac{d}{d\sigma}$ ist der einzige wesentliche Differentialparameter der Kurve gegenüber G, d. h. jede analytische Differentialinvariante m^{ter} oder niedrigerer Ordnung der Kurve bei G ist eine analytische Funktion von $J, \frac{dJ}{d\sigma}, \ldots, \frac{d^{m-o}J}{d\sigma^{m-o}}$. Durch die Gleichung

$$(2) \qquad I = I(\sigma),$$

die *natürliche Gleichung* der Kurve gegenüber G, ist die Kurve bis auf eine beliebige Transformation von G bestimmt.[16]) Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Äquivalenz zweier Kurven von den natürlichen Gleichungen $I = I(\sigma)$ und $I_1 = I_1(\sigma_1)$ bei G können durch Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad \sigma_1 = \varepsilon\sigma + k, \quad J_1(\sigma_1) = J(\sigma)$$

ausgedrückt werden, in denen k eine willkürliche Konstante bedeutet, ε dagegen entweder die Einheit oder eine Einheitswurzel, die sich aus der etwa in K eingehenden Irrationalität bestimmt.

In ähnlicher, nur etwas verwickelterer Weise läßt sich auch der Fall der Kurven im R_n $(n \geqq 3)$ und allgemeiner in einer höheren Mannigfaltigkeit überhaupt behandeln.

Bei einem k-dimensionalen Gebilde $(2 \leqq k \leqq n-1)$ in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, z. B. bei den Flächen im R_3, löst man das erste Problem gewöhnlich in der Weise, daß man ein System von endlich vielen bei der Gruppe G absolut-invarianten Differentialformen aufstellt[17]), durch welches das Gebilde bis auf eine beliebige

14) Vgl. III D 10b), Nr. 6 (*R. Weitzenböck*).

15) *G. Kowalewski*, Leipz. Ber. 73 (1921), p. 320; 74 (1922), p. 61. — Läßt man die Voraussetzung der Transitivität fallen, so kann auch $o = 0$ sein und es gibt drei Ausnahmetypen, bei denen die Bestimmung von I die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung erfordert. Die transitiven Gruppen mit $o = r - 2$ lassen sich stets auf eine solche Form bringen, daß $I = y^{(r-2)}$ ist.

16) *G. Kowalewski*, Leipz. Ber. 73 (1921), p. 324. — Die natürliche Gleichung $I =$ konst. kennzeichnet insbesondere die Kurven der betrachteten Art, die eine kontinuierliche eingliedrige Untergruppe von G gestatten.

17) Ein solches System braucht nicht immer zu existieren, wie aus dem Beispiel der windschiefen Regelflächen im R_3 bei der Gruppe der nicht-singulären Kollineationen ersichtlich ist (Nr. 12).

Transformation von G bestimmt ist. Beispiele dafür werden wir noch kennen lernen.

II. Metrische Differentialgeometrie.

Unter metrischer Differentialgeometrie verstehen wir hier die Differentialgeometrie der *Bewegungsgruppe* einer n-dimensionalen euklidischen Mannigfaltigkeit R_n $(n \geqq 2)$. Für die Differentialgeometrie der Gruppe der Ähnlichkeiten (*äquiforme* D.) des R_n liegt noch keine systematische Darstellung vor.[18])

4. Metrische Differentialgeometrie der Kurven. Die metrische Differentialgeometrie der *krummen Linien in der Ebene* und der *regulären Kurven im* R_3[19]) ist in III D 1, 2 (*H. v. Mangoldt*) ausführlich dargestellt.[20]) Hier sei nur bemerkt, daß *D. Seiliger*[21]) und *W. Blaschke*[21])

---

18) Das *äquiforme Bogenelement* einer krummen Linie ist mit dem *Kontingenzwinkel* identisch. Die wesentliche äquiforme Differentialinvariante einer ebenen krummen Linie, die *Deviation* [III D 1. 2, Nr. **18** (*H. v. Mangoldt*)], tritt schon bei *L. N. M. Carnot,* Géométrie de position, Paris 1803, p. 477 ff. auf [vgl. *K. Carda,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 28 (1919), p. 78], ihr reziproker Wert bei *A. M. Ampère,* J. Éc. Polyt. 7, cah. 14 (1808), p 159. Der Name stammt von *A. Transon,* J. de math. 6 (1841), p. 191. Vgl. auch [84]).

19) Im folgenden ist: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ der Vektor des Kurvenpunktes im R_n (Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$); $\dot{\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \ldots, \overset{(k)}{\mathfrak{x}} = \frac{d^k\mathfrak{x}}{dt^k}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $\overset{(k)}{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{z}$ das innere Produkt der Vektoren $\overset{(k)}{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{z}$; $\overset{(k)}{\mathfrak{x}}{}^2 = \overset{(k)}{\mathfrak{x}} \cdot \overset{(k)}{\mathfrak{x}}$. — Eine Kurve im R_n heißt *regulär,* wenn die Summen der Quadrate aller Minoren k^{ter} Ordnung $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ der Matrix $\begin{Vmatrix} \dot{x}_1 & \cdots & \dot{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(k)}{x}_1 & \cdots & \overset{(k)}{x}_n \end{Vmatrix}$ sämtlich von Null verschieden sind.

20) Namentlich III D 1. 2, Nr. **14**, **15**, **29**—**32**. — Wegen einer Erweiterung der Krümmungstheorie der regulären Kurven mit einem Einheitsvektor beliebiger Richtung an Stelle des Tangentenvektors vgl. *K. Żorawski*, Prace mat.-fis. 17 (1906), p. 41; *N. Hatzidakis*, Ann. Univ. Athen 1906, p. 349 (griech.); Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 19 (1910), p. 267; Proc. 5. Intern. Congr. Cambridge 1912, v. 2 (1914), p. 138; *B. Arndt,* Diss. Königsberg 1908; Monatsh. Math. Phys. 20 (1909), p. 343; *W. Fr. Meyer,* J. f. Math. 139 (1910), p. 106; Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 19 (1910), p. 160; 22 (1913), p. 71; Über die Theorie benachbarter Geraden . . ., Leipzig 1911; *E. Rath,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 19 (1910), p. 269; *A. Löwenherz,* Diss. Königsberg 1911; *B. Bluhm,* Diss. Königsberg 1911. Die Begriffsbildung geht z. T. auf *L. Aoust* und *Ph. Gilbert* zurück; vgl. III D 3, Nr. **31** (*R. v. Lilienthal*). — Ein verwandter Begriff ist die *„curvatura intermedia o mista relativa a“* V_n *„delle due congruenze“*: *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (5) 11 I (1902), p. 355. Vgl. auch *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 77, 107, sowie *H. Kashiwagi,* Mem. Coll. Sc. Kyoto 6 (1923), p. 221. — S. noch: *L. Bianchi,* Napoli Rend. 28 (1922), p. 150.

21) *D. Seiliger,* Kasan Univ. 1897, Nr. 12, p. 93 (russ.); *W. Blaschke,* Differentialgeometrie I, §§ 104, 105. — Sonst vgl. zur metrischen Theorie der Regel-

auf Grund eines liniengeometrischen Übertragungsprinzipes[22]) auch die metrische Differentialgeometrie der *geradlinigen Flächen im* R_3 ganz entsprechend behandelt haben.

Eine *reguläre Kurve im* R_n $(n > 3)$ hat einen analog wie für Kurven im R_3 erklärten *Bogen* und $n - 1$ *Krümmungen.* Auch läßt sich in jedem Punkte der Kurve ein bewegungsinvariant mit ihr verbundenes n-Bein[22a]) von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren erklären, das dem Dreibein: Tangenten-, Hauptnormalen-, Binormaleneinheitsvektor im R_3 entspricht (*begleitendes n-Bein*). Für die Ableitungen der Vektoren dieses n-Beines nach dem Bogen gelten Formeln, die den *Frenet*schen Formeln im R_3 analog sind.[23]) Die metrische Differentialgeometrie der regulären Kurven im R_n ist schon ziemlich entwickelt.[24])

---

flächen namentlich: *X. Antomari*, Thèse, Paris 1894; *K. Zindler,* Liniengeometrie ..., 2. Bd., Leipzig 1906, p. 20ff.; *W. Blaschke,* Monatsh. Math. Phys. 21 (1910), p. 213 f.

22) Vgl. *E. Study,* Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, insb. p. 185, 207f.

22a) Unter einem *n-Bein* verstehen wir die Figur von n Vektoren, die von einem Punkt ausgehen, wie *G. Hessenberg,* Math. Ann. 78 (1917), p. 194 und vorher *E. Waelsch* [*Binäranalyse,* vgl. III D 10 a), Nr. 18 (*R. Weitzenböck*)]. Bei *Waelsch* sind die n Vektoren zunächst beliebig, können aber in den in Betracht kommenden Gebieten durch gleichlange derselben Richtungen ersetzt werden. — Zu einem *Polsystem Maxwells* (Elektrizität und Magnetismus I, Kap. IX), das aus n Punkten einer Kugelfläche besteht, gehört ein solches *n-Bein*, dessen Vektoren vom Mittelpunkt nach diesen n Punkten gerichtet sind [*E. Waelsch*, Paris C. R. 144 (1907), p. 186; Monatsh. Math. Phys. 20 (1909), p. 291]. — Der Name *Dreibein* rührt von *J. Steiner* her [Brief von *Pohlke* in *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 63 (1864), p. 309], der die Figur, die drei von einem Punkte ausgehende paarweise aufeinander senkrechte Vektoren bilden, als *rechtwinkliges* Dreibein bezeichnet. Dieselbe Figur heißt bei *H. Kinkelin* [Vierteljahrschr. naturf. Ges. Zürich 5 (1861), p. 358] *Dreibein* schlechthin; ebenso bei *E. Waelsch,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 21 (1912), p. 21.

23) *C. Jordan,* Paris C. R. 79 (1874), p. 795. Siehe auch: *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. 64 (1880), p. 373 $(n = 4)$; *C. E. A. Brunel,* Math. Ann. 19 (1882), p. 37; *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys (2) 6 (1888), p. 168; *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 28 (1890), p. 219 $(n = 4)$; *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 443; *G. Landsberg,* J. f. Math. 114 (1895), p. 338; 118 (1897), p. 163; *E. Piccioli,* Giorn. di mat. 36 (1898), p. 271; *Cesàro-Kowalewski,* p. 293; *H. G. Hardy,* Amer. J. Math. 24 (1902), p. 13 $(n = 4)$; *J. C. Wildervanck,* Diss. Groningen 1904 $(n = 4)$; *W. Fr. Meyer,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 19 (1910), p. 160; *E. Rath,* ebenda, p. 269; *A. Löwenherz,* Diss. Königsberg 1911; *C. Guichard,* Bull. sc. Math. (2) 36 (1912), p. 25; *V. Hlavatý,* Rozpravy Ak. Prag 32 (1923), Nr. 8 $(n = 4)$ (tschech.). — *Ausdehnung der Frenetschen Formeln* auf den Raum von *Riemann* und *Weyl:* Nr. 18, Fußnoten [230]), [231]); auf allgemeinere Räume (vgl. [219]); *P. Finsler,* Diss. Göttingen 1918; auf den Funktionenraum: *G. Kowalewski,* Paris C. R. 151 (1910), p. 1338; *L. Ingold,* Trans. Amer. Math. Soc. 13 (1912), p. 319.

24) Außer den in [23]) genannten Arbeiten: *H. Fromm,* Diss. Bonn 1878;

Außer den regulären Kurven treten im R_3, wenn man sich im komplexen Gebiet bewegt, an krummen Linien noch auf die *krummen Minimallinien*[25]) oder isotropen krummen Linien und die *krummen Linien in einer Minimalebene.*[26]) Bei einer krummen Minimallinie $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$; $(\dot{\mathfrak{x}}^2 = 0)$ ist

$$p = \int \sqrt{-\frac{(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\mathfrak{z})}{\dot{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{z}}}\, dt \tag{1}$$ [27])

ein natürlicher Parameter gegenüber der Bewegungsgruppe und

$$J = \mathfrak{x}'''^2 \tag{2}$$

die Differentialinvariante niedrigster (fünfter) Ordnung; bei der krummen Linie

$$x_1 = iu_1(t), \quad x_2 = u_2(t), \quad x_3 = iu_2(t), \qquad (i^2 = -1) \tag{3}$$

in der Minimalebene $x_2 + ix_3 = 0$

$$ds = i\,du_1 \tag{4}$$

das (gewöhnliche) Bogenelement und

$$j = i\frac{u_2'''}{u_2''} \tag{5}$$

die Differentialinvariante niedrigster Ordnung.[28])

R. Hoppe, Arch. Math. Phys. (2) 12 (1893), p. 96; *E. O. Lovett*, Amer. J. Math. 22 (1900), p. 226; *E. Piccioli*, Nouv. Ann. (3) 19 (1900), p. 385; (4) 1 (1901), p. 369; *H. W. Richmond*, Quart. J. 31 (1900), p. 315; *N. J. Hatzidakis*, Nyt Tidskr. f. Math. 13 (1902), p. 49, 73; *G. Pirondini*, Mem. Acc. Modena (3) 7 (1908), p. 49; *G. Tiercy*, L'ens. math. 22 (1922), p. 152.

25) Hinsichtlich ihrer Differentialinvarianten untersucht bei *Lie-Scheffers*, Kap. 22, § 4; *E. Vessiot*, Paris C. R. 140 (1905), p. 1381; *E. Study*, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 1; 11 (1910), p. 249 [vgl. auch Amer. J. Math. 32 (1910), p. 257, 264]; *F. Böhm*, Münchner Ber. 1915, p. 257. S. auch III D 4, Nr. 35 (*G. Scheffers*) und *W. Blaschke*, Differentialgeometrie I, § 19.

26) *E. Study*, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 25. Außerdem: *H. Beck*, Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 12 (1912), p. 17; *C. L. E. Moore*, Proc. Amer. Ac. Boston 50 (1915), p. 199; *F. Böhm*[25]), p. 277.

27) *E. Vessiot*[25]), *E. Study*[25]). Beide Autoren führen auch begleitende Dreibeine ein und geben Gegenstücke der *Frenet*schen Formeln. — Die Bezeichnungen wie in [19]); $\mathfrak{z}$ bedeutet einen von t unabhängigen willkürlichen Vektor, der Klammerausdruck eine dreireihige Determinante; $\mathfrak{x}''' = \frac{d^3\mathfrak{x}}{dp^3}$.

28) $u_2^{(k)} = \frac{d^k u_2}{ds^k}$. — Die Kurven $j = 0$ sind die *„parabolischen Kreise"*, die Kurven $j =$ konst. die *„singulären ebenen gemeinen Schraubenlinien"* (*E. Study*). Eine äquiforme Invariante niedrigster Ordnung ist $\frac{u_2'' u_2^{\mathrm{IV}}}{u_2'''^2}$ (*H. Beck*).

Das *Äquivalenzproblem der Kurven im R_3* gegenüber der Bewegungsgruppe im komplexen Gebiet wurde von *S. Lie*[29]) in Angriff genommen, aber erst von *E. Study*[30]) vollständig erledigt.

5. Metrische Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten von zwei und mehr Dimensionen. Die gewöhnliche Behandlungsweise der metrischen Differentialgeometrie der Flächen im R_3 ist bereits in III D 1, 2, Nr. **34** ff. (*H. v. Mangoldt*) ausführlich dargestellt worden.[31]) Ganz entsprechend kann man auch die metrische Differentialgeometrie einer regulären[31a]) $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (Hyperfläche) V_{n-1} im R_n $(n > 3)$ betreiben. Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ der Vektor eines Punktes der V_{n-1}, $\mathfrak{z}$ der Einheitsvektor der zugehörigen Normalen der V_{n-1}, so sind[32])

$$(6) \qquad d\mathfrak{x}^2 = b_{\lambda\mu}\, dy^\lambda dy^\mu \quad \text{und} \quad \mathfrak{z}\cdot d^2\mathfrak{x} = -\,d\mathfrak{z}\cdot d\mathfrak{x} = h_{\lambda\mu}\, dy^\lambda dy^\mu$$

die beiden metrischen Grundformen der V_{n-1}. Die kovarianten Ableitungen $\mathfrak{x}_{(\lambda\mu)}$ und $\mathfrak{z}_{(\lambda)}$ in bezug auf die erste dieser Grundformen drücken sich linear durch $\mathfrak{x}_{(\lambda)}$ und $\mathfrak{z}$ aus:

$$(7) \qquad \mathfrak{x}_{(\lambda\mu)} = h_{\lambda\mu}\cdot\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}_{(\lambda)} = -\,h_{\lambda\mu}\, b^{\mu\nu}\mathfrak{x}_{(\nu)}.$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieser metrischen Grundgleichungen der V_{n-1} im R_n lauten

$$(8) \quad \begin{cases} r_{\lambda\mu\nu\varrho} = h_{\lambda\nu}h_{\mu\varrho} - h_{\lambda\varrho}h_{\mu\nu} & \text{(Verallg. } \textit{Gauß}\text{sche Gleichung),} \\ h_{\lambda\mu(\nu)} - h_{\lambda\nu(\mu)} = 0 & \text{(Verallg. } \textit{Codazzi}\text{sche Gleichungen).} \end{cases}$$

---

29) *S. Lie*, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 370; *Lie-Scheffers,* Kap. 22. Kritische Bemerkungen dazu bei *E. Study,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 17 (1908), p. 125.

30) *E. Study,* Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 1. — Die Differentialinvarianten und das Äquivalenzproblem der Kurven und Kurvenscharen auf der Einheitskugel gegenüber der *Gruppe der automorphen Bewegungen dieser Kugel* behandelt *W. Gasiorowski,* Prace mat.-fiz. 28 (1917), p. 1.

31) Andere Methoden sind die des beweglichen Trieders (vgl. *G. Darboux,* Surfaces), die der Ableitungen nach den Bogenlängen zweier orthogonalen Kurvenscharen auf der Fläche (vgl. etwa *G. Ricci,* Superficie; *J. Knoblauch*, Grundlagen der Differentialgeometrie, Berlin 1913, 634 p.), sowie die damit verwandte der „natürlichen Geometrie" (*Cesàro-Kowalewski*). Vgl. dazu III D 3, Nr. 8 (*R. v. Lilienthal*). — Über die vektoranalytische Behandlung der Flächentheorie vgl. III AB 11 (*H. Rothe*), p. 1358, sowie die Literaturliste in *C. Burali-Forti* et *R. Marcolongo,* Analyse vectorielle générale I, Pavia 1912.

31a) d. h. einer solchen, deren Tangentenhyperebenen die absolute quadratische V_{n-2} des R_n nicht berühren.

32) $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$ bedeutet das innere Produkt der beiden Vektoren: $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}$. Über die hier verwendete Methode des absoluten Differentialkalküls vgl. III E 1 b), Nr. 18 f. (*R. Weitzenböck*). $r_{\lambda\mu\nu\varrho}$ ist der *Riemann-Christoffel*sche Krümmungstensor (Nr. 19) der ersten Grundform. Die Bezeichnung der kovarianten Ab-

Im allgemeinen[32a]) bestimmt, wenn $n > 3$ ist, das erste Gleichungssystem (8) die $h_{\lambda\mu}$ eindeutig als Funktionen der $b_{\lambda\mu}$ und ihrer ersten und zweiten Ableitungen nach den y, so daß das zweite Gleichungssystem (8) ein System von Differentialgleichungen für die $b_{\lambda\mu}$ darstellt. Demnach ist im R_n $(n > 3)$ im allgemeinen[32a])

1. eine V_{n-1} nicht verbiegbar (Satz von *Beez*; Nr. 27);
2. zu einer beliebig vorgegebenen positiv-definiten Differentialform $b_{\lambda\mu} dy^\lambda dy^\mu$, keine V_{n-1} vorhanden, die sie zur ersten metrischen Grundform hat.

Die metrische Theorie der V_{n-1} im R_n, und allgemeiner die der V_m im R_n $(1 < m \leqq n - 1)$ ist nur ein besonderer Fall der Theorie der V_{n-1} und V_m in einer n-dimensionalen *Riemann*schen Mannigfaltigkeit V_n. Wir verweisen daher wegen weiterer Einzelheiten, insbesondere der Krümmungstheorie, auf Nr. 21—23, wo die V_{n-1} und V_m in V_n ausführlich behandelt werden.[33])

Die zuerst von *W. R. Hamilton*[34]) entwickelte *metrische Differentialgeometrie der nicht-zylindrischen Strahlensysteme im R_3*[35]):

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(u, v) + t\mathfrak{z}(u, v) \qquad (\mathfrak{z}^2 = 1) \tag{9}$$

wird seit *E. E. Kummer*[36]) gewöhnlich auf die Theorie der Simultaninvarianten der beiden Differentialformen:

$$\begin{cases} d\mathfrak{z}^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2, \\ d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z} = e du^2 + (f + f')\, du\, dv + g dv^2 \;^{37)} \end{cases} \tag{10}$$

---

leitungen durch Klammern nach *R. Weitzenböck*, a. a. O. Dieser Bezeichnung sind häufig andere vorzuziehen, wie $\mathfrak{x}_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{y}_\lambda$ (*G. Ricci*) oder $\nabla_\mu \nabla_\lambda \mathfrak{x}$, $\nabla_\lambda \mathfrak{y}$ (*J. A. Schouten*). Vgl. darüber *J. A. Schouten*, Riccikalkül, Einleitung.

32a) Wegen der Ausnahmefälle siehe Nr. 27. — Zum Texte vgl. etwa *Bianchi-Lukat*, p. 612 ff.

33) Literaturangaben über V_{n-1} und V_m im R_n namentlich in den Fußnoten [283]), [284]), [297]), [299]) bis [302]).

34) *W. R. Hamilton*, Trans. Ir. Ac. Dublin 15 (1828), p. 69; 16 (1830—31), p. 3, 93; 17 (1837), p. 1. Vorher treten Sätze über allgemeine Strahlensysteme auf bei *G. Monge*, Hist. Ac. sc. 1781/1784, Mém., p. 666 und *Malus*, J. Éc. Polyt. 7, cah. 14 (1808), p. 1, 84.

35) Vgl. auch den Bericht von *K. Zindler*, Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 15 (1906), p. 185.

36) richtiger wohl seit *K. Hensel*, J. f. Math. 102 (1888), p. 273. Bei *E. E. Kummer*, J. f. Math. 57 (1859), p. 189 treten nur die Koeffizienten der Differentialformen (10), nicht diese selbst auf. Eine ausführliche Darstellung bei *Bianchi-Lukat*, Kap. 10.

37) $f = \mathfrak{z}_u \cdot \mathfrak{x}_v$, $f' = \mathfrak{z}_v \cdot \mathfrak{x}_u$. Oft ist es zweckmäßiger, statt $d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z}$ die zugehörige Bilinearform $d\mathfrak{x} \cdot \delta\mathfrak{z}$ zugrunde zu legen. [*K. Knoblauch*, Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 14 (1915), p. 79.]

zurückgeführt, von denen die erste als quadriertes Bogenelement des sphärischen Bildes positiv-definit vom *Gauß*schen Krümmungsmaß Eins ist.[38]) Diese beiden Differentialformen gehen in die sogenannte dritte[39]) und zweite metrische Grundform der Leitfläche $\mathfrak{x}(u, v)$ über, wenn $\mathfrak{z}(u, v)$ deren negative Einheitsnormale ist. Dagegen bestimmen sie *allein* nicht das Strahlensystem bis auf Bewegungen.[40]) Dazu ist vielmehr die Hinzunahme weiterer Größen notwendig.[41]) Dieser Umstand veranlaßte *G. Sannia*[42]), als zweite metrische „Grundform" anstatt $d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z}$ die Differentialform

$$(11)\quad \begin{cases} \mu = \bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2, \\ \bar{e} = \dfrac{Ef' - Fe}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \bar{f} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Eg + F(f' - f) - Ge}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \bar{g} = \dfrac{Fg - Gf}{\sqrt{EG - F^2}} \end{cases}$$

zu nehmen, die das Moment zweier unendlich benachbarten Geraden des Systems darstellt. Zwischen den Koeffizienten von $d\mathfrak{z}^2$ und μ besteht außer der differentiellen Relation, die ausdrückt, daß $d\mathfrak{z}^2$ das *Gauß*sche Krümmungsmaß Eins hat, noch eine zweite, die hier nicht angeschrieben werden soll.[43]) Zu zwei quadratischen Differentialformen

$$(12)\quad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad \bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2,$$

von denen die erste positiv-definit vom *Gauß*schen Krümmungsmaß

38) Andere Methoden sind die der „natürlichen Geometrie" [vgl. *E. Cesàro*, Rend. Acc. Napoli (2) 8 (1894), p. 141; *T. Cifarielli*, Giorn. di mat. 36 (1898), p. 145; *Cesàro-Kowalewski*, Kap. 14] und die der „orthogonalen Kurvenkongruenzen" [Nr. **20**; vgl. etwa *T. Levi-Civita*, Lincei Rend. Rom (5) 8^{I} (1899), p. 239; *P. Cattaneo*, Atti Ist. Veneto 61 (1902), p. 41; *A. dall'Acqua*, Lincei Rend. Rom (5) 12^{I} (1903), p. 153]. Wieder eine andere Behandlungsweise bei *L. S. Shively*, Diss. Chicago 1921. *W. C. L. Gorton*, Amer. J. Math. 10 (1888), p. 347 leitet die Resultate von *E. E. Kummer* mittels Quaternionen her.

39) d. h. das Längenelement des sphärischen Bildes [III D 6 a), Nr. **11** (*A. Voß*)].

40) *G. Sannia*, Atti Acc. Torino 45 (1910), p. 56.

41) *P. Burgatti*, Lincei Rend. Rom (5) 8^{I} (1899), p. 515; *T. Cifarielli*, Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 139.

42) *G. Sannia*, Ann. di mat. (3) 15 (1908), p. 143; ferner: Atti Acc. Torino 44 (1909), p. 567; 45 (1910), p. 56; Math. Ann. 68 (1910), p. 409; Palermo Rend. 31 (1911), p. 244; 33 (1912), p. 328. (*Sannia* benutzt $-\mu$.) Die *Koeffizienten* von $d\mathfrak{z}^2$ und μ werden schon vorher von *K. Zindler*, Liniengeometrie ..., 2. Bd., Leipzig 1906, p. 84 ff. dem Studium der Strahlensysteme zugrunde gelegt. Vgl. noch: *S. Rossi*, Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 235; *K. Knoblauch*, Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 14 (1915), p. 79; *K. Ogura*, Sc. Rep. Tôhoku Univ. Sendai 5 (1916), p. 107; *W. Blaschke*, Differentialgeometrie I, § 106 ff., wo man eine besonders elegante Art der Behandlung findet.

43) Siehe etwa *W. Blaschke*, Differentialgeometrie I, § 107, Formel (80).

Eins ist und zwischen deren Koeffizienten außerdem die eben erwähnte Relation besteht, gehört stets ein bis auf Bewegungen bestimmtes nicht-zylindrisches Strahlensystem, das diese Differentialformen zu Grundformen hat.

Auch die metrische Differentialgeometrie der Komplexe läßt sich nach *K. Zindler*[44]) und *G. Sannia*[44]) auf das Studium zweier simultanen quadratischen Differentialformen zurückführen.

Auf die metrische Theorie der nicht geradlinigen Kurvenkongruenzen im R_3 gehen wir hier nicht ein.[44a])

III. Nichteuklidische Differentialgeometrie.

Die Differentialgeometrie der geometrischen Gebilde in einer nichteuklidischen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit S_n läuft zum größten Teil der metrischen Differentialgeometrie so parallel, daß wir uns im folgenden fast ausschließlich auf eine knappe Besprechung des Falles $n = 3$ und die Hervorhebung einiger Besonderheiten beschränken können.[45]) Hier sei nur noch bemerkt, daß die *metrische Dualität* der S_n in der Differentialgeometrie bisher noch nicht voll ausgenutzt worden ist.[46]) Auch ein systematisches Studium der Reste dieser Dualität im Grenzfall der metrischen Differentialgeometrie steht noch aus.[47])

---

44) *K. Zindler*[42]), p. 180 ff.; *G. Sannia,* Ann. di mat. (3) 17 (1910), p. 179; Palermo Rend. 31 (1911), p. 244; 33 (1912), p. 328. — Bei *K. Zindler* werden nur die *Koeffizienten* der Differentialformen, nicht diese selbst, dem Studium der Komplexe zugrunde gelegt.

44a) Eine zusammenfassende Darstellung dieses Gebietes findet man bei *L. P. Eisenhart,* Transformations. — Vgl. auch Nr. 20.

45) Die folgende Darstellung im Anschluß an *J. L. Coolidge,* Non-euclidean geometry, Kap. 15, 16. Andere Darstellung für S_3 und S_n in *Bianchi-Lukat,* 1. Aufl., Kap. 21, 22.

46) Für die Theorie der Kurven im S_3 vgl. *B. Hostinský,* J. de math. (6) 3 (1909), p. 263 [Ausz. Paris C. R. 148 (1909), p. 463]; für die der Flächen im S_3 und Hyperflächen im S_n: *C. Fibbi,* Ann. sc. norm. Pisa 7 (1895), p. 100; *Bianchi-Lukat,* 1. Aufl. p. 620, 623.

47) Neuere Ausführungen über diese metrische Dualität: *R. Mehmke,* Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 56; *B. Hostinský,* Rozpravy Ak. Prag 16 (1907), Nr. 30; 18 (1909), Nr. 33 (tschech.); J. de math. (6) 3 (1909), p. 263; Nouv. Ann. (4) 9 (1909), p. 399; *A. Ranum,* Quart. J. 46 (1915), p. 356; *W. Blaschke,* Kreis und Kugel, Leipzig 1916, p. 117; *E. Müller,* Wien. Ber. 126 (1917), p. 311; *R. Mehmke,* ebenda p. 1317; *T. Takasu,* Sc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 11 (1922), p. 379, 411. Bei *E. Müller* wird auch die wichtigste ältere Literatur zitiert.

6. Nichteuklidische Differentialgeometrie der Kurven. Der *nichteuklidische Bogen* einer regulären Kurve $x = x(t)$[48]) im S_3[49]) ist

$$s = \int \sqrt{(\dot{x}\dot{x})}\, dt. \tag{1}$$

Wird er als unabhängige Veränderliche auf der Kurve genommen, so besteht die Identität

$$(x'x') = 1 \tag{2}$$

und man hat in

$$\frac{1}{R^2} = (x''x'') - \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{R^2 T} = \frac{(x x' x'' x''')}{k} \tag{3}$$

zwei wesentliche rationale nichteuklidische Differentialinvarianten der Kurve. $\frac{1}{R}$ heißt die *Krümmung*, $\frac{1}{T}$ die *Torsion* der Kurve. Durch Angabe der beiden Differentialinvarianten (3) als Funktionen von s ist die Kurve bis auf nichteuklidische Bewegungen bestimmt.

---

48) Im folgenden wird der S_3 vom (positiven oder negativen) Krümmungsmaß $\frac{1}{k^2}$ mit der absoluten Fläche $(xx) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ betrachtet. x bedeutet die Zusammenfassung der vier homogenen, durch $(xx) = k^2$ normierten Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines nicht-absoluten Punktes. Im elliptischen Fall $(k^2 > 0)$ wird für reelle Punkte noch $x_1 > 0$, im hyperbolischen $(k^2 < 0)$ für reelle zugängliche Punkte $\bar{x}_1 \equiv \frac{1}{k} x_1 \geq 0$ vorausgesetzt. $(xy) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$. Übergesetzte Punkte bedeuten Differentiation nach t, Striche solche nach s; $(xyzt)$ die vierreihige Determinante der Koordinaten von x, y, z, t. $y = R \cdot \widehat{x x' x''}$ steht für $y_i = R \frac{\partial (x x' x'' y)}{\partial y_i}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. — Eine Kurve im S_3 heißt *regulär*, wenn sie keine Gerade ist, und weder ihre Punkte noch ihre Schmiegungsebenen Punkte bzw. Tangentenebenen der absoluten Fläche sind.

49) *Literatur zur Differentialgeometrie der Kurven im S_3: E. Rath,* Diss. Tübingen 1894; *L. Bianchi,* Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 100; *C. Guichard,* Ann. Éc. Norm. (3) 13 (1896), p. 127; *A. Razzaboni,* Le formole di Frenet in geometria iperbolica ..., Bologna 1899, 22 p.; Mem. Ist. Bologna (6) 5 (1908), p. 225; (6) 8 (1911), p. 20; Rend. Acc. Bologna (2) 13 (1909), p. 105; Mem. Ist. Bologna (7) 2 (1915), p. 345 [vgl. (7) 1 (1914), p. 113]; (7) 3 (1916), p. 201; (7) 7 (1920), p. 83; *G. Fubini,* Ann. sc. norm. Pisa 9 (1900), p. 74; *E. Cesàro,* Lincei Rend. Rom (5) 13I (1904), p. 658; *B. Hostinský,* J. de math. (6) 5 (1909), p. 263; *G. Pirondini,* Ann. Sc. Ac. Porto 5 (1910), p. 5, 91, 166, 224; 6 (1911), p. 19, 105, 166, 235; 7 (1912), p. 55, 111, 219; 9 (1914), p. 118, 168, 228; 10 (1915), p. 40, 176; 11 (1915), p. 104, 141; *G. Pick,* Paris C. R. 153 (1911), p. 1447; 154 (1912), p. 263; *E. Salkowski,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 21 (1912), p. 27 [Ausz.: Bull. Amer. Math. Soc. (2) 18 (1912), p. 173]; *E. Stransky,* Ber. Wien 121 (1912), p. 813; Jahresb. Staatsgymn. Prachatitz 1914/5, 12 p.; *T. Kubota,* Tôhoku Math. J. 21 (1922), p. 234; *M. J. Conran,* Proc. London Math. Soc. (2) 21 (1922), p. 191.

Die Punkte

$$(4) \qquad \alpha = kx', \quad \beta = kR\left(x'' + \frac{x}{k^2}\right), \quad \gamma = R \cdot \widehat{xx'x''}$$

bilden mit dem Kurvenpunkte x zusammen die Ecken eines Polartetraeders der absoluten Fläche des S_3, das mit der Kurve gegenüber den Bewegungen des S_3 invariant verbunden ist. Die Geraden $x\alpha$, $x\beta$, $x\gamma$ sind die *Tangente, Hauptnormale, Binormale,* die Ebenen $x\beta\gamma$, $x\gamma\alpha$, $x\alpha\beta$ die *Normalebene, rektifizierende Ebene, Schmiegungsebene* der Kurve. Die Ableitungen von x, α, β, γ nach s drücken sich linear homogen durch x, α, β, γ selbst aus vermöge der *Ableitungsgleichungen*[50])

$$(5) \quad x' = \frac{\alpha}{k}, \quad \alpha' = -\frac{x}{k} + \frac{\beta}{R}, \quad \beta' = -\frac{\alpha}{R} + \frac{\gamma}{T}, \quad \gamma' = -\frac{\beta}{T}.$$

Alle geometrischen Begriffe und Erklärungen lassen sich unschwer aus der metrischen Geometrie übertragen, ebenso auch die *Methoden der natürlichen Geometrie.*[51])

Besonders zu erwähnen sind die Untersuchungen von *L. Bianchi*[52]) über die Kurven von der konstanten Torsion $\pm\frac{1}{k}$ im elliptischen Raum vom Krümmungsmaß $\frac{1}{k^2}$, sowie die Anwendungen, die *G. Fubini*[53]) von einem liniengeometrischen Übertragungsprinzip (vgl. Nr. 7) auf die Kurventheorie, *W. Blaschke*[53a]) auf die analoge Theorie der geradlinigen Flächen dieses Raumes gemacht hat.

Die Differentialinvarianten der nicht-regulären Kurven im S_3 sind bisher noch nicht untersucht worden.

Ganz analog wie die Theorie der regulären Kurven im S_3 verläuft auch die der ihnen entsprechenden Kurven im S_n $(n > 3)$. Eine solche Kurve hat $n - 1$ Krümmungen (*W. Killing*)[54]), sowie ein be-

50) Diese bisweilen als „*Bianchi-Frenet*sche Formeln" bezeichneten Ableitungsgleichungen finden sich in etwas anderer Form zuerst bei *E. Rath,* Diss. Tübingen 1894, p. 35.

51) *E. Cesàro,* Mem. Acc. Lincei Rom (5) 5 (1904), p. 155; Lincei Rend. Rom (5) 13^I (1904), p. 438 (S_2); ebenda p. 658 (S_3). Vgl. auch *E. Stransky,* Ber. Wien 121 (1912), p. 813; *T. Takasu,* Sc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 11 (1922), p. 29 und für den S_n: *G. Kowalewski,* Ber. Wien 120 (1911), p. 539.

52) *L. Bianchi*[49]); vgl. auch *E. Salkowski*[49]).

53) *G. Fubini*[49]); vgl. auch *G. Pick*[49]), *E. Salkowski*[49]), *M. J. Conran*[49]). — Unter diesen Anwendungen ist eine *neue Form der Ableitungsgleichungen* besonders bemerkenswert. — Über das erwähnte Übertragungsprinzip vgl. besonders *E. Study,* Limprecht-Festschrift, Greifswald 1900, p. 67; Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 11 (1902), p. 313; Amer. J. Math. 29 (1907), p. 116.

53a) *W. Blaschke,* Math. Ztschr. 15 (1922), p. 309.

54) *W. Killing,* Raumformen II, § 10.

gleitendes Simplex, das nebst den zugehörigen Ableitungsgleichungen zuerst bei *E. Rath*[55]) auftritt.

7. Nichteuklidische Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten von zwei und mehr Dimensionen. Das Studium einer reellen *Fläche im* S_3[56]) von der Krümmung $\frac{1}{k^2}$ kann auf das der Simultaninvarianten der beiden „*nichteuklidischen Grundformen*"

$$(6)\qquad \begin{cases} (dx\,dx) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ (y\,d^2x) = -(dy\,dx) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \end{cases}$$ [57])

zurückgeführt werden[58]), zwischen deren Koeffizienten die Beziehungen

$$(7)\qquad \frac{1}{k^2}\,\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K - \frac{1}{k^2}$$

(*Gauß*sche Gleichung),

$$(8)\qquad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} L + \left[\left\{ {11 \atop 1} \right\} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \right] M + \left\{ {11 \atop 2} \right\} N = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} + \left\{ {22 \atop 1} \right\} L + \left[\left\{ {22 \atop 2} \right\} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \right] M - \left\{ {12 \atop 2} \right\} N = 0, \end{cases}$$

(*Codazzi*sche Gleichungen)

bestehen. Hierin bedeutet $y = \frac{\widehat{x x_u x_v}}{\sqrt{EG - F^2}}$ den absoluten Pol der Tangentenebene der Fläche im Punkte x (die Gerade xy also die *Flächennormale*) und K das *Gauß*sche Krümmungsmaß der ersten Grundform. K heißt die „*absolute Krümmung*" der Fläche, $\frac{1}{k^2}\,\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ die „*relative Krümmung*". (7) und (8) sind die Integrabilitätsbedingungen der Fundamentalgleichungen:

55) *E. Rath,* Math. nat. Mitt. Württemberg (2) 2 (1900), p. 66. Vgl. auch *G. Kowalewski,* Wien. Ber. 120 (1911), p. 531; *T. Kubota*, Tôhoku math. J. 21 (1922), p. 234; *T. Nishiuchi,* Mem. Coll. Sc. Kyoto Imp. Univ. 5 (1922), Nr. 3; *H. Kashiwagi,* ebenda 6 (1923), p. 221.

56) Wegen der *Grundformeln der Flächentheorie im* S_3 vgl. etwa; *E. Rath,* Diss Tübingen 1894; *L. Bianchi,* Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 98 und ausführlicher (3) 2 (1899), p. 98; *Bianchi-Lukat,* 1. Aufl., p. 624; *J. L. Coolidge*, Noneuclidean geometry, p. 194; *H. Lotz,* Mitt. Math. Sem. Gießen, 1. Bd., 7. Heft (1922), 36 p.

57) Bei Beschränkung auf den elliptischen Raum oder das zugängliche Gebiet des hyperbolischen Raumes ist die erste Grundform positiv definit. — Die *Christoffel*schen Symbole in (8) und (9) beziehen sich auf die erste Grundform.

58) Eine andere Methode ist die der natürlichen Geometrie: *E. Cesàro,* Lincei Rend. Rom (5) 13^{I} (1904), p. 658.

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{E}{k^2} x + \frac{L}{k^2} y, \text{ usw.}^{58a)}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{FM - GL}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FL - EM}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial v}; \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{FN - GM}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FM - EN}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Zu zwei quadratischen Differentialformen $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$, $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$, die den Bedingungen (7), (8) genügen und von denen die erste positiv definit ist, gehört stets eine bis auf Bewegungen (und Umlegungen) des S_3 bestimmte Fläche, die diese Formen zu Grundformen hat.[59])

Die algebraischen Simultaninvarianten der beiden Grundformen (6) drücken sich durch die („reduzierten") Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2[59a]) folgendermaßen aus:

$$(11) \qquad \begin{cases} H = -\dfrac{1}{2} \dfrac{EN - 2FM + GL}{k(EG - F^2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2}\right) & (\textit{Mittlere Krümmung}), \\ K - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{LN - M^2}{k^2(EG - F^2)} = \dfrac{1}{\varrho_1 \varrho_2} & (\textit{Relative Krümmung}). \end{cases}$$

Die weitere Entwicklung der Flächentheorie im S_3 erfolgt genau in derselben Weise wie im R_3. Wir beschränken uns hier daher auf die Aufzählung einiger invariant erklärten Flächenklassen im S_3.

1. Die *Minimalflächen* des S_3, d. h. die Extremalen des Variationsproblems $\delta \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = 0$ oder die Flächen von der mittleren Krümmung Null sind namentlich von *L. Bianchi*, *G. Darboux*, *C. Guichard* untersucht worden.[60]).

L. Bianchi hat ferner zuerst betrachtet:

2. Die *Flächen konstanter mittlerer Krümmung* des S_3[61]);

58a) Die nicht angeschriebenen Gleichungen (9) ergeben sich aus der angeschriebenen durch zyklische Vertauschung von $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$; E, F, G; L, M, N sowie der oberen Zeiger 11, 12, 22 in den *Christoffel*schen Symbolen.

59) S. etwa *L. Bianchi*, Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 99; (3) 2 (1899), p. 99.

59a) $\varrho_i = k \operatorname{tg} \frac{w_i}{k}$ $(i = 1, 2)$, wo w_i das Stück der Normalen vom Flächenpunkt bis zu ihrem i^{ten} Brennpunkt ist.

60) *L. Bianchi*, Mem. Lincei Rom (4) 4 (1887), p. 503; Ann. di mat. (3) 2 (1899) p. 111; (3) 4 (1900), p. 1; *G. Darboux*, Surfaces III, p. 471; *C. Guichard*, Ann. Éc. Norm. (3) 13 (1896), p. 401; J. de math. (5) 2 (1896), p. 142. — Vgl. noch: *A. Cayley*, Paris C. R. 111 (1890), p. 953; *H. Schübel*, Diss. München (Univ.) 1906; *F. Lindemann*, Münchner Ber. 1923, p. 1.

61) *L. Bianchi*, Mem. Lincei Rom (4) 4 (1887), p. 503; Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 114, 122; (3) 4 (1900), p. 1; (3) 5 (1901), p. 165. Vgl. auch *M. Servant*, Paris C. R. 131 (1900), p. 827.

3. Die merkwürdigen *Flächen von der absoluten Krümmung Null* im elliptischen Raum und die entsprechenden Flächen im hyperbolischen Raum[62]);

4. Die *Flächen konstanter Krümmung* im S_3[63]);

5. Die *Flächen mit* $\varrho_1 + \varrho_2 = konst.$[64])

6. Mit den (imaginären) *Serretschen Flächen* des S_3, d. h. den Flächen mit nur einer Schar von Krümmungslinien hat sich *U. Sbrana*[65]) beschäftigt.[66])

Die Theorie der Flächen im S_3 ist nur ein besonderer Fall der ganz analog zu entwickelnden Theorie der V_{n-1} (*Hyperflächen*) *im* S_n[67]), die ihrerseits wieder einen Spezialfall der Theorie der Hyperflächen in einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit darstellt. Wir verweisen daher auf Nr. **21** ff.[68]), wo diese allgemeinere Theorie ausführlich erörtert wird. Ebenso sei auch wegen aller Eigenschaften der S_n, die erst aus der allgemeinen Lehre von den *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten verständlich werden, auf später (Nr. **19**, **26** f.) verwiesen.[69])

---

62) *L. Bianchi,* Atti Acc. Torino 30 (1895), p. 743; Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 93; (3) 2 (1899), p. 95; (3) 4 (1900), p. 15; (3) 18 (1911), p. 217; *C. Guichard,* J. de math. (5) 2 (1896), p. 133, 139, 149; *A. N. Whitehead,* Proc. Math. Soc. London 29 (1898), p. 275; *G. Fubini,* Ann. sc. norm. Pisa 9 (1900), 74 p.

63) *L. Bianchi*, Mem. Lincei Rom (4) 4 (1887), p. 221 [dreifache Orthogonalsysteme mit einer Schar von Flächen konstanter Krümmung; vgl. dazu auch Rend. Lincei Rom (4) 4^{I} (1888), p. 445]; *C. Fibbi,* Ann. sc. norm. Pisa 7 (1895), 100 p.; *L. Bianchi,* Ann. di mat. (3) 5 (1901), p. 165; (3) 10 (1904), p. 105. — Auf die namentlich von *L. Bianchi,* Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 1; (3) 5 (1901), p. 165; (3) 18 (1911), p. 185 entwickelte Transformationstheorie der Flächen zweiter Ordnung und der Flächen konstanter Krümmung im S_3 können wir hier nicht eingehen.

64) *L. Bianchi,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 114; (3) 5 (1901), p. 165.

65) *U. Sbrana,* Lincei Rend. Rom. (5) 15^{II} (1906), p. 537.

66) Andere besondere Flächenklassen untersuchen: *L. Bianchi,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 113, 125 (Flächen von *Bonnet* und *Appell:* isotherme Flächen); *D. Gigli,* Rend. Ist. Lomb. (2) 33 (1900), p. 717 (Regelflächen); *G. Fubini*, Atti Ist. Veneto 60 (1901), p. 561 (Flächen mit einer Ebene, auf der die Linien gleichen Abstandes von der Fläche ein isothermes System bilden); *L. Bianchi,* Ann. di mat. (3) 10 (1904), p. 138 (Flächen der relativen Krümmung $\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{1+\varphi(u)\psi(v)}$ bei Asymptotenparametern, Konoide); *A. Demoulin,* Paris C. R. 140 (1905), p. 1226 (Flächen mit einem konjugierten Netz von geodätischen Linien). — Weiter vgl. über Flächen im S_3 noch: *A. Razzaboni,* Mem. Ist. Bologna (7) 1 (1914), p. 113; (7) 4 (1917), p. 29; (7) 5 (1918), p. 105.

67) Vgl. etwa *Bianchi-Lukat,* 1. Aufl., p. 616.

68) Literaturangaben besonders in den Fußnoten [292]), [302]), [305]), [320]) sowie [280]) ff.

69) Literaturangaben besonders in den Fußnoten [257]), [335]), [387]).

Die *Theorie der Strahlensysteme* im S_3 hat *C. Fibbi*[70]) in Analogie zu der *Kummer*schen Theorie der Strahlensysteme im R_3 (Nr. 5) entwickelt. Auf einer etwas anderen Begriffsbildung[71]) beruht die Darstellung von *H. Beck.*[72]) Auch hier liegen spezielle Untersuchungen vor.[73])

Besonders zu erwähnen sind einige Arbeiten über die Differentialgeometrie der Flächen und Strahlensysteme im elliptischen Raume, denen ein schon genanntes (Nr. 6) liniengeometrisches Übertragungsprinzip zugrunde liegt, das den reellen Speeren des elliptischen Raumes eindeutig und stetig die reellen Paare von Punkten zuordnet, die man zwei Kugeln des reellen euklidischen Raumes vom Radius Eins entnehmen kann.[74])

IV. Affine Differentialgeometrie.[75])

8. Affine Differentialgeometrie der Kurven. Der natürliche Parameter (Nr. 3) einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ des R_n, die keinem R_{n-1} angehört, gegenüber der *Gruppe der inhaltstreuen Affinitäten* des R_n ist

(1)
$$\sigma = \int \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\ldots\overset{(n)}{\mathfrak{x}})}\,dt.\text{[76])}$$

Bei Einführung dieses *„Affinbogens"* als unabhängige Veränderliche auf der Kurve besteht die (hierfür kennzeichnende) Identität:

(2)
$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\ldots\mathfrak{x}^{(n)}) = 1.$$

---

70) *C. Fibbi,* Ann. sc. norm. Pisa 7 (1895), 100 p.

71) Strahl = Paar von getrennten oder zusammenfallenden Punkten der absoluten Fläche.

72) *H. Beck*, Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 9 (1910), p. 59.

73) *C. Fibbi*[70]) (Pseudosphärische Kongruenzen des S_3); *L. Bianchi,* Ann. di mat. (3) 10 (1904), p. 95.

74) *G. Fubini,* Ann. sc. norm. Pisa 9 (1900), 74 p.; Lincei Rend. Rom (5) 13I (1904), p. 218; *L. Bianchi,* Lincei Rend. Rom (5) 12II (1903), p. 511; (5) 13I (1904), p. 6, 147; Atti Acc. Torino 39 (1904), p. 381; *J. L. Coolidge,* Atti Acc. Torino 39 (1904), p. 175; 40 (1905), p. 202; Non-Euclidean geometry, p. 226; *W. Blaschke*, Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 22 (1913), p. 154.

75) Vgl. hierzu den Bericht von *W. Blaschke* und *K. Reidemeister,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 31 (1922), p. 63.

76) $\dot{\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, $\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma}$, usf. $(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\ldots\overset{(n)}{\mathfrak{x}})$ bedeutet die Determinante aus den n^2 Koordinaten der Vektoren $\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\mathfrak{x}}$; analoge Bezeichnungen auch weiterhin. Die Punkte, in denen $(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\ldots\overset{(n)}{\mathfrak{x}}) = 0$, sind von der Betrachtung auszuschließen. — Der Affinbogen tritt für beliebiges n zuerst bei *G. Pick,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 76 auf.

Im übrigen ist es zweckmäßig, die Kurventheorie der inhaltstreu-affinen Gruppe für jede Anzahl n von Dimensionen gesondert zu entwickeln.[77])

In der Ebene[78]) ist die einzige wesentliche Differentialinvariante einer Kurve ihre *Affinkrümmung*

$$\varkappa = (\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''). \tag{3}$$

Durch Angabe der Affinkrümmung als (stetige) Funktion des Affinbogens (*natürliche Affingleichung*) ist die Kurve bis auf flächentreue Affinitäten bestimmt. $\varkappa \equiv 0$ kennzeichnet die Parabeln, $\varkappa \equiv$ konst. $(\neq 0)$ die irreduzibeln Kegelschnitte mit Mittelpunkt, u. zw. bei Beschränkung auf das reelle Gebiet $\varkappa < 0$ die Hyperbeln, $\varkappa > 0$ die Ellipsen. $\varkappa' \equiv 0$ ist die Differentialgleichung der Kegelschnitte.[79]) Bei einer beliebigen krummen Linie gibt $\varkappa = 0$ die Punkte mit fünfpunktig berührender Schmiegparabel[80]), $\varkappa' = 0$ die sextaktischen Punkte (Punkte mit sechspunktig berührendem Schmiegkegelschnitt).[81]) Eine reelle Kurve heißt in einem reellen ihrer Punkte *hyperbolisch* (*parabolisch*, *elliptisch*) gekrümmt, wenn dort $\varkappa < 0$ $(= 0, > 0)$ ist.[82])

77) Für die Ebene und den R_3 vgl. zum folgenden *W. Blaschke*, Differentialgeometrie II, Kap. I—III.

78) *Literatur zur affinen Differentialgeometrie der ebenen Kurven: J. J. Sylvester,* Amer. J. Math. 8 (1886), p. 196; 9 (1887), p. 1, 113, 292; 10 (1888), p. 1; bes. 9 (1887), p. 335; 10 (1888), p. 10 (Differentiation nach dem Affinbogen und Affinkrümmung); *E. Nobel,* Wien. Ber. 123 (1914), p. 2085 (Affinbogen und Affinkrümmung); *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 68 (1916), p. 217 (Affinisoperimetrische Eigensch. d. Ellipse); 68 (1916), p. 240; 69 (1917), p. 321 (Mindestzahl der sextakt. Punkte einer Eilinie); 69 (1917), p. 166 (Systematische Entwicklung der Theorie); 69 (1917), p. 306 (Extremeigenschaften der Ellipse); 70 (1918), p. 330 (Kanonische Reihenentwicklung); *E. Salkowski,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 160 (Allgemeines); *H. Liebmann,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 341 (Höhere Differentialinvarianten mit Anwendungen); *G. Sannia,* Atti Acc. Torino 57 (1922), p. 293 (Neue system. Entwicklung); *A. Winternitz,* Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 101; *T. Kubota,* Sc. Rep. Tôhoku Univ. Sendai 12, Nr. 1 (1923) (Ungleichheiten für Eilinien). — Vgl. auch *S. Mukhopadyaya,* Calcutta University Studies Nr. 9 (1910), 31 p. (Affinbogen, Affinkrümmung, Gleichung der oskulierenden C_2), wo indes der gruppentheoretische Gesichtspunkt ganz fehlt. — S. ferner die folgenden Fußnoten.

79) Auf dieser Gleichung beruht dem Wesen nach die bekannte Ableitung der Differentialgleichung der Kegelschnitte von *G. H. Halphen,* Bull. Soc. math. France 7 (1879), p. 83.

80) Vgl. *A. M. Ampère*, J. Éc. Polyt. 7, cah. 14 (1808), p. 159, bes. p. 178.

81) Eine Eilinie hat mindestens sechs solche Punkte, eine Eilinie mit Mittelpunkt mindestens acht. *W. Blaschke*[78]).

82) *P. Böhmer,* Diss. Göttingen 1904, Kap. IV; Math. Ann. 60 (1905), p. 256. Siehe auch *A. Transon,* J. de math. 6 (1841), p. 195 ff. — Die beständig gleichartig gekrümmten Kurven haben bemerkenswerte Eigenschaften: *P. Böhmer,*

Der invariant mit der Kurve verbundene Vektor $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}''$ heißt der *Affinnormalenvektor*[83]), die zu ihm parallele Gerade durch den Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ die *Affinnormale* oder *Deviationsachse.*[84]) Sie ist die Verbindungslinie des Kurvenpunktes $\mathfrak{x}$ mit dem Halbierungspunkt einer zur Tangente in $\mathfrak{x}$ parallelen, ihr unendlich benachbarten Sehne der Kurve (*L. N. M. Carnot*)[84]), oder auch der durch $\mathfrak{x}$ gehende Durchmesser jedes irreduziblen Kegelschnittes, der die Kurve dort dreipunktig berührt.[85]) Es gelten die *Ableitungsgleichungen:*

$$\mathfrak{x}''' = -\varkappa\mathfrak{x}'. \tag{4}$$

Auf die zahlreichen der affinen Differentialgeometrie angehörigen *Sätze über Eilinien,* die man *W. Blaschke* u. a.[78]) verdankt, können wir hier nur hinweisen.

Im dreidimensionalen Raum[86]) hat eine gewundene Kurve gegenüber der Gruppe der inhaltstreuen Affinitäten zwei unabhängige Differentialinvarianten fünfter Ordnung

$$\varkappa_1 = -\tfrac{1}{4}(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'''\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}), \quad \varkappa_2 = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'''\mathfrak{x}^{\mathrm{V}}) + \tfrac{5}{4}(\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}), \tag{5}$$

die *erste* und *zweite Affinkrümmung.* Durch ihre Angabe als stetige Funktionen des Affinbogens (*natürliche Affingleichungen*) ist die Kurve bis auf inhaltstreue Affinitäten bestimmt. $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ kennzeichnet

---

a. a. O.; *H. Mohrmann,* Math. Ann. 72 (1912), p. 285, 593; Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 21 (1912), p. 286; *E. Müller,* Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), p. 60 ff.; *K. Reidemeister,* Math. Ztschr. 10 (1921), p. 318.

83) Die Kurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}''(\sigma)$ ist das *Minkowski-Böhmer*sche Krümmungsbild; *P. Böhmer*[82]). Vgl. auch *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 69 (1917), p. 166.

84) Die Affinnormale tritt ohne Benennung zuerst auf bei *L. N. M. Carnot,* Géométrie de position, Paris 1803, p. 477 ff., wo sich jedoch unrichtige Angaben finden [vgl. *K. Carda,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 28 (1919), p. 78]. Später hat sie unabhängig *A. Transon,* J. de math. 6 (1841), p. 191 wiedergefunden und *Deviationsachse* genannt. Vgl. III D 1. 2, Nr. 18 (*H. v. Mangoldt*).

85) *A. Transon*[84]). — Neuere Untersuchungen haben an einen Satz von *J. Bertrand,* J. de math. 7 (1842), p. 215; 8 (1843), p. 209 über die Kegelschnitte als Kurven mit geraden Schwerlinien angeknüpft: *H. Brunn,* Kurven ohne Wendepunkte, München 1889, p. 62 ff.; *H. Liebmann,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 325, 341; *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 330.

86) *Literatur zur affinen Differentialgeometrie der räumlichen Kurven: G. Pick,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 76; *E. Salkowski,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 160; *R. Weitzenböck,* Wien. Ber. 127 (1918), p. 969; *G. Sannia,* Atti Acc. Torino 57 (1922), p. 358; *E. Čech,* Lincei Rend. Rom (5) 32I (1923), p. 311; (Auszug aus:) Publ. fac. sc. Univ. Masaryk, Brünn 1923, Nr. 28. *E. Čech* untersucht auch allgemeiner Elementstreifen sowie Kurven auf Flächen. — Besondere Fragen behandeln: *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 71 (1919), p. 20; *J. Mandlinger,* Diss. Hamburg 1922 (Auszug). Beide Autoren geben auch kanonische Reihenentwicklungen.

die kubischen Parabeln, $\varkappa_1 =$ konst., $\varkappa_2 =$ konst. die gewundenen Kurven, die eine Gruppe von inhaltstreuen Affinitäten gestatten.

Das Dreibein niedrigster Ordnung, das gegenüber der betrachteten Gruppe invariant mit der Kurve verbunden ist, besteht aus den Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}'', \quad \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}''' - \varkappa_1 \mathfrak{x}', \tag{6}$$

den Vektoren der *Tangente, affinen Hauptnormalen* und *affinen Binormalen.* Für ihre Ableitungen gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_2' = \varkappa_1 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3, \quad \mathfrak{x}_3' = \varkappa_2 \mathfrak{x}_1 + 3 \varkappa_1 \mathfrak{x}_2, \tag{7}$$

die den *Frenet*schen Formeln der metrischen Kurventheorie entsprechen.[87])

Besonders untersucht worden sind auch die Gewindekurven, die Kurven, die eine Gruppe von *beliebigen* Affinitäten gestatten, die Kurven mit geraden Schwerlinien[88]) und die Kurven mit gemeinsamen Sehnenmittelflächen.[89])

Die Differentialinvarianten niedrigster Ordnung einer Kurve *im* R_n ($n > 3$), die keinem R_{n-1} angehört, sind bisher nicht aufgestellt worden.[90])

Die Differentialgeometrie der Kurven gegenüber der *allgemeinen affinen Gruppe* ist von geringerer Wichtigkeit. Für $n = 2$ treten Differentialinvarianten einer Kurve gegenüber dieser Gruppe als „reine Reziprokanten" schon bei *J. J. Sylvester* auf[91]), für $n = 3$ als *„Semiinvarianten"* (gegenüber der Kollineationsgruppe) bei *G. H. Halphen*[92]), für beliebiges n bei *G. Pick.*[90]) *R. Mehmke*[93]) hat (für $n = 3$) allgemein-affine Differentialinvarianten betrachtet, die sich wenigstens zum

---

87) Dieses Dreibein hat *A. Winternitz* angegeben (vgl. *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, § 30), das dualistisch entsprechende und ein drittes, sowie geometrische Deutungen dieser Dreibeine *E. Čech*[86]). — Die Kurve $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}''' - 4\varkappa_1 \mathfrak{x}'$ heißt das *kovariante Krümmungsbild* (*E. Salkowski*[86])). Die Kurven, die mit ihrem kovarianten Krümmungsbild zusammenfallen, hat *G. Tzitzéica*, Ann. Éc. Norm. (3) 28 (1911), p. 9 untersucht.

88) *W. Blaschke*, Leipz. Ber. 71 (1919), p. 20; Differentialgeometrie II, § 35. — *Schwerlinie* einer räumlichen Kurve durch den Punkt P heißt der Ort der Mitten aller Sehnen, die zu irgendeiner fest gewählten Ebene durch die Tangente in P parallel sind.

89) *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, § 37. — *Sehnenmittelfläche* heißt der Ort der Mitten der Sehnen einer räumlichen Kurve.

90) Die bei *G. Pick,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 76 angegebenen Differentialinvarianten sind für $n \geq 3$ von zu hoher Ordnung.

91) *J. J. Sylvester*[78]). Vgl. auch *E. Lindelöf*, Thèse, Helsingfors 1893, p. 51; *E. Nohel*[78]), p. 2091 f.; *G. Sannia*[86]), p. 367 f.

92) *G. H. Halphen,* J. Éc. Polyt. 28, cah. 47 (1880), p. 74 f.

93) *R. Mehmke,* Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 56.

Teil aus differentiellen Bewegungsinvarianten zweier gewundenen Kurven in spezieller Lage zusammensetzen lassen.

9. Affine Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten von zwei und mehr Dimensionen.[94]) Die Infinitesimalgeometrie der nicht-abwickelbaren Flächen gegenüber der *Gruppe der inhaltstreuen Affinitäten* des R_3[95]) kann nach *G. Pick, W. Blaschke, J. Radon* aufgefaßt werden als Invariantentheorie zweier simultanen Differentialformen, einer quadratischen und einer kubischen, der beiden *Grundformen der affinen Flächentheorie.* Die quadratische Grundform oder das *quadrierte Affinbogenelement* der Fläche ist[96]):

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = \dfrac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{\sqrt[4]{\varepsilon(LN - M^2)}}; \\ L = (\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v), \qquad M = (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v), \qquad N = (\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v); \\ LN - M^2 \neq 0, \end{cases}$$

94) Ausführliche Darstellung bei *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, Kap. IV ff.

95) *Grundlegende Arbeiten: G. Pick,* Leipz. Ber. 69 (1917), p. 107; *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 69 (1917), p. 166; 70 (1918), p. 18; *J. Radon,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 91. Ableitung der Grundformeln mit Hilfe der Tensoranalysis auch bei *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, Kap. V; *E. Čech,* Lincei Rend. Rom (5) 32^I (1923), p. 311, (Auszug aus): Publ. fac. sc. Univ. Masaryk, Brünn 1923, Nr. 28, Kap. IV. — *R. König,* Leipz. Ber. 71 (1919), p. 3; Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 28 (1919), p. 213 ordnet die affine (und metrische) Flächentheorie einem allgemeineren Gedankenkreise ein, ebenso *J. A. Schouten,* Math. Ztschr. 17 (1923), p. 161, 183 (vgl. Nr. 28, 31). *G. Sannia,* Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 165, entwickelt nebeneinander die euklidische, nichteuklidische, affine und projektive Flächentheorie. *R. Grambow,* Diss. Hamburg 1922 (Auszug) erörtert den Zusammenhang der affinen Differentialinvarianten einer Fläche mit den metrischen (vgl. auch *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, § 64). Ein vollständiges System von inhaltstreu-affinen Differentialinvarianten m^{ter} Ordnung gibt *K. Żorawski,* Bull. Ac. sc. Krakau 1906, p. 865; Prace mat.-fis. 18 (1907), p. 147. — Als erste haben wohl *A. Demoulin* und *G. Tzitzéica* in größerem Maßstab affine Flächentheorie getrieben; vgl. die Fußnoten [99]), [104]), [109]). Ein vereinzelter Satz findet sich schon bei *A. Transon,* J. de math. 6 (1841), p. 200 ff.

96) Das Folgende, an *J. Radon*[95]) anschließend, beschränkt sich auf das reelle Gebiet. Parabolische Punkte sind von der Betrachtung ausgeschlossen. Die Klammerausdrücke bezeichnen dreireihige Determinanten, die Zeiger u, v partielle Ableitung. $\varepsilon = +1(-1)$, wenn $LN - M^2 > 0 (< 0)$. Δ_2 bedeutet den zweiten *Beltrami*schen Differentialparameter, $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ die *Christoffel*schen Symbole 2. Art in bezug auf die Grundform φ. — $\varphi = 0$ ist die Differentialgleichung der *Asymptotenlinien* der Fläche. φ ist nur gegenüber eigentlichen Parametertransformationen invariant (*J. Radon*[95]).

die kubische[97])

$$(9)\quad \begin{cases} \psi = a\,du^3 + 3b\,du^2dv + 3c\,du\,dv^2 + d\,dv^3; \\ a = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}} - \dfrac{3}{2}e_u; \quad b = \dfrac{\beta}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}} - \dfrac{1}{2}e_v - f_u; \\ c = \dfrac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}} - \dfrac{1}{2}g_u - f_v; \quad d = \dfrac{\delta}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}} - \dfrac{3}{2}g_v; \\ \alpha = (\mathfrak{x}_{uuu}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v),\ \beta = (\mathfrak{x}_{uuv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v),\ \gamma = (\mathfrak{x}_{uvv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v),\ \delta = (\mathfrak{x}_{vvv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v). \end{cases}$$

Die beiden Grundformen sind apolar:

$$(10)\qquad ag - 2bf + ce = 0, \quad bg - 2cf + de = 0$$

und besitzen daher nur eine absolute algebraische Invariante:

$$(11)\quad I = \frac{1}{(eg-f^2)^2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ e & f & g \end{vmatrix} = \frac{2}{e}\frac{ac-b^2}{eg-f^2} = \frac{1}{f}\frac{ad-bc}{eg-f^2} = \frac{2}{g}\frac{bd-c^2}{eg-f^2},$$

deren identisches Verschwinden die Regelflächen kennzeichnet.[98])

Mit dem Flächenelement affinkovariant verbunden ist die *Affinnormale,* d. h. die Parallele zum *Affinnormalenvektor*

$$(12)\qquad \mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}\Delta_2\mathfrak{x}$$

durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$. Die Fläche $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$ heißt das *Krümmungsbild* der gegebenen Fläche.[99])

Indem man $\mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_{vv}$ einerseits, $\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v$ andererseits durch die wegen

$$(13)\qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) = \sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}$$

linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{y}$ ausdrückt, erhält man die beiden Systeme von *Grundgleichungen der affinen Flächentheorie*

$$(14)\quad \mathfrak{x}_{uu} = \left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \frac{ag-bf}{eg-f^2}\right)\mathfrak{x}_u + \left(\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \frac{be-af}{eg-f^2}\right)\mathfrak{x}_v + e\mathfrak{y}, \text{ usw.}^{100)}$$

$$(15)\quad \mathfrak{y}_u = \frac{g\lambda - f\mu}{eg-f^2}\mathfrak{x}_u + \frac{e\mu - f\lambda}{eg-f^2}\mathfrak{x}_v; \quad \mathfrak{y}_v = \frac{g\mu - f\nu}{eg-f^2}\mathfrak{x}_u + \frac{e\nu - f\mu}{eg-f^2}\mathfrak{x}_v.$$

---

97) $\psi = 0$ gibt die Richtungen von *Darboux* (Nr. 11). ψ verschwindet identisch für die Flächen zweiter Ordnung und nur für diese (*G. Pick*[95]). Ein äquivalenter Satz findet sich bei *H. Maschke,* Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1902), p. 484. Vgl. auch *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, §§ 44, 84.

98) Siehe z. B. *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 69 (1917), p. 412; 70 (1918), p. 30. — Vom projektiven Standpunkt aus bespricht φ, ψ, I: *R. Weitzenböck,* Ber. Wien 127 (1918), p. 1529. Metrische geometrische Deutung von I bei *G. Fubini,* Lincei Rend. (5) 29^I (1920), p. 87.

99) *A. Demoulin,* Paris C. R. 146 (1908), p. 413; *W. Blaschke*[95]). Wann es sich auf eine Kurve oder einen Punkt reduziert, erörtert *L. Berwald*, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 70.

100) Die nicht angeschriebenen Gleichungen ergeben sich aus (14) durch zyklische Vertauschung von $ag-bf,\ bg-cf,\ cg-df;\ be-af,\ ce-bf,\ de-cf;\ e, f, g$ und der oberen Zeiger 11, 12, 22 in den *Christoffel*schen Symbolen.

In (15) ist

$$(16)\qquad \lambda = \frac{(\mathfrak{y}_{uu}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}},\quad \mu = \frac{(\mathfrak{y}_{uv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}},\quad \nu = \frac{(\mathfrak{y}_{vv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}}.$$

Die affinkovariante quadratische Differentialform

$$(17)\qquad \lambda\, du^2 + 2\mu\, du\, dv + \nu\, dv^2$$

gibt, gleich Null gesetzt, die Kurven, die auf der gegebenen Fläche den Asymptotenlinien des Krümmungsbildes entsprechen.

Eine weitere affinkovariante Differentialform ist die *Jacobi*sche Form von (8) und (17):

$$(18)\; p\,du^2 + 2q\,du\,dv + r\,dv^2 = \frac{(f\lambda - e\mu)du^2 + (g\lambda - e\nu)du\,dv + (g\mu - f\nu)dv^2}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}}.$$

Durch ihre Koeffizienten lassen sich auch die *Integrabilitätsbedingungen* der Grundgleichungen (14), (15) verhältnismäßig einfach ausdrücken:

$$(19)\left\{\begin{aligned} p &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}}\left[a_v - b_u - 2a\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} - 2b\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + 2b\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + 2c\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right],\\ q &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}}\left[b_v - c_u - a\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} - b\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} + c\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + d\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right],\\ r &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}}\left[c_v - d_u - 2b\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} - 2c\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} + 2c\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + 2d\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right]; \end{aligned}\right.$$

$$(20)\left\{\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}\,H_u &= p_v - q_u - p\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + q\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\\ &\quad + r\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{eg-f^2}\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ e & f & g\end{vmatrix},\\ \sqrt{\varepsilon(eg-f^2)}\,H_v &= q_v - r_u - p\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} + q\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\\ &\quad + r\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{eg-f^2}\begin{vmatrix}b & c & d\\ p & q & r\\ e & f & g\end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Die hier auftretende Funktion H ist durch (22) erklärt.

Gibt man eine quadratische Differentialform $\varphi = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$, $(eg - f^2 \neq 0)$, und eine zu ihr apolare kubische $\psi = a\,du^3 + 3b\,du^2 dv + 3c\,du\,dv^2 + d\,dv^3$ gemäß den Bedingungen (19), (20), so existiert stets eine bis auf inhaltstreue Affinitäten bestimmte Fläche mit φ und ψ als affinen Grundformen (*J. Radon*).[95]

Entsprechend der gewöhnlichen Krümmungstheorie der Flächen kann man eine *affine Krümmungstheorie*[101]) aufstellen, indem man an Stelle der Normalen überall die Affinnormale treten läßt und auf

101) *W. Blaschke*, Leipz. Ber. 69 (1917), p. 182; Differentialgeometrie II, § 61.

dieser mit dem Affinnormalenvektor als Einheit mißt. Sie läßt sich als Theorie der algebraischen Simultaninvarianten der Differentialformen (8) und (17) auffassen. Nullsetzen der Differentialform (18) gibt die Differentialgleichung der *Affinkrümmungslinien.* Die *affinen Hauptkrümmungshalbmesser* ϱ_1, ϱ_2 bestimmen sich aus der Gleichung

$$(21)\qquad (\lambda\nu - \mu^2)\varrho^2 + (\lambda g - 2\mu f + \nu e)\varrho + eg - f^2 = 0.$$

Die Funktionen

$$(22)\qquad \begin{cases} H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\lambda g - 2\mu f + \nu e}{eg - f^2} = I + S, \\ K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\lambda\nu - \mu^2}{eg - f^2} \end{cases}$$

heißen die *mittlere Affinkrümmung* und das *affine Krümmungsmaß* der Fläche. In (22) bedeutet S das *Gauß*sche Krümmungsmaß der ersten Grundform φ.

Die einfachste inhaltstreu-affine Integralinvariante ist die *Affinoberfläche*

$$(23)\qquad \Omega = \iint \sqrt{\varepsilon(eg - f^2)}\, du\, dv.$$

W. Blaschke und *J. Radon* haben auch die Formeln der affinen Flächentheorie in Ebenenkoordinaten angegeben[102]); hier ordnen sich die längst bekannten Gleichungen von *A. Lelieuvre*[103]) auf natürliche Weise ein. *G Pick*[95]) verdankt man kanonische Entwicklungen einer nicht-abwickelbaren Fläche in der Umgebung eines nicht-parabolischen Punktes. In geometrischer Hinsicht stehen die affinen Invarianten einer Fläche in naher Beziehung zu denen ihrer Schmiegflächen zweiter Ordnung, insbesondere zu der sogenannten *Lie*schen F_2[104]) (Nr. **11**).

102) *W. Blaschke*, Leipz. Ber. 70 (1918), p. 36; *J. Radon*, ebenda, p. 106. Vgl. auch *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, § 52.

103) *A. Lelieuvre,* Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 126.

104) *A. Demoulin,* Paris C. R. 147 (1908), p. 493, 565; *S. W. Reaves,* Giorn. di mat. 55 (1917), p. 139 = Diss. Univ. Chicago (Regelflächen); *L. Berwald,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 63; 10 (1921), p. 160; *P. Franck,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 289; *W. Blaschke*, Differentialgeometrie II, §§ 42, 81—83. Vgl. dazu auch *P. Franck,* Mitt. Math. Ges. Hamburg 5, Heft 3 (1914), p. 113. — *Sonstige geometrische Anwendungen: W. Blaschke,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 336; Differentialgeometrie II, § 44; vgl. auch *H. Brunn,* Über Kurven ohne Wendepunkte, München 1889, p. 59 (Flächen mit zentrischen ebenen Schnitten). *W. Blaschke,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 115; Differentialgeometrie II, § 45; vgl. auch *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 69 (1916), p. 50 (Flächen mit ebenen Schattengrenzen). *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, § 89 (Flächen mit einer transitiven Gruppe inhaltstreuer Affinitäten) *E. Salkowski,* Math. Ztschr. 17 (1923), p. 144 (Flächen mit einer Schar ebener Eigenschattengrenzen). *E. Čech*[95]) (Kurven auf Flächen). — Vgl. auch die folgenden Fußnoten.

Von besonderen affininvariant erklärten Flächenfamilien nennen wir:

1. Die *Affinminimalflächen*[105]), d. h. die Extremalen des Variationsproblems $\delta\Omega = 0$. Sie sind durch $H = 0$ gekennzeichnet und weisen auch sonst viele Analogien zu den gewöhnlichen Minimalflächen auf.[106]) Zu ihnen gehören die *Regelflächen mit Richtebene* und die *uneigentlichen Affinsphären*[107]), d. h. die Flächen mit lauter parallelen Affinnormalen.

2. Die *Flächen mit $H =$ konst.* ($\neq 0$).[108]) Zu ihnen gehören die *eigentlichen Affinsphären*[109]), d. h. die Flächen, deren Affinnormalen sämtlich durch einen eigentlichen Punkt gehen.

3. Die *Translationsflächen*[110]), unter denen wieder die affinsphärischen besonderes Interesse bieten.

---

105) auch *paraboloidische* Flächen, d. h. Flächen, deren sämtliche *Lie*sche F_2 Paraboloide sind. *Literatur: G. Darboux,* Surfaces 3 (1894), p. 368; 4 (1896), p. 512; (*Bianchi-Lukat,* 1. Aufl., p. 323ff.; 2. Aufl., p. 329ff.); Paris C. R. 140 (1905), p. 697; Bull. sc. math. (2) 29 (1905), p. 109; *E. Estanave,* ebenda, p. 225; *A. Demoulin,* Paris C. R. 147 (1908), p. 493; *E. Guillemain,* Nouv. Ann. (4) 13 (1913), p. 262; *P. Franck,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 23 (1914), p. 49, 343; 29 (1920), p. 75; 30 (1921), p. 145; Mitt. Math. Ges. Hamburg 6, Heft 2 (1922), p. 47; *L. Berwald,* Math. Ztschr. 8 (1920), p. 73; *W. Blaschke,* Hilbert-Festschr. u. Math. Ztschr. 12 (1922), p. 262; *W. Krause,* Diss. Hamburg 1922 (Auszug); *G. Thomsen,* Abh. Math. Sem. Hamburg 2 (1923), p. 71. Siehe auch *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, §§ 68—71.

106) *W. Blaschke* [105]).

107) Diese sind die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 =$ konst. ($\neq 0$). Sie gehören zu den Flächen mit unbestimmten Leitkurven [*E. J. Wilczynski,* Math. Ann. 76 (1914), p. 129; vgl. Nr. 11]. *Literatur: G. Darboux,* Surfaces III (1894), p. 273; *E. Goursat,* Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 43; *A. Demoulin,* Paris C. R. 147 (1908), p. 413, 493; *J. Radon,* Leipz. Ber. 70 (1918), p. 147 (Regelflächen); *G. Scheffers,* Math. Ztschr. 1 (1919), p. 112; *P. Franck,* Mitt. Math. Ges. Hamburg 6, Heft 1 (1921), p. 1. Vgl. *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, § 78.

108) *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 69 (1917), p. 191ff.; Differentialgeometrie II, §§ 74, 80.

109) Als *S-Flächen* zuerst untersucht von *G. Tzitzéica,* Paris C. R. 144 (1907), p. 1257; 145 (1907), p. 1132; 146 (1908), p. 165; Palermo Rend. 25 (1908), p. 180; 28 (1909), p. 210; Atti 4. Congr. Rom. 1908 (1909), tom. 2, p. 304. Außerdem vgl. *A. Demoulin,* Paris C. R. 146 (1908), p. 1381; 147 (1908), p. 493; *W. Blaschke,* Leipz. Ber. 69 (1917), p. 167; 70 (1918), p. 27; *J. Radon,* ebenda, p. 147 (Regelflächen); *K. Reidemeister,* Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 136; *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, §§ 76, 77, 79, 80, 88.

110) Vgl. *K. Żorawski,* Bull. Ac. sc. Krakau 1906, p. 865; *K. Reidemeister,* Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 127 und §§ 85—87 in *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II; *G. Scheffers,* Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 138. — Wegen nicht-affingeometrischer Literatur über diese Flächenklasse siehe III D 5, Nr. 6 (*R. v. Lilienthal*).

Auf die zahlreichen der affinen Differentialgeometrie angehörigen Ergebnisse über *Eiflächen*, die namentlich *W. Blaschke* erhalten hat, können wir hier nur hinweisen.[111])

Die Grundformeln für die *Differentialgeometrie der* V_{n-1} *im* R_n gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten hat *L. Berwald*[112]) entwickelt, die *affine Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen im* R_3 *W. Krause*.[113])

Differentialinvarianten der Flächen gegenüber der *allgemeinen affinen Gruppe* des R_3 werden bei *A. Tresse*[114]) und *K. Żorawski*[114]) berechnet. Nach *G. Fubini*[115]) kommt die Differentialgeometrie der nicht-geradlinigen Flächen gegenüber dieser Gruppe auf die Theorie der simultanen algebraischen und differentiellen Invarianten der drei Differentialformen

$$\varphi = I\cdot\varphi, \quad \bar{\psi} = I\cdot\psi, \quad \bar{\chi} = d\log I \tag{24}$$

heraus, eine Bemerkung, die *L. Berwald*[116]) auf Hyperflächen im R_n übertragen hat.

V. Projektive Differentialgeometrie.

Im folgenden wird nur über jene Untersuchungen berichtet, die sich unmittelbar oder mittelbar auf projektive Differentialinvarianten beziehen, bei Mannigfaltigkeiten von mehr als einer Dimension also

111) *W. Blaschke*, Leipz. Ber. 68 (1916), p. 217; 69 (1917), p. 166, 207, 306; 70 (1918), p. 18; Differentialgeometrie II, § 73 ff.; *A. Winternitz*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 99; *T. Kubota*, Sc. Rep. Tôhoku Univ. Sendai 12 (1923), Nr. 1. — Nur z. T. hängen mit der Theorie der affinen Differentialinvarianten zusammen verschiedene kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoides bei *W. Blaschke* und *G. Hessenberg*. Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 26 (1917), p. 215; *W. Blaschke*, ebenda, p. 220; Leipz. Ber. 69 (1917), p. 421; 70 (1918), p. 341; Differentialgeometrie II, § 72; *W. Groß*, Leipz. Ber. 70 (1918), p. 38; *W. Mandlinger*, Diss. Hamburg 1922 (Auszug). — Ein *affines Gegenstück zur Unverbiegbarkeit der Kugel* behandelt *W. Blaschke*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 151; Differentialgeometrie II, § 90.

112) *L. Berwald*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 89 und §§ 65, 66 in *W. Blaschke*, Differentialgeometrie II. — *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 17 (1923), p. 161, 183 ordnet die affine Differentialgeometrie der m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ($m < n - 1$) im R_n in die Theorie der höheren Übertragungen (Nr. 31) ein und gibt zugleich die Verallgemeinerung auf gekrümmte affin-zusammenhängende (Nr. 28) n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Vgl. Fußnote [420]).

113) *W. Krause*, Diss. Hamburg 1922 (Auszug).

114) *A. Tresse*, Acta math. 18 (1894), p. 69 (Absolute Differentialinv. 4. Ordnung und kanonische Entwicklung); *K. Żorawski*, Bull. Ac. sc. Krakau 1906, p. 865; Prace mat.-fis. 18 (1907), p. 147 (Vollst. System von Differentialinvarianten m^{ter} Ordnung). — Vgl. auch *R. Mehmke*, Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 56.

115) *G. Fubini*, Lincei Rend. Rom (5) 29^{I} (1920), p. 87.

116) *L. Berwald*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 90.

im wesentlichen über die Arbeiten von *E. J. Wilczynski* und *G. Fubini*, sowie die an sie anschließenden. Unberücksichtigt bleiben namentlich die Schriften über projektive Differentialgeometrie solcher Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen, die der Richtung von *C. Segre* angehören.[117])

10. Projektive Differentialgeometrie der Kurven. Die Theorie der Differentialinvarianten einer Kurve im R_n, die keinem R_{n-1} angehört, gegenüber der Gruppe der nicht-singulären Kollineationen des R_n hängt aufs engste zusammen einerseits mit der Invariantentheorie der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung[118]), andererseits mit der von *J. J. Sylvester*[119]) für $n = 2$ begründeten, von *E. B. Elliott*[120]) auf $n \geqq 3$ erweiterten Theorie der Reziprokanten.

Mit der projektiven Differentialgeometrie der Kurven in der Ebene und im dreidimensionalen Raum hat sich zuerst *G. H. Halphen* beschäftigt. Die projektive Theorie der Raumkurven hat später *E. J. Wil-*

---

117) Es seien hier wenigstens einige dieser Arbeiten genannt: *C. Segre,* Atti Acc. Torino 42 (1907), p. 1047; Palermo Rend. 30 (1910), p. 87 (u. 346); Lincei Rend. Rom (5) 30^I (1921), p. 67, 200, 227; Atti Acc. Torino 56 (1921), p. 143; 57 (1922), p. 575; *G. Scorza,* Atti Acc. Torino 45 (1910), p. 119; *E. Cairo,* Periodico di mat. 27 (1912), p. 252; 28 (1913), p. 97, 155; *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 46 (1911), p. 345; Bull. Amer. Math. Soc. (2) 18 (1912), p. 284; Annals of Math. (2) 13 (1912), p. 89; *C. H. Sisam,* Amer. J. Math. 33 (1911), p. 97; *A. Terracini,* Palermo Rend. 31 (1911), p. 392; 33 (1912), p. 176; Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 411; 49 (1914), p. 184; 51 (1916), p. 443; Lincei Rend. Rom (5) 29^II (1920), p. 130, 186; *E. Artom,* Periodico di mat. 28 (1912), p. 59; *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom (5) 21^I (1912), p. 697; Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 393; Palermo Rend. 37 (1914), p. 305; Atti Ist. Veneto 73 (1913), p. 579; Rend. Ist. Lomb. 47 (1914), p. 177; Lincei Rend. Rom. (5) 25^I (1916), p. 493, 576; Palermo Rend. 46 (1922), p. 91; *A. Ranum,* Ann. di mat. (3) 19 (1913), p. 205; Amer. J. Math. 37 (1915), p. 117; Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 89. — Vgl. auch den Bericht von *E. Bompiani,* Proc. Intern. Congr. Cambridge 1912, vol. 2 (1913), p. 22, ferner III C 7, Nr. 29, 37 (*C. Segre*), sowie den Anhang von *A. Terracini* in *G. Fubini-E. Čech,* Geometria proiettivo-differenziale.

118) Siehe II A 4 b), Nr. 34 (*E. Vessiot*); I B 2, Nr. 20 (*W. Fr. Meyer*).

119) *J. J. Sylvester,* Mess. of Math. 15 (1885), p. 74, 88; Paris C. R. 101 (1885), p. 1042, 1110, 1225, 1460; Amer. J. Math. 8 (1886), p. 196; 9 (1887), p. 1, 113, 297; 10 (1888), p. 1. Wegen weiterer Literatur siehe *W. Fr. Meyer,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 1 (1892), p. 23 und I B 2, Nr. 20. — *O. A. Stöckert*, Progr. Realg. Chemnitz 1895, erörtert das Verhältnis der Reziprokantentheorie zur Theorie der projektiven Differentialinvarianten.

120) *E. B. Elliott,* Proc. Math. Soc. London 17 (1886), p. 172; 18 (1887), p. 141; 19 (1888), p. 6, 377; 20 (1889), p. 131; Phil. Trans. London 181 (1890), p. 19. Vgl. auch *A. R. Forsyth,* Phil. Trans. London 180 (1889), p. 71.

czynski weiter entwickelt und mit seiner Theorie der Regelflächen (Nr. **11**) in Verbindung gebracht.

Die Grundformeln der projektiven Differentialgeometrie der *Kurven in der Ebene*[121]) lassen sich in sehr einfacher Weise ableiten. Jede solche krumme Linie $x = x(t)$[122]), die kein Kegelschnitt ist, besitzt einen vom Kurvenelement 5. Ordnung abhängenden natürlichen Parameter

$$(1)\quad \begin{cases} p = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt[3]{\Phi(t)}}{(012)}\,dt; \\ \Phi(t) = \frac{1}{2}\left[9(012)^2\{(015) + 10(123) + 5(024)\}\right. \\ \qquad \left. - 45(012)(013)\{2(023) + (014)\} + 40(013)^3\right], \end{cases}$$

ihren *Projektivbogen*.[123]) Bei Einführung von p als unabhängige Veränderliche auf der Kurve und von *normierten Koordinaten*[123])

$$(2)\qquad X_i = \frac{x_i}{\sqrt[3]{(x\,x'\,x'')}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

bestehen die Identitäten

$$(3)\qquad (X X' X'') = 1, \quad (X' X'' X''') + \frac{1}{2}\frac{d}{dp}(X X'' X''') = 1.$$

121) *G. H. Halphen*, Thèse, Paris 1878; einzelne Sätze schon J. de math. (3) 2 (1876), p. 257, 371. — *Weitere Literatur: J. J. Sylvester*, Amer. J. Math. 8 (1886), p. 196; 9 (1887), p. 1, 113, 297; 10 (1888), p. 1; *E. Study*, Leipz. Ber. 53 (1901), p. 348 ff. (Normierte Koordinaten und Projektivbogen); *G. Pick*, Wien. Ber. 115 (1906), p. 155 ff. (Begleitendes Dreieck); *A. M. Harding*, Giorn. di Mat. 54 (1916), p. 185 = Diss. Univ. Chicago 1916; *K. Kurosu*, Tôhoku Math. J. 12 (1917), p. 17 (Projektiv-kovariante Kurven); *L. Berwald*, Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 30 (1921), p. 110; *G. Sannia*, Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 450, 503; (5) 31^{II} (1922), p. 17, 432. — Einzelfragen behandeln: *S. W. Reaves*, Ann. of math. (2) 15 (1914), p. 20 (W-Kurven); *J. A. Nyberg*, Amer. J. Math. 35 (1913), p. 453 (Rationale C_3); *W. W. Denton*, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 297 (Oskulierende C_4). — Vgl. auch die Darstellung bei *E. J. Wilczynski*, Differential geometry, Kap. III und die folgenden Fußnoten. Der Text folgt *L. Berwald*, a. a. O.

122) x bedeutet die Zusammenfassung der drei homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes; analog $X, P, \ldots$; $(ikl) = \left|\frac{d^i x_1}{dt^i}\ \frac{d^k x_2}{dt^k}\ \frac{d^l x_3}{dt^l}\right|$; $x^{(i)} = \frac{d^i x}{dp^i}$; $X^{(i)} = \frac{d^i X}{dp^i}$; $(x^{(i)} x^{(k)} x^{(l)}) = |x_1^{(i)} x_2^{(k)} x_3^{(l)}|$; $(X^{(i)} X^{(k)} X^{(l)}) = |X_1^{(i)} X_2^{(k)} X_3^{(l)}|$.

123) Zuerst (bis auf einen unwesentlichen Zahlenfaktor) bei *E. Study*[121]). Geometrische Deutung bei *E. J. Wilczynski*, Proc. nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 248; Palermo Rend. 42 (1917), p. 128. — Oft ist es zweckmäßiger, einen anderen Parameter τ zu benutzen, nämlich jenen, für den

$$\left(X \frac{dX}{d\tau} \frac{d^2X}{d\tau^2}\right) = 1, \quad \left(X \frac{d^2X}{d\tau^2} \frac{d^3X}{d\tau^3}\right) = 0$$

ist. Seine Bestimmung erfordert die Integration einer *Riccati*schen Differentialgleichung. Eine analoge Bemerkung gilt für $n > 2$. Vgl. etwa *E. J. Wilczynski*, Differential geometry, p. 25.

Die Determinante

$$(4)\qquad K = (XX''X''')$$

ist dann die einzige wesentliche absolute Differentialinvariante der Kurve, ihre *Projektivkrümmung*. Sie ist von siebenter Ordnung. Die Punkte

$$(5)\qquad P = X, \quad Q = X', \quad R = X'' + \tfrac{1}{2}KX$$

bilden ein mit der Kurve projektiv-invariant verbundenes Dreieck von niedrigster (sechster) Ordnung. Für ihre Ableitungen nach p gelten die Gleichungen

$$(6)\qquad P' = Q, \quad Q' = R - \tfrac{1}{2}KP, \quad R' = P - \tfrac{1}{2}KQ.$$

$K =$ konst. kennzeichnet die W-Kurven, $K = 0$ insbesondere die äquianharmonischen.[124]) Außerdem sind untersucht worden[121]): die Kurven dritter Ordnung, die in einem Punkte einer beliebigen Kurve oskulierende W-Kurve und die oskulierende Kurve dritter Ordnung, sowie die achtpunktig berührenden Kurven dritter Ordnung.

Für die gewundenen *Kurven im* R_3[125]) lag bis Ende 1922 keine gleich einfache Herleitung der Grundformeln der projektiven Differentialgeometrie vor. Wir beschränken uns daher auf einige kurze Angaben.

Als *Projektivbogen* für eine gewundene Linie $x = x(t)$[126]) im R_3, die keine Gewindekurve (Kurve eines linearen Komplexes) ist, kommt — bis auf eine multiplikative, unbestimmt bleibende Konstante — die Integralinvariante

$$(7)\qquad \begin{cases} p = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\Psi(t)}}{(0123)}\,dt; \\ \Psi(t) = 4\{(0126) + 4(0135) + 5(0234)\}(0123)^2 \\ \qquad -6\{3(0125) + 5(0134)\}(0123)(0124) + 15(0124)^3 \end{cases}$$

in Betracht. Absolute Differentialinvarianten existieren erst von der Ordnung 7 an, und zwar (im wesentlichen) für jede der Ordnungen 7,

124) d. h. die kollinear-transformierten der logarithmischen Spirale, die ihre Radienvektoren unter 30° schneidet. Über W-Kurven vgl. auch III D 4, II. (*G. Scheffers*).

125) *Literatur: G. H. Halphen*, J. Éc. Polyt. 28, cah. 47 (1880), p. 1 *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 99; Differential geometry, Kap. XIII, XIV; *G. Sannia*, Ann. di mat. (4) 1 (1923), p. 1. — Außerdem: *T. M. Simpson*, Diss. Univ. Chicago 1920 (Zusammenhänge zwischen projektiver und metrischer Differentialgeometrie der Raumkurven); *E. Čech*, Rozpravy Ak. Prag 30 (1921), Nr. 15 (tschech.). Vgl. auch *K. Kurosu*[121]).

126) x bedeutet hier die Zusammenfassung der vier homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes; $(iklm) = \left| \frac{d^i x_1}{dt^i} \frac{d^k x_2}{dt^k} \frac{d^l x_3}{dt^l} \frac{d^m x_4}{dt^m} \right|$.

8 ... genau zwei. Auch eine kanonische Entwicklung der Kurve sowie verschiedene begleitende Tetraeder sind angegeben worden.

Die Kurven mit festen absoluten Differentialinvarianten siebenter Ordnung sind die räumlichen *W*-Kurven. Außer ihnen sind auch die Raumkurven dritter und vierter Ordnung, die oskulierende *W*-Kurve, die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung, der oskulierende lineare Komplex[127]), sowie gewisse mit der Kurve invariant-projektiv verknüpfte Regelflächen mit den Methoden der projektiven Differentialgeometrie behandelt worden.

Die projektiven Differentialinvarianten der *Kurven im* R_n hat *L. Berzolari*[128]) untersucht.

Schließlich erwähnen wir noch eine Reihe von Arbeiten, die sich mit *simultanen projektiven Differentialinvarianten von zwei oder mehr Kurven* (und gegebenenfalls auch von Punkten, Geraden und Ebenen) in besonderen Lagebeziehungen befassen.[129]) Zum Teil lassen sich diese Untersuchungen als solche über projektive Invarianten zweier Kurvenelemente zweiter Ordnung auffassen.[130])

11. Die Methode von Wilczynski in der projektiven Differentialgeometrie der Flächen, Geradenkongruenzen und Kurvennetze. Die Untersuchungen über projektive Differentialinvarianten und deren Anwendungen in der Geometrie, die an *E. J. Wilczynski* anschließen, sind so zahlreich, daß wir uns hier darauf beschränken müssen, einerseits die angewandten Methoden zu skizzieren, andererseits die wichtigsten geometrischen Begriffe zu erörtern, die in diesen Untersuchungen auftreten.

Allgemein läßt sich die Methode von *Wilczynski* als eine *Methode der Differentialgleichungen* kennzeichnen. Dem Gebilde, das auf seine

---

127) *E. J. Wilczynski,* Differential geometry, Kap. XIII, § 4; vgl. auch *R. Weitzenböck,* Ber. Wien 127 (1918), p. 973 ff.

128) *L. Berzolari,* Ann. di math. (2) 26 (1897), p. 1. — Über projektive Differentialgeometrie der Kurven im R_4 vgl. *F. P. White,* Proc. Cambr. Phil. Soc. 21 (1922), p. 216.

129) *H. J. Stephen Smith,* Proc. London Math. Soc. 2 (1867), p. 212; *R. Mehmke,* Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 56, 206 = Mitt. math.-nat. Württemberg 4 (1891), p. 38; *E. Woelffing,* Ztschr. Math. Phys. 38 (1893), p. 237 [vgl. auch ebenda 40 (1895), p. 41 f.]; *E. O. Lovett,* Annals of math. 12 (1898), p. 79; Paris C. R. 127 (1898), p. 346; Bull. sc. math. (2) 23 (1899), p. 10; Amer. J. Math. 21 (1899), p. 168; 22 (1900), p. 46; *C. L. Bouton,* Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1898), p. 313; *E. Study,* Leipz. Ber. 53 (1901), p. 338.

130) Vgl. dazu namentlich — für $n = 2$ —: *E. Study,* Leipz. Ber. 53 (1901), p. 338. Über Kurven- und Flächenelemente höherer Ordnung siehe III D 7, Nr. 15 (*H. Liebmann*), III A B 7, Nr. 35 (*E. Müller*).

differentiellen projektiven Eigenschaften hin untersucht werden soll, wird zunächst ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen zugeordnet, das es bis auf nicht-singuläre Kollineationen festlegt. Sodann werden die invarianten differentiellen Bildungen (Differentialinvarianten und -kovarianten) des Systems aufgesucht, als invariante Bildungen des betrachteten Gebildes gegenüber der Gruppe der nichtsingulären Kollineationen aufgefaßt, und schließlich die projektiven Eigenschaften des Gebildes zu diesen invarianten Bildungen in Beziehung gesetzt.[131])

Über die projektive Differentialgeometrie der *Flächen im* R_3[132]) lagen schon vor *E. J. Wilczynski* einige Ergebnisse vor. *Moutard*[133]) hat bereits 1863 die Schmiegkegelschnitte der ebenen Schnitte einer Fläche durch eine Flächentangente untersucht. Nach *S. Lie*[134]) fallen die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung der asymptotischen Regelflächen[135]) einer nicht geradlinigen Fläche für jeden Flächenpunkt zusammen (*Liesche* F_2 *des Flächenpunktes*).[136]) *G. Darboux*[137]) verdankt man außer einer kanonischen Reihenentwicklung[138]) die Einführung dreier projektiv-invarianten Tangenten in jedem Punkte der Fläche sowie der entsprechenden Kurvenscharen (*Tangenten und Kurven von*

---

131) Vgl. *E. J. Wilczynski*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 19 (1913), p. 331, wo der Grundgedanke der Methode für V_m im R_n auseinandergesetzt wird.

132) Beziehungen zwischen metrischen und projektiven Eigenschaften einer Fläche hat *A. Voss*, Math. Ann. 39 (1891), p. 179 behandelt.

133) S. *Moutard*, Paris C. R. 91 (1880), p. 1055; vgl. auch *J. V. Poncelet*, Applications d'analyse et de géométrie, t. 2 (1864), p. 363 f.; *M. Chasles*, Rapport sur les progrès de géométrie, Paris 1871, p. 354. Unabhängig wiedergefunden von *G. Darboux*, Bull. sc. math. (2) 4 (1880), p. 348; Auszug Paris C. R. 91 (1880), p. 969 und *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 279. Siehe auch *E. Čech*, Publ. Fac. sc. Univ. Masaryk, Brünn 1921, Nr. 3, 4.

134) *S. Lie* 1878: Ges. Abh. 3 (1922), p. 718; Forh. Selsk. Christ. 1882, Abh. 21. — Vgl. außer den in [104]) genannten Arbeiten auch noch *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 80; *P. Franck*, Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 13 (1914), p. 110; *G. Scheffers*, Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 14 (1915), p. 68; *F. Engel* in *S. Lie*, Ges. Abh. 3 (1922) p. 753.

135) *Asymptotische Regelflächen* (osculating ruled surfaces) heißen die Regelflächen, die von den Tangenten der einen Schar von Asymptotenlinien längs einer Asymptotenlinie der anderen Schar gebildet werden.

136) Bei den amerikanischen Autoren *osculating quadric*.

137) *G. Darboux*[133]); vgl. auch *E. J. Wilczynski*[133]).

138) Eine andere kanonische Entwicklung, von *Darboux* nur erwähnt, findet sich zuerst bei *A. Tresse*, Acta math. 18 (1894), p. 1, dann bei *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 79. Vgl. auch *G. Fubini*, Ann. di mat. (3) 25 (1916), p. 239; *G. M. Green*, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 115.

Darboux).[139] Zu den konjugierten drei Tangenten ist später auf anderem Wege *C. Segre*[140]) gelangt (*Tangenten von Segre*).

E. J. Wilczynski führt die projektive Theorie der nicht-abwickelbaren *Regelflächen* im R_3[141]) auf das System

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p_{11}(x)\dfrac{dy}{dx} + p_{12}(x)\dfrac{dz}{dx} + q_{11}(x)y + q_{12}(x)z = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} + p_{21}(x)\dfrac{dy}{dx} + p_{22}(x)\dfrac{dz}{dx} + q_{21}(x)y + q_{22}(x)z = 0 \end{cases}$$

von gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurück. Vier Paare $y_i = y_i(x)$, $z_i = z_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ von Lösungen, für die $\left(yz\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dz}{dx}\right) \neq 0$[142]) ist, werden als die homogenen Koordinaten

139) Bei *G. Darboux tangentes* bzw. *lignes d'osculation quadrique.* Jene sind so erklärt: Jeder Flächenpunkt P ist dreifacher Punkt für die Schnittkurve der Fläche mit einer in P oskulierenden F_2. Wenn die drei Tangenten dieser Schnittkurve in P zusammenfallen, so fallen sie notwendig in eine Tangente von *Darboux.* — *Darboux* bestimmt ferner die in vierter Ordnung berührende *Steiner*sche Fläche; siehe auch *E. J. Wilczynski*[133]).

140) *C. Segre,* Lincei Rend. Rom (5) 17II (1908), p. 405. Vgl. auch *G. M. Green,* Proc. Nat. Ac. 4 (1918), p. 346; Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 140; *L. Berwald,* Math. Ztschr. 10 (1921), p. 164; *E. Čech,* Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 193. Eine Verallgemeinerung für Hyperflächen bei *E. Čech,* Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 274.

141) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 1, 343; 3 (1902), p. 60, 423; 4 (1903), p. 185; 5 (1904), p. 226, 438; 6 (1905), p. 75; Math. Ann. 58 (1904), p. 249; Verh. Intern. Math.-Kongr. Heidelberg 1905, p. 361 (der wesentliche Inhalt dieser Arbeiten ist zusammengefaßt in Differential geometry, Kap. IV bis XII); Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 293 (Kanonische Reihenentwicklung mit geometrischen Anwendungen). — *Weitere Literatur: G. Tzitzéica,* Paris C. R. 147 (1908), p. 173; Bull. sect. sc. Ac. Roumaine 3 (1915), p. 86 (R. mit zusammenfallenden Wendeknoten auf jeder Erzeugenden); *E. B. Stouffer,* Proc. London Math. Soc. (2) 11 (1913), p. 185 (R. im R_5); *W. W. Denton,* Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 175 = Diss. Univ. Chicago (Abwickelbare Flächen); *C. T. Sullivan,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 199 (Ersatz der Leitkongruenzen bei R.); *A. F. Carpenter,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 509 = Diss. Univ. Chicago (R., deren Wendeknotenkurve zwei ebene Zweige hat); Ann. di mat. (3) 26 (1917), p. 285 (Allgem. Theorie der R.); *S. W. Reaves,* Giorn. di mat. 55 (1917), p. 139 = Diss. Univ. Chicago (Metrische Eigenschaften der Wendeknoten); *E. Čech,* Publ. fac. sc. Univ. Masaryk, Brünn 1921, Nr. 4 (Allg. Theorie); Časopis 52 (1923), p. 18 (Eine besondere Klasse von R.); *J. W. Lasley jr.,* Diss. Univ. Chicago 1922 (Die sukzessiven Wendeknotenflächen einer R.); *E. P. Lane,* Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 281 (Paare von R., deren Erzeugende umkehrbar-eindeutig aufeinander bezogen sind); *E. Čech,* Časopis 53 (1923), p. 31 (tschech.) (Neue Methode für R. Verallgemeinerung auf Örter von ∞^1 R_n in R_{2n+1}).

142) $\left(yz\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dz}{dx}\right)$ bedeutet die vierreihige Determinante aus den Koordinaten der Punkte y, z, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$.

der Punkte zweier Kurven interpretiert; die Verbindungslinien entsprechender Punkte y, z bilden die zu betrachtende Regelfläche.

Die geometrischen Begriffe, die hier eine Rolle spielen, hängen zumeist mit den *Wendeknoten* (flecnodes) der Regelfläche zusammen, d. h. den Punkten, in denen sie eine (von der Erzeugenden verschiedene) vierpunktig berührende Tangente, die *Wendeknoten- oder Ruhtangente*, besitzt.[143]) Auf jeder Erzeugenden gibt es zwei (getrennte oder zusammenfallende) Wendeknoten, deren Ort die *Wendeknotenkurve* ist. Der Ort der Ruhtangenten ist die *Wendeknotenfläche.*[144]) *Oskulierende Regelschar erster Art* einer Erzeugenden g einer reellen Regelfläche heißt jene Regelschar des in g *oskulierenden Hyperboloides,* der die Erzeugende g selbst angehört. Die Geraden aller oskulierenden Regelscharen erster Art einer Regelfläche bilden deren *Wendeknotenkongruenz.* Die Brennfläche dieser Kongruenz besteht aus den beiden Mänteln der Wendeknotenfläche. Endlich sei noch das *Schmieggewinde* der Regelfläche in einer Erzeugenden g genannt, d. h. der lineare Komplex, der durch die Erzeugende g und vier konsekutive bestimmt ist.

Die projektive Differentialgeometrie einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen *nicht geradlinigen Fläche* im R_3 ist nach *E. J. Wilczynski*[145]) äquivalent mit der Invariantentheorie eines unbeschränkt integrabeln Systems der Form

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2a\dfrac{\partial y}{\partial u} + 2b\dfrac{\partial y}{\partial v} + cy = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2a'\dfrac{\partial y}{\partial u} + 2b'\dfrac{\partial y}{\partial v} + c'y = 0, \qquad (a'\cdot b \neq 0) \end{cases}$$

das noch auf eine kanonische Gestalt gebracht werden kann, in der $a = b' = 0$ ist. *E. J. Wilczynski*[146]) hat auch die entsprechende Theorie für eine auf beliebige Parameterkurven bezogene Fläche aufgestellt, *G. M. Green*[147]) sie vereinfacht.

Die wichtigsten geometrischen Begriffe der projektiven Flächentheorie rühren zum größten Teil von *E. J. Wilczynski*[148]), *G. M. Green*[149])

---

143) *A. Cayley,* Cambridge and Dublin Math. J. 7 (1852), p. 166 = Coll. Math. Papers II, p. 28; *G. Salmon,* Cambridge and Dublin Math. J. 4 (1849), p. 252.

144) Wendeknotenkurve und Wendeknotenfläche dürften zuerst von *A. Voß,* Math. Ann. 8 (1875), p. 54 untersucht worden sein.

145) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), p. 233.

146) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 176.

147) *G. M. Green,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 1.

148) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 79.

149) *G. M. Green,* Proc. Nat. Ac. sc. 3 (1917), p. 587; 4 (1918), p. 346; (Auszüge aus:) Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 79; *G. Fubini,* Atti Acc. Torino 53 (1918), p. 1032.

und *G. Fubini*[166]) her. Außer den Schmieggewinden der schon erwähnten asymptotischen Regelflächen sind vor allem wichtig die Leitlinien der Kongruenz erster Ordnung erster Klasse, die den Schmieggewinden der Asymptotenlinien gemeinsam ist (*Leitlinien von Wilczynski*). Die *Leitlinie erster Art d* liegt in der Tangentenebene des betreffenden Punktes P der Fläche, die *Leitlinie zweiter Art d'* geht durch P und ist zu d *reziprok*, d. h. konjugiert in bezug auf die *Lie*sche F_2 von P. Die Leitlinien erster bzw. zweiter Art bilden zwei Kongruenzen, die *Leitkongruenzen*, deren abwickelbare Flächen auf der gegebenen Fläche ein- und dasselbe Kurvennetz bestimmen, die *Leit- oder Direktrixkurven*. Allgemeiner kann man mit *Green* jeder Geraden l in der Tangentenebene von P ihre *reziproke* l' entsprechen lassen, die dann durch P geht. Ist jedem Punkte der Fläche eine Gerade l' durch ihn zugeordnet, so heißt die Kongruenz der Geraden l' *axial*, die der reziproken Geraden l *radial* auf die Fläche bezogen.[150]) Auf jeder Fläche gibt es eine Schar von ∞^2 Kurven derart, daß die Schmiegebenen aller Kurven der Schar in einem Flächenpunkt P die zugehörige Gerade l' einer *axial* auf die Fläche bezogenen Kongruenz enthalten (*axiale Vereinigungskurven*).[151]) Dualistisch stehen den axialen die *radialen Vereinigungskurven*[151]) gegenüber. Die einfachste *axial* auf die Fläche bezogene, zu ihr kovariante Geradenkongruenz, deren abwickelbare Flächen die gegebene Fläche in einem konjugierten Netze schneiden, ist die unabhängig von *G. M. Green*[149]) und (Nr. 12) *G. Fubini*[149]) gefundene *Kongruenz der Projektivnormalen* (pseudonormals). Die beiden Arten von Vereinigungskurven sind besondere Fälle von *hypergeodätischen Linien*, d. h. von Kurvenscharen, die durch eine Differentialgleichung der Gestalt:

$$(10)\quad \frac{d^2 v}{du^2} = A(u,v)\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + 3B(u,v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 3C(u,v)\frac{dv}{du} + D(u,v)$$

definiert sind. Solche Scharen von ∞^2 Kurven haben viele bemerkenswerte Eigenschaften.[152])

150) Die Begriffe bei *G. M. Green*[149]), die Bezeichnungen bei *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 223. Vgl. auch *G. Fubini*[149]).

151) *union curves* bzw. *adjoint union curves* bei *P. Sperry,* Amer. J. Math. 40 (1918), p. 213 = Diss. Univ. Chicago, die sie zuerst betrachtet hat. Vgl. auch *G. M. Green,* Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 207; *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom. (5) 32^{II} (1923), p. 376. Die Bezeichnungen des Textes bei *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 223.

152) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 223; *G. Fubini,* Lincei Rend. Rom (5) 32^{II} (1923), p. 321. Dort wird der Name „hypergeodätische Linie" in anderem Sinne gebraucht [vgl. [171a])]. — *Weitere Literatur über nichtgeradlinige Flächen,* außer der in [132]) bis [140]) und [145]) bis [151]) genannten: *E. J. Wil-*

Die ersten Untersuchungen über die projektive Differentialgeometrie der *Geradenkongruenzen* im R_3 gehen auf *E. Waelsch*[153]) zurück, bei dem insbesondere zuerst die einzige wesentliche projektive Differentialinvariante zweiter Ordnung einer Kongruenz auftritt. *E. J. Wilczynski*[154]) bringt die projektive Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen mit zwei getrennten Brennpunkten y, z auf jeder Kongruenzgeraden in Verbindung mit der Invariantentheorie eines unbeschränkt integrablen Systems der Gestalt

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial v} = m(u,v)z, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = a(u,v)y + b(u,v)z + c(u,v)\frac{\partial y}{\partial u} + d(u,v)\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = n(u,v)y, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a'(u,v)y + b'(u,v)z + c'(u,v)\frac{\partial y}{\partial u} + d'(u,v)\frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Diese Betrachtungsweise setzt die Bestimmung der abwickelbaren Flächen der Kongruenz bereits als geleistet voraus. Andere Methoden, die diese Voraussetzung vermeiden, sind von *G. M. Green*[155]), *J. M. Kinney*[155]) und *E. J. Wilczynski*[155]) angegeben worden.

---

czynski, Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1913), p. 421 (Besondere *W*-Flächen); Math. Ann. 76 (1914), p. 129 (Flächen mit unbestimmten Leitkurven); *G. M. Green,* Diss. Univ. Columbia 1913 (Dreifache Flächensysteme); *C. T. Sullivan,* Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), p. 167 = Diss. Univ. Chicago 1912 (Flächen, deren Asymptotenlinien Gewindekurven sind); *G. Tzitzéica,* Bull. Sect. sc. Ac. Roumaine 3 (1915), p. 200, 205 (Flächen auf deren beiden asymptotischen Regelflächen die Zweige der Wendeknotenkurve zusammenfallen); *C. H. Yeaton,* Ann. di mat. (3) 26 (1916), p. 1 = Diss. Univ. Chicago, Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1917), Nachtr. p. 7 (Flächen mit besonderen Eigenschaften der Leitkongruenzen); *F. M. Morrison,* Amer. J. Math. 39 (1917), p. 199 = Diss. Univ. Chicago (Projektive und metrische Differentialgeometrie); *R. Weitzenböck,* Ber. Wien 127 (1918), p. 1529 (Differentialinvarianten einer Fläche); *E. Čech,* Rozpravy Ak. Prag 30 (1921), Nr. 23, 36 (tschech.) (Gewisse Korrespondenzen zwischen zwei Flächen); Lincei Rend. Rom (5) 30^{II} (1921), p. 491; Publ. fac. sc. Univ. Masaryk, Brünn 1922, Nr. 11 (Flächen mit lauter ebenen Kurven von *Segre*); Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 154 (Flächen mit lauter ebenen Kurven von *Darboux*); (5) 31^{I} (1922) p. 496; Časopis 50 (1921), p. 219 (tschech.); Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 191 (Projektiv-differentialgeometrisches Studium des Flächenelementes 3. und 4. Ordnung). Vgl. auch [164]) bis [177]).

153) *E. Waelsch,* Ber. Wien 100 (1891), p. 158; vgl. auch *A. Demoulin,* Paris C. R. 118 (1894), p. 242; *E. Cosserat,* ebenda p. 335; *E. Waelsch,* ebenda p. 736; *A. Demoulin,* Paris C. R. 130 (1900), p. 1701; *L. Berwald,* Diss. München (Univ.) 1909, p. 25f. Auch die Schriften von *G. Koenigs*: Thèse, Paris 1882; La géométrie réglée et ses applications, Paris 1895, sind hier zu nennen. — Von *E. Waelsch* stammt u. a. der wichtige Begriff der *Begleitkomplexe* einer Kongruenz.

154) *E. J. Wilczynski,* Mém. publ. par la classe des sc., Ac. Belgique, Coll. en 4°, (2) 3 (1911), 86 p.

155) *G. M. Green,* Amer. J. math. 37 (1915), p. 240; *J. M. Kinney*. Diss. Univ. Chicago 1920; *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 157.

E. J. Wilczynski hat von seiner Theorie[154]) auch zahlreiche geometrische Anwendungen gemacht. So studiert er z. B. die projektiven Eigenschaften der beiden Mäntel der Brennfläche, der Kurven, die von den abwickelbaren Flächen der Kongruenz auf der Brennfläche ausgeschnitten werden, der Regelflächen und der *Laplace*schen Transformierten der Kongruenz. Später[156]) hat er die projektive Theorie der Kongruenzen (und der konjugierten Systeme auf einer Fläche) um einige wichtige Begriffe bereichert. Ein konjugiertes System auf einer Fläche schickt durch jeden Punkt P der Fläche zwei Kurven, deren Schmiegungsebenen in P sich in der *Achse* von P in bezug auf das konjugierte System schneiden. Die Achsen aller Punkte der Fläche bilden die *Achsenkongruenz*, deren abwickelbare Flächen die gegebene Fläche in den *Achsenkurven* schneiden. Diesen Begriffen stehen dualistisch gegenüber die Begriffe: *Strahl*, *Strahlkongruenz*, *Strahlkurven*.

Einige neuere Arbeiten[157]) sind liniengeometrischen Darstellungen z. T. projektiver Natur der Funktionen einer komplexen Veränderlichen gewidmet.[158])

Eine projektive Theorie der *Kurvenscharen und -netze in der Ebene* ist von *E. J. Wilczynski* und *G. M. Green* aufgestellt worden[159]), eine solche der *konjugierten Kurvennetze auf einer krummen Fläche* von

156) *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 311. — Vgl. auch *E. P. Lane*, Amer. J. Math. 43 (1921), p. 52 = Diss. Univ. Chicago (Konj. Systeme mit unbestimmten Achsenkurven); *C. A. Nelson*, Tôhoku Math. J. 20 (1922), p 217 = Diss. Univ. Chicago (Konj. Systeme mit konjugierten Achsenkurven).

157) *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 271; 21 (1920), p. 409; *G. E. C. Gibbens*, Diss. Univ. Chicago 1922; vgl. auch *F. E. Wood*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 407f.

158) *Weitere Literatur über Geradenkongruenzen: G. M. Green*[149]), *E. J. Wilczynski*[152]), *L. S. Shively*, Diss. Univ. Chicago 1921 (Metrisches Studium); *F. E. Wood*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 386 (Kongruenzen mit besonderen Eigenschaften); *C. Kendall*, Amer. J. Math. 45 (1923), p. 25 = Diss. Univ. Chicago (Besondere mit einer Fläche verknüpfte Kongruenzen). Vgl. auch [178]) bis [180]).

159) *E. J. Wilczynski*, Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911), p. 473; *G. M. Green*, Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), p. 277. Ferner: *J. O. Haßler*, Diss. Univ. Chicago 1916 (Netze von der Periode 3 bei Laplacescher Transformation); *A. L. Nelson*, Palermo Rend. 41 (1916), p. 238 = Diss. Univ. Chicago, Bull. Amer. Math. Soc. 22 (1916), p. 445 (Netze mit gleichen Laplace-Darbouxschen Invarianten). Metrisches Studium der ebenen Kurvennetze bei *H. R. Kingston*, Amer. J. Math. 38 (1916), p 407 = Diss. Univ. Chicago. — Über Netze von der Periode 3 bei Laplacescher Transformation vgl. auch *L. P. Eisenhart*, Amer. J. Math. 40 (1918), p. 127, und Fußnote [161]).

G. M. Green und *E. P. Lane*[160]). *E. J. Wilczynski* und *G. M. Green* haben auch für diejenigen ebenen Kurvennetze[161]) und konjugierten Netze auf einer krummen Fläche[162]), die gleiche *Laplace-Darboux*sche Invarianten besitzen, eine neue Kennzeichnung gegeben und die *isotherm-konjugierten Netze*[163]) zum erstenmal rein geometrisch charakterisiert.

12. Die Methode von Fubini in der projektiven Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten von zwei und mehr Dimensionen. *G. Fubini* hat die *Methode der simultanen Differentialformen* auf die projektive Differentialgeometrie zwei- und mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir geben hier einen kurzen Bericht über diese Methode, zu der auch *E. Čech*[164]) und *G. Sannia*[165]) Beiträge geliefert haben.

Die projektive Differentialgeometrie der *nicht geradlinigen Flächen im* R_3[166]) führt *G. Fubini* auf die Betrachtung dreier simultanen Differentialformen zurück, die gegenüber der Gruppe G_{15} der nicht-singu-

---

160) *G. M. Green,* Amer. J. Math. 37 (1915), p. 215; 38 (1916), p. 287; *E. P. Lane,* Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 283.

161) *G. M. Green,* Ann. of Math. (2) 19 (1918), p. 246; Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), p. 106. Über die ältere Kennzeichnung vgl. *G. Koenigs,* Paris C. R. 114 (1892), p. 55; *A. L. Nelson*[159]); *L. P. Eisenhart,* Ann. of Math. (2) 18 (1917), p. 221; *H. Liebmann,* Math. Ztschr. 14 (1922), p. 160. — In Beziehung zu projektiv-spezialisierten Flächen stehen solche Netze von der Periode drei und sechs bei *Laplace*scher Transformation; vgl. *G. Tzitzéica,* Paris C. R. 147 (1908), p. 1036; *E. J. Wilczynski,* Math. Ann. 76 (1914), p. 129; *G. Tzitzéica,* Bull. Sect. sc. Ac. Roumaine 3 (1915), p. 200, 205.

162) *E. J. Wilczynski,* Proc. Nat. Ac. sc. 1 (1915), p. 59; Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 319; *G. M. Green,* Amer. J. Math. 38 (1916), p. 313; Bull. Amer. Math. Soc. (2) 24 (1918), p. 221. — Über die ältere Kennzeichnung vgl. *G. Darboux,* Surfaces IV (1896), p. 34 ff.; *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom. (5) 24^{I} (1915), p. 193 ff.

163) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), p. 323; *G. M. Green,* Proc. Nat. Ac. sc. 1 (1915), p. 516; Amer. J. Math. 38 (1916), p. 323; *E. J. Wilczynski,* Amer. J. Math. 42 (1920) p. 211; Math. Ann. 85 (1922), p. 208. — Wegen des Begriffes der isotherm-konjugierten Netze vgl. *Bianchi-Lukat,* § 70 und III D 3, Nr. 42 (*R. v. Lilienthal*).

164) *E. Čech,* Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 350; 31^{II} (1922), p. 475; Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 251 (Neue Ableitung der Grundformeln von *Fubini* für Flächen im R_3 und Hyperflächen im R_n; Ausdehnung auf gewisse Elementmannigfaltigkeiten des R_n); Lincei Rend. Rom (5) 32^{II} (1923), p. 335 (Differentialinvarianten des projektiven Linienelementes).

165) *G. Sannia,* Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 165 entwickelt nebeneinander die euklidische, nichteuklidische, affine und projektive Flächentheorie.

166) *G. Fubini,* Atti Acc. Torino 49 (1914), p. 786; Ann. di mat. (3) 25 (1916), p. 229; Palermo Rend. 41 (1916), p. 135; Lincei Rend. Rom (5) 27^{II} (1918), p. 11, 44; Atti Acc. Torino 53 (1918), p. 1032; Palermo Rend. 43 (1918), p. 1;

lären Kollineationen invariant sind. Die erste dieser *projektiven Grundformen* hat zu Nullinien die Asymptotenlinien der Fläche, die zweite die Kurven von *Darboux* (Nr. **11**). Diese beiden Grundformen können nach *G. Pick*[167]) folgendermaßen abgeleitet werden. Man setze

$$(12)\quad \begin{cases} L = (x_{uu}x_u x_v x), \quad M = (x_{uv}x_u x_v x), \quad N = (x_{vv}x_u x_v x), \\ \alpha = (x_{uuu}x_u x_v x), \quad \beta = (x_{uuv}x_u x_v x), \quad \gamma = (x_{uvv}x_u x_v x), \\ \qquad\qquad \delta = (x_{vvv}x_u x_v x)\ ^{168)} \end{cases}$$

und bilde mit diesen Größen nach Nr. 9, (8), (9), (11) die Differentialformen φ, ψ und die Invariante I. Dann sind

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi = I\cdot\varphi \equiv E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ \Psi = I\cdot\psi \equiv A du^3 + 2B du^2 dv + 3C du dv^2 + D dv^3\ ^{169)} \end{cases}$$

die gesuchten Differentialformen und

$$(14)\qquad \bar{x}_i = x_i \sqrt{I} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gegenüber G_{15} invariant *normierte Koordinaten* eines Punktes der Fläche. Die Verbindungslinie des Punktes $\bar{x}$ der Fläche mit dem Punkte

$$(15)\qquad y = \tfrac{1}{2}\Delta_2 \bar{x}\ ^{170)}$$

ist die *Projektivnormale* der Fläche im Punkte $\bar{x}$.[171]) Die dritte projektive Grundform ist

$$(16)\qquad X = \frac{(d^2\bar{x}\bar{x}_u\bar{x}_v y)}{(\bar{x}\bar{x}_u x_v y)} = \bar{L} du^2 + 2\bar{M} du dv + \bar{N} dv^2.$$

Zwischen den Koeffizienten der drei Grundformen Φ, Ψ, X bestehen die algebraischen Relationen

$$(17)\ EC - 2FB + GA = ED - 2FC + GB = E\bar{N} - 2F\bar{M} + G\bar{L} = 0$$

und außerdem differentielle Beziehungen, die hier nicht angeschrieben werden sollen. Zu drei Differentialformen

$$(18)\quad \begin{cases} \Phi = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \ (EG - F^2 \neq 0); \\ X = \bar{L} du^2 + 2\bar{M} du dv + \bar{N} dv^2; \\ \Psi = A du^3 + 3B du^2 dv + 3C du dv^2 + D dv^3, \end{cases}$$

Lincei Rend. Rom (5) 32^{II} (1923), p. 273, 321. Zum ganzen Abschnitt **12** vgl. auch *G. Fubini-E. Čech*, Geometria proiettivo-differenziale, und *L. Bianchi*, Lezioni II, 3. Aufl., p. 812. — Im Fall der geradlinigen Flächen gibt es keine derartigen absolut-invarianten Grundformen; vgl. Palermo Rend. 43 (1918), p. 6 ff.

167) *G. Pick*, Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 28 (1919), 2. Abt., p. 56.

168) Hierin bedeutet $x = x(u, v)$ die Zusammenfassung der vier homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes der Fläche, die Zeiger u, v partielle Ableitungen und die Klammerausdrücke vierreihige Determinanten.

169) *G. Fubini* benutzt an Stelle von Ψ als zweite Grundform 2Ψ.

170) Δ_2 ist der zweite *Beltrami*sche Differentialparameter in bezug auf die Grundform Φ. Gl. (15) ist eine abgekürzte Schreibweise für $y_i = \frac{1}{2}\Delta_2\bar{x}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

171) Vgl. [149]).

zwischen deren Koeffizienten die drei algebraischen Identitäten (17) und die erwähnten differentiellen Beziehungen statthaben, existiert stets eine nicht geradlinige Fläche, die sie zu projektiven Grundformen hat. Diese Fläche ist bis auf nicht-singuläre Kollineationen bestimmt.

Der Quotient $\Psi : \Phi$ heißt das *projektive Linienelement der Fläche.*[171a]) Zwei projektiv-verschiedene Flächen mit demselben projektiven Linienelement sind nach *G. Fubini* ineinander *projektiv-deformierbar,* d. h. man kann sie punktweise so aufeinander beziehen, daß zwei entsprechende unendlich kleine Stücke von ihnen bis auf unendlich kleine Größen *dritter* Ordnung projektiv gleich sind.[172]) Die Umkehrung ist ebenfalls richtig. *E. Cartan*[173]) hat die projektive Deformierbarkeit der Flächen eingehend studiert und alle Flächen bestimmt, die überhaupt projektiv-deformierbar sind.

Von den geometrischen Anwendungen der besprochenen Theorie[174]) seien hier nur genannt: eine geometrische Kennzeichnung der Projektivnormalen, die projektive Krümmungstheorie, die Einführung gewisser projektiver Differentialinvarianten einer Flächenkurve, die Untersuchung der („isotherm-asymptotischen") Flächen, auf denen die *Leitkurven* von *Wilczynski* (Nr. **11**) ein konjugiertes Netz bilden[175]) und die Bestimmung aller Flächen mit einer kontinuierlichen Gruppe von projektiven Deformationen und von Projektivitäten in sich. Eine geometrische Deutung der ersten projektiven Grundform Φ hat *E. J. Wilczynski*[176]) gegeben.

171a) Das Integral $\int \frac{\Psi}{\Phi}$ hat *E. Čech,* Lincei Rend. Rom (5) 31^{II} (1922), p. 475 geometrisch gedeutet. *G. Fubini,* ebenda (5) 32^{II} (1923), p. 321, § 10 hat die zugehörigen Extremalen [unter dem Namen „hypergeodätische Linien", vgl. [152])] betrachtet.

172) Palermo Rend. 41 (1916), p. 135. — Andere Erklärung bei *E. Čech,* Rozpravy Ak. Prag 30 (1921), Nr. 36 (tschech.); Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 200, Fußn.

173) *E. Cartan,* a) Paris C. R. 170 (1920), p. 1439; 171 (1920), p. 27; b) Ann. Éc. Norm. (3) 37 (1920), p. 259. — Weitere Arbeiten zur *projektiven Deformierbarkeit der Flächen und Hyperflächen: G. Fubini,* Paris C. R. 171 (1920), p. 83; *L. Stipa,* Lincei Rend. Rom (5) 29^{II} (1920), p. 127; *E. Čech,* Rozpravy Ak. Prag 30 (1921), Nr. 23 (tschech.); *C. Bersano,* Lincei Rend. Rom (5) 32^{I} (1923), p. 260; *J. Kanitani,* Mem. Coll. Sc. Kyoto 6 (1923), p. 1, 29, 77 (vgl. auch p. 191); *T. Takasu,* Tôhoku Math. J. 22 (1923), p. 171 (Korrelative Abwickelbarkeit zweier Flächen).

174) Vgl. namentlich Atti Acc. Torino 53 (1918), p. 1032 und Palermo Rend. 43 (1918), p. 1, sowie Lincei Rend. Rom (5) 32^{II} (1923), p. 273, 321.

175) Vgl. auch *C. H. Yeaton,* Ann. di mat. (3) 26 (1916), p. 12 = Diss. Univ. Chicago.

176) *E. J. Wilczynski,* Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), p. 235.

G. Fubini hat seine Methode auch auf die *Hyperflächen im R_n* und z. T. allgemeiner auf die *m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_n* $(1 < m < n - 1)$ ausgedehnt.[177]

Der *projektiven Differentialgeometrie der Geradenkomplexe im R_3*[178] legt *G. Fubini* drei quadratische Differentialformen zugrunde, zwischen deren Koeffizienten gewisse algebraische und differentielle Relationen bestehen. Auch hier gibt er einige geometrische Anwendungen und überträgt insbesondere den Begriff der *projektiven Deformierbarkeit* auf die Komplexe.[178a]

Endlich führt er die projektive Differentialgeometrie einer *Geradenkongruenz* mit getrennten Brennflächenmänteln, die keine *W*-Kongruenz [*Weingarten*sche Kongruenz: III D 6a, Nr. **13** (*A. Voß*)] ist[179], auf die Invariantentheorie einer quadratischen und einer biquadratischen Form zurück. Die *W*-Kongruenzen erfordern eine gesonderte Behandlung.[180]

VI. Differentialgeometrie weiterer Transformationsgruppen.

13. Konforme Differentialgeometrie. Der Differentialgeometrie der konformen Gruppe des R_3 gehören eine Reihe von Untersuchungen der klassischen Flächentheorie an, auf die wir hier nicht weiter eingehen können.[181] Die wichtigsten Größen dieser Flächentheorie er-

177) *G. Fubini,* Palermo Rend 41 (1916), p. 135; Lincei Rend. Rom (5) 27^{II} (1918), p. 99, 147; Palermo Rend. 43 (1918), p. 1 (Hyperflächen im R_n); Lincei Rend. Rom (5) 29^{II} (1920), p. 9 (m-dimensionale Mannigfaltigkeiten im R_n); Math. Ann. 85 (1922), p. 213 (Flächen im R_4). Vgl. ferner: *E. Cartan*[173] b), p. 344; *C. Bersano*[173]; *L. Stipa*[173]; *F. P. White,* Proc. Cambr. Phil. Soc. 21 (1923), p. 216 (Flächen im R_4).

178) *G. Fubini,* Lincei Rend. Rom (5) 27^{II} (1918), p. 304; 28^{I} (1919), p. 32; 32^{II} (1923), p. 273, 321. Ausgeschlossen sind dabei die Komplexe, die aus den Tangenten einer Fläche bestehen.

178a) *G. Fubini*[178]; *E. Cartan,* C. R. Congr. Straßburg 1920, wo auch die projektive Abwickelbarkeit der Geradenkongruenzen behandelt wird.

179) *G. Fubini,* Lincei Rend. Rom (5) 28^{I} (1919), p. 34; (5) 32^{II} (1923), p. 273, 321.

180) *G. Fubini,* Palermo Rend. 43 (1918), p. 25; Lincei Rend. Rom (5) 30^{I} (1921), p. 273; 32^{I} (1923), p. 198, 301, 376. Vgl. dazu auch *H. Jonas,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 29 (1920), p. 40. — *G. Fubini* hat ferner die besonderen *W*-Kongruenzen betrachtet, auf deren Brennflächenmänteln sich die Kurven von *Darboux* (Nr. **11**) entsprechen: Lincei Rend. Rom (5) 25^{I} (1916), p. 144. Endlich bespricht er auch den Zusammenhang der projektiven Theorie der *W*-Kongruenzen mit der Theorie der unendlich kleinen (metrischen) Verbiegung der Flächen, ebenda (5) 32^{I} (1923), p. 455.

181) Z. B. gehören hierher: die Untersuchungen über Flächen mit isothermen oder sphärischen Krümmungslinien [III D 5, Nr. **37**; Nr. **13** ff. (*R. v. Lilien-*

leiden bei konformer Transformation der Fläche Änderungen, die von *A. Voss*[182]), *R. Rothe*[183]) und *A. R. Forsyth*[183]) angegeben worden sind, zugleich mit gewissen aus diesen Größen gebildeten (zumeist relativen) Invarianten.

Mit der Aufsuchung der wesentlichen (absoluten) *Differentialinvarianten einer Fläche gegenüber der konformen Gruppe* des Raumes und mit der Bestimmung einer Fläche bis auf konforme Transformationen beschäftigen sich *A. Tresse*[184]), *P. Calapso*[185]), *K. Ogura*[186]) und *G. Fubini*[187]). *A. Tresse* bestimmt die konformen Differentialinvarianten der beiden niedrigsten Ordnungen einer Fläche. *P. Calapso* zeigt, daß eine auf ihre Krümmungslinien bezogene nicht-isotherme Fläche durch die beiden Differentialinvarianten

$$(1) \qquad \omega = \sqrt{E}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad \Omega = \sqrt{G}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

bis auf eine konforme Transformation bestimmt ist, während bei isothermen Flächen noch eine weitere Differentialinvariante hinzutreten muß, die mit ω und Ω durch zwei partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung verbunden ist. *K. Ogura*[186]) legt dem Studium der konformen Geometrie einer Fläche die beiden simultanen Differentialformen:

$$(2)\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 (E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2), \\ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left\{\frac{(FL - EM) du^2 + (GL - EN) du\, dv + (GM - FN) dv^2}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} \end{cases}$$[188])

zugrunde.

---

thal); III D 9, Nr. 14 (*E. Salkowski*)]; über Kreissysteme [III D 9, IV (*E. Salkowski*)]; über dreifache Orthogonalsysteme [III D 9 (*E. Salkowski*)].

182) *A. Voss*, Münchner Ber. 37 (1907), p. 77; 1920, p. 229. — In der zweiten Arbeit werden überhaupt die Beziehungen zwischen zwei Flächen untersucht, die durch eine Transformation durch reziproke Radien auseinander entspringen.

183) *R. Rothe*, Math. Ann. 72 (1912), p. 57. *Rothe* führt auch zwei Differentialformen ein, die bei konformer Transformation der Fläche ohne Änderung der Parameter ungeändert bleiben, aber nicht invariant gegenüber beliebigen Parametertransformationen sind. — *A. R. Forsyth*, Lectures on differential geometry, Cambridge 1912, p. 105 ff.

184) *A. Tresse*, Paris C. R. 114 (1892), p. 948; vgl. auch Acta math. 18 (1894), p. 66.

185) *P. Calapso*, Palermo Rend. 22 (1906), p. 197.

186) *K. Ogura*, Tôhoku Math. J. 9 (1916), p. 216 (vgl. auch ebenda p. 88) — *K. Ogura* gibt u. a. auch eine geometrische Deutung für die Differentialformen (2) mittels gewisser Winkelgrößen.

Die Betrachtung von ω und Ω kommt nach *G. Fubini*[187]) auf das Studium der beiden simultanen konform-invarianten Differentialformen

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^2(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2), \\ \left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left\{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2) \right. \\ \qquad\qquad \left. +\,2(L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2)\right\}^{188)} \end{cases}$$

heraus.

Wenn auch durch diese Untersuchungen der Grund zur Theorie der konformen Differentialinvarianten einer Fläche gelegt ist, so fehlt es bisher doch noch an einer ausführlichen und dem Gegenstande völlig angepaßten[189]) Darstellung der konformen Flächentheorie.[190])

Die letzte Bemerkung gilt auch für die *konforme Theorie der Kurven.*[191]) Dagegen haben *A. Besserve*[192]) und *E. Vessiot*[192]) die, etwa der metrischen Theorie der geradlinigen Flächen analoge *konforme Differentialgeometrie der zyklischen Flächen* [III D 5, Nr. 4 (*R. v. Lilienthal*)] vollständig entwickelt.

Die Flächen des R_3 mit einer Gruppe kontinuierlicher konformen Transformationen in sich hat *U. Amaldi*[193]) bestimmt.

187) *G. Fubini,* Palermo Rend. 41 (1916), p. 160.

188) E, F, G; L, M, N sind die Fundamentalgrößen erster bzw. zweiter Ordnung der Fläche, R_1, R_2 ihre Hauptkrümmungsradien. Ausgeschlossen von der Betrachtung sind dabei die Flächen mit $R_1 = R_2$ und die isotropen Flächen ($EG - F^2 = 0$). — Die zweite Differentialform (2) ist die sog. *Jacobi*sche Simultankovariante der beiden Differentialformen (3).

189) Es wären pentasphärische Koordinaten zu benutzen. Vgl. die analoge Behandlung der projektiven Differentialgeometrie der Geradenkomplexe bei *G. Fubini*[178]).

190) Inzwischen hat *G. Thomsen,* Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1923), p. 31, diese Lücke ausgefüllt. Beiträge zur konformen Differentialgeometrie der Flächen im R_3 hat auch *H. Liebmann,* Sitzungsb. Ak. Heidelberg 1923, Abh. 2, 4 gegeben. — Über die Untersuchungen von *E. Cartan* über die „konform-zusammenhängenden" n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten siehe Nr. 31, bes. [421]).

191) Für Kurven in der Ebene ist darunter die Theorie ihrer invarianten Eigenschaften gegenüber der sechsgliedrigen Gruppe der *Kreisverwandtschaften* zu verstehen. Das *Bogenelement* einer ebenen Kurve gegenüber dieser Gruppe hat in Minimalkoordinaten *G. Pick,* Palermo Rend. 37 (1914), p. 341 aufgestellt. Neuerdings hat *H. Liebmann,* Münchner Ber. 1923, p. 79; Sitzungsb. Ak. Heidelberg 1923, Abh. 4 das konforme Bogenelement der Kurven im R_n angegeben und für $n = 2$, 3 das zugehörige Variationsproblem, sowie die (erste) konforme Krümmung unter Verwendung rechtwinkliger kartesischer Koordinaten behandelt. — Vgl. auch *C. Rabut,* Paris C. R. 162 (1916), p. 348.

192) *E. Vessiot,* Paris C. R. 174 (1922), p. 989, 1101; J. de math. (9) 2 (1923), p. 99; *A. Besserve,* Thèse, Paris 1915.

193) *U. Amaldi,* Lincei Rend. Rom (5) 10^{II} (1901), p. 168.

14. Sonstige Gruppen.[194]) Außer den bisher besprochenen endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen sind nur wenige weitere hinsichtlich ihrer Differentialinvarianten untersucht worden.

G. Noth[195]) bestimmt das invariante Bogenelement (vgl. Nr. 3) und die wesentlichen Differentialinvarianten für zwei zehngliedrige Gruppen, nämlich für die größte irreduzible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene und für die projektive Gruppe des linearen Komplexes. *W. Blaschke*[196]) gibt das invariante Bogenelement und die Differentialinvarianten niedrigster Ordnung einer orientierten Kurve gegenüber der sechsgliedrigen Gruppe der eigentlichen *Laguerre*schen Transformationen der Ebene [vgl. III AB 4 b, Nr. **14** (*G. Fano*)].

O. Mühlendyck[197]) behandelt das Äquivalenzproblem der ein- bis fünfdimensionalen regulären Somenmannigfaltigkeiten gegenüber der zwölfgliedrigen Gruppe der eigentlich-orthogonalen Somentransformationen[198]) und der sechsgliedrigen Bewegungsgruppe des R_3.

B. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen.

I. Einleitung.

15. Vorbemerkung. Im Folgenden wird über die Untersuchungen berichtet, die in letzter Linie auf *B. Riemann*s Habilitationsvortrag zurückgehen, soweit sie sich auf *Geometrie* beziehen. Die *physikalischen* Anwendungen der Maßgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten, die in den letzten Jahren namentlich durch die Ausbildung der Gravitationstheorie *A. Einstein*s in den Vordergrund des Interesses ge-

194) Wegen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene vgl. man Nr. **3**. — *H. Berliner*, Math. Ann. 79 (1918) p. 13 behandelt — ohne gruppentheoretische Gesichtspunkte — die Differentialgeometrie der Kurven für zwei projektive Maßgeometrien der Ebene.

195) *G. Noth*, Leipz. Ber. 56 (1904), p. 19.

196) *W. Blaschke*, Monatsh. Math. Phys. 21 (1910), p. 18 f.

197) *O. Mühlendyck*, Math. Ann. 77 (1916), p. 404; Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), p. 167.

198) Wegen der Begriffe: Soma, Somenmannigfaltigkeit, eigentlich-orthogonale Somentransformationen vgl. man *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, Anhang; Sitzgsb. Berl. Math. Ges. 12 (1912), p. 36; ferner III AB 4 b, Nr. **20** (*G. Fano*), wegen des Begriffes der *regulären* Somenmannigfaltigkeiten *O. Mühlendyck*, a. a. O.[197]). — Differentialgeometrische Begriffe, die mit der Kinematik zusammenhängen (und der Geometrie einer sechsgliedrigen Gruppe von Kollineationen des R_3, der „Quasibewegungen", angehören) finden sich auch bei *J. Grünwald*, Wien. Ber. 120 (1911), p. 720.

rückt sind, wurden nicht berücksichtigt. Über sie vergleiche man V 19 (*W. Pauli jr.*) und VI 2, 22a (*Fr. Kottler*).

Über die analytischen Grundlagen der Theorie findet man näheres in III D 10 (*R. Weitzenböck*), über die grundsätzlichen Fragen, wie z. B. die Untersuchungen von *H. v. Helmholtz* und *S. Lie*, in III A B 1 (*F. Enriques*), bes. V. (Prinzipien der allgemeinen Metrik).

Nicht erwähnt werden im Folgenden die Untersuchungen über kontinuierliche Transformationsgruppen [II A 6 (*L. Maurer* u. *H. Burkhardt*)] in n-dimensionalen *euklidischen* Mannigfaltigkeiten, deren Schwerpunkt auf gruppentheoretischem Gebiet liegt.

16. Geschichtlicher Überblick. Der folgende geschichtliche Überblick, der sich ausschließlich auf die Geometrie und die Algorithmen zur Theorie der *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten beschränkt, soll nur einer ersten Orientierung über dieses ausgedehnte Gebiet dienen. Dementsprechend werden nur die Hauptlinien der Entwicklung skizziert und hauptsächlich jene Arbeiten genannt, die in den folgenden Nummern nicht berücksichtigt werden konnten.

Absolute Differentialinvarianten einer irreduziblen positiven quadratischen binären Differentialform gegenüber beliebigen Parametertransformationen treten zuerst in der Theorie der Flächen im R_3 bei *C. F. Gauß*[199]) (Krümmungsmaß) und *E. F. A. Minding*[200]) (Geodätische Krümmung einer Flächenkurve) auf. Sie gehören der Maßgeometrie in einer Fläche an.

Den allgemeinen Begriff der Maßgeometrie in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit hat *B. Riemann* 1854 in seinem Habilitationsvortrage eingeführt und die Theorie dieser „inneren Geometrie" einer solchen V_n namentlich durch die Einführung des nach ihm benannten Krümmungsmaßes (Nr. 19) gefördert. Hier sei besonders auf die von ihm gegebene verhältnismäßig wenig bekannte Definition dieses Krümmungsmaßes durch formale Variationsrechnung hingewiesen.[200a]) Die durch *Riemann* angeregten Probleme, wie z. B.

199) *C. F. Gauß*, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Gott. rec. 6 (1828), p. 99 = Werke 4, p. 217. Deutsche Ausgabe von *A. Wangerin*, Ostwalds Klassiker Nr. 5 (1889, 2. Aufl. 1901).

200) *E. F. A. Minding*, J. f. Math. 5 (1830), p. 297; 6 (1830), p. 159. Das „*Minding*sche Problem": J. f. Math. 19 (1839), p. 370; vgl. III D 6a, Nr. 15 (*A. Voß*). Die geodätische Krümmung war übrigens schon *Gauß* bekannt; vgl. III D 3, Nr. 11 f. (*R. v. Lilienthal*).

200a) *B. Riemann*, Commentatio mathematica . . . (1861), Werke, 2. Aufl. p. 391 (insb. p. 402); *R. Lipschitz*, J. f. Math. 72 (1870), p. 1 (bes. p. 16 ff.); 82 (1877), p. 316 (bes. § 1). Vgl. die ausführliche Darstellung von *E. Noether* in

die Frage nach der Äquivalenz zweier positiven n-ären quadratischen Differentialformen, die Untersuchung der Räume konstanten Krümmungsmaßes, die Krümmungstheorie einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit, die in einer anderen ebensolchen von mehr Dimensionen enthalten ist, wurden in einer Reihe wichtiger Arbeiten von *E. Beltrami, E. B. Christoffel, R. Lipschitz, R. Beez, F. Souvorof, A. Voss, F. Schur* u. a. behandelt; auch die ersten Abhandlungen von *G. Ricci* gehören hierher.

Eine zweite Periode setzt etwa mit den Arbeiten *G. Ricci*s über den „absoluten" Differentialkalkül ein, durch die für die Theorie der quadratischen Differentialformen ein adäquater Algorithmus geschaffen wird.[201]) *G. Ricci, T. Levi-Civita* u. a. haben auch geometrische Anwendungen dieses Kalküls gegeben, von denen hier besonders die Theorie der orthogonalen Kurvenkongruenzen in einer V_n erwähnt sei (Nr. **20**).

Ungefähr gleichzeitig entstehen eine Anzahl von Arbeiten, die bei aller Verschiedenheit des Inhalts das Eine gemeinsam haben, daß sie sämtlich an den Ideenkreis *S. Lie*s anknüpfen. Auf der einen Seite werden die Methoden von *Lie* selbst auf die Theorie der Differentialinvarianten der quadratischen Differentialformen angewendet [*K. Żo-*

III D 10 b) (*R. Weitzenböck*), Nr. 28, und *R. Weitzenböck*, Invariantentheorie, p. 359. — Über die angeführte Stelle bei *Riemann* s. a. *T. Levi-Civita,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 201 ff.; *J. Pérès,* Lincei Rend. Rom (5) 29^{I} (1920), p. 134. — *E. Noether* hat das von *Riemann* und *Lipschitz* bei quadratischen Differentialformen eingeschlagene Verfahren auf beliebige Differentialausdrücke übertragen: Gött. Nachr. 1918, p. 37; vgl. auch Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 32 (1923), p. 182 ff.

201) Siehe namentlich *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (4) 3^{I} (1887), p. 15; Studi editi della Università di Padova a commemmorare l'Ottavo Centenario della origine della Università di Bologna III (1888), p. 23; Lincei Rend. Rom (4) 5^{I} (1889), p. 112; Bull. sc. math. (2) 16 (1892), p. 167; Atti Ist. Veneto 51 (1893), p. 1336; 56 (1897), p. 1536; Superficie, 1898; *G. Ricci* und *T. Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125. — Neuere Bemerkungen dazu von *E. Pascal,* Lincei Rend. Rom (5) 15^{I} (1906), p. 670; Rend. Ist. Lomb. (2) 39 (1906), p. 414; *A. Palatini,* Palermo Rend. 43 (1919), p. 192; *G. Fubini,* Atti Acc. Torino 54 (1919), p. 5; Lincei Rend. Rom (5) 29^{II} (1920), p. 118; *R. Weitzenböck,* Wien. Ber. 130 (1921), p. 31; *J. Lipka,* Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 242; *G. Sannia,* Atti Acc. Torino 57 (1922), p. 293. — Einen Aufbau des absoluten Differentialkalküls mit Hilfe von n *Pfaff*schen Ausdrücken gibt *R. Lagrange,* Thèse, Paris 1923 = Ann. de Toulouse 1923; vgl. auch Paris C. R. 173 (1921), p. 1325. — Einführende Skizzen von *G. Juvet,* Révue gén. des sc. Jan. 1923 und *Assier de Pompignan,* Note sur le calcul tensoriel, Paris 1923, eine eingehende Darstellung *J. A. Schouten,* Riccikalkül. — Eine Verallgemeinerung (invariante zweite Differentiale bei Zugrundelegung einer allgemeineren Basis an Stelle einer quadratischen Differentialform) gibt *T. Levi-Civita,* Rev. Mat. Hispano-Amer. 5 (1923), p. 165. — Vgl. auch III D 10, Nr. **19, 24** (*R. Weitzenböck*).

rawski[202]), *E. O. Lovett*[203]), *C. N. Haskins*[204]), *A. R. Forsyth*[205])], auf der anderen stehen Fragestellungen, wie die nach allen *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten gegebener Dimensionenzahl, die kontinuierliche Transformationsgruppen bestimmter Art (z. B. Bewegungsgruppen, Gruppen konformer Transformationen u. dgl. zulassen (*L. Bianchi, G. Ricci, C. Rimini, G. Fubini*, Nr. 26).

Auch die Frage nach den Zusammenhangsverhältnissen im Großen der Mannigfaltigkeiten konstanten *Riemann*schen Krümmungsmaßes wird etwa zur selben Zeit behandelt (*F. Klein, W. Killing*).[205a])

Um das Bild dieser Periode zu vervollständigen, sei schließlich noch auf die symbolischen Methoden hingewiesen, die namentlich von amerikanischen Mathematikern [*H. Maschke*[206]), *A. W. Smith*[207]), *L. Ingold*[208]), *W. H. Bates*[209]), *J. B. Shaw*[210]) u. a.[211]) für die Theorie der quadratischen Differentialformen ausgebildet worden sind.

In den letzten Jahren hat das Interesse für die *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten durch die Gravitationstheorie *A. Einsteins* einen neuen Aufschwung genommen, der auch einen wichtigen prinzipiellen

---

202) *K. Żorawski,* Acta math. 16 (1893), p. 1; Rozpravy Ac. sc. Krakau (2) 8 (1895), p. 1 ($n = 2$), sowie die neueren Arbeiten: Leipz. Ber. 59 (1907), p. 160; 60 (1908), p. 20; 61 (1909), p. 3; endlich die auf anderer (algebraischer) Grundlage beruhende: Leipz. Ber. 66 (1914), p. 103.

203) *E. O. Lovett,* J. de math. (5) 7 (1901), p. 259.

204) *C. N. Haskins,* Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1902), p. 71; 4 (1903), p. 38; 5 (1904), p. 167.

205) *A. R. Forsyth,* Phil. Trans. London A 201 (1903), p. 329 ($n = 2$); 202 (1904), p. 277; Palermo Rend. 21 (1906), p. 115, und die neuere Arbeit: Proc. R. Soc. Edinburgh 42^II (1922), p. 147. Vgl. dazu *C. N. Haskins,* Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 152, 588.

205a) *F. Klein,* Math. Ann. 37 (1890), p. 544 = Math. Abh. I, p. 353; *W. Killing,* Math. Ann. 39 (1891), p. 257; Grundlagen I, p. 325 ff. Vgl. ferner: *F. S. Woods,* Lectures on Mathematics (Boston Colloquium 1903), New-York 1905; *J. L. Coolidge,* Non-euclidean geometry, p. 236 ff. — Eingehende Besprechung dieser an *W. K. Clifford* anknüpfenden Untersuchungen in III AB 1, VI (*F. Enriques*). — Die allgemeinere Frage nach dem Zusammenhang beliebiger Mannigfaltigkeiten, die ein Bogenelement tragen, scheint noch nicht untersucht zu sein.

206) *H. Maschke,* Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1899), p. 197; 4 (1903), p. 445; 7 (1906), p. 69, 81; Invariants of differential quantics, Chicago 1903, 14 p.

207) *A. W. Smith,* Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 33.

208) *L. Ingold,* Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910), p. 449.

209) *W. H. Bates,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 16 (1910), p. 299, 463; Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911), p. 19 = Diss. Univ. Chicago 1910.

210) *J. B. Shaw,* Amer. J. Math. 35 (1913), p. 394.

211) *J. E. Wright,* Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 286; Amer. J. Math. 27 (1905), p. 323. Vgl. die Darstellung bei *J. E. Wright,* Invariants.

Fortschritt in der Theorie zur Folge hatte: die Einführung des Begriffes des Parallelismus in einer V_n durch *T. Levi-Civita* (Nr. 18). Sie gab *H. Weyl* den Anlaß zu einer Untersuchung der mathematischen Grundlagen der *Riemann*schen Geometrie, deren Ergebnis u. a. ein neuer systematischer Aufbau der Infinitesimalgeometrie der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten ist (Nr. 28 ff.).

Über die geometrischen Untersuchungen, die diesem Zeitraum angehören, wird im folgenden ausführlich berichtet. Zunächst soll noch die Anwendung direkter Methoden (Ausdehnungslehre, Vektoranalysis usw.) auf die Differentialgeometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten kurz besprochen werden.

16a. Anwendung direkter Methoden.*) Der älteste Versuch, mit direkten Methoden ein differentialgeometrisches Problem in einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit zu lösen, rührt wohl von *H. Graßmann* her, der seine Ausdehnungslehre zur Behandlung des *Pfaff*schen Problems verwendete.[212]) Dieser Ansatz hat aber nicht viel Einfluß auf *Graßmanns* Nachfolger ausgeübt, so daß erst wieder *E. Cartan* das *Pfaff*sche Problem mit einer Methode behandelt hat, die der *Graßmann*schen verwandt ist.[212a]) Von den engeren Nachfolgern *Graßmanns* hat *R. Mehmke* Anwendungen auf Kurven in R_n, *A. N. Whitehead* auf V_2 in S_3 gemacht.[213]) In letzter Zeit hat auch die unter dem Einfluß der Ausdehnungslehre aufgestellte direkte Methode von *C. Burali-Forti* und *R. Marcolongo* sich mit den V_n beschäftigt.[213a])

Von den abkürzenden Bezeichnungen, die für eine V_n geeignet sind, hat die weiteste und fruchtbarste Verwendung die Methode von *G. Ricci* gefunden, die neuerdings auch für allgemeinere Übertragungen (Nr. 28 ff.) verwendet wurde.[214]) Eng an diese *Ricci*-Rechnung

---

*) Dieser Abschnitt rührt von Herrn *D. J. Struik* in Delft her.

212) *H. Graßmann*, Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 511 ff.; Werke I (2), p. 355. Vgl. III AB 11, Nr. 32.

212a) *E. Cartan*, Ann. Éc. Norm. (3) 16 (1899), p. 239. Vgl. weiter *E. Goursat*, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris 1922.

213) *R. Mehmke*, Ztschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 206; *A. N. Whitehead*, Proc. London Math. Soc. 29 (1898), p. 275. Vgl. auch *E. Rath*, Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 19 (1910), p. 269; *P. Alibrandi*, Mem. Rom. Acc. P. Nuovi Lincei 20 (1903), p. 219; 21 (1903), p. 341; 22 (1904), p. 177.

213a) *C. Burali-Forti*, Lincei Rend. Rom (5) 31^{II} (1922), p. 73, 181; Atti Acc. Torino 57 (1922), p. 285; *T. Boggio*, Lincei Rend. Rom (5) 28^{I} (1919), p. 58, 169; Atti Acc. Torino 54 (1919), p. 186.

214) Vgl. III D 10b), Nr. 19 (*R. Weitzenböck*); ferner Fußnote [201]), sowie *D. J. Struik*, Grundzüge; *J. A. Schouten*, Riccikalkül; *T. Levi-Civita*, Lezioni.

schließt sich die direkte Methode von *J. A. Schouten* an, die sich für die Untersuchung der V_n als sehr fruchtbar erwies.[214a])

Andere abkürzende Bezeichnungen oder direkte Methoden, deren bisheriger Anwendungsbereich aber weniger weit ist, rühren von *H. Maschke*[206]), *L. Ingold*[208]), *J. B. Shaw*[210]) und *F. Jung*[215]) her.

II. Allgemeine Theorie der einzelnen Riemannschen Mannigfaltigkeit.

17. Begriff einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Eine *n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit*[216]) läßt sich dadurch charakterisieren, daß das einzelne zu ihr gehörige Element („Punkt") durch Angabe von n stetig veränderlichen Größen („Koordinaten") $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a_\lambda \leqq x_\lambda \leqq b_\lambda;$ $\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ festgelegt werden kann. Als gleichberechtigte Bestimmungsstücke gelten n Größen $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, welche umkehrbar stetige Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Der Übergang von einem Koordinatensystem x zu einem anderen x^* wird demnach durch die (stetig umkehrbaren) Gleichungen

$$x_\lambda = f_\lambda(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

vermittelt. Für das Folgende ist es erforderlich, daß die f_λ (mindestens)[217]) einmal stetig differentiierbare reelle Funktionen sind, deren Funktionaldeterminante $\frac{\partial(f_1, f_2 \cdots f_n)}{\partial(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*)}$ im betrachteten Bereich von Null verschieden ist. Es handelt sich hier somit um die Invarianz gegenüber beliebigen stetigen umkehrbar-eindeutigen und differentiierbaren Punkttransformationen, und diese Invarianz begründet vermöge der

214a) *J. A. Schouten,* Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), 95 p. $(n = 4)$; wesentlich vereinfacht und für beliebiges n: Math. Ztschr. 11 (1921), p. 58. Vgl. dazu auch *D. J. Struik,* Grundzüge und *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Christiaan Huygens I (1921/2), p. 333; II (1922), p. 1, 155, 291. Eine der *Gibbs*schen Dyadenrechnung verwandte Symbolik in Verbindung mit dem absoluten Differentialkalkül *Riccis* verwenden *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 269.

215) *F. Jung,* Wien. Ber. 126 (1917), p. 1437; Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 61; 20 (1919), p. 274.

216) Eigentlich ein Stück einer solchen. Auf den Zusammenhang der Mannigfaltigkeit im Großen gehen wir hier nicht ein. — Der Begriff der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit [siehe auch III AB 1 (*F. Enriques*) II, insb. Nr. 15] ist zuerst aufgestellt worden von *H. Graßmann,* Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, 2. Aufl. 1878; Werke I, 1, Leipzig 1894, und *B. Riemann,* Habilitationsvortrag. — Über den Begriff einer n-dimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit vgl. etwa die Bemerkungen in der *Weyl*schen Ausgabe dieses Vortrages, 1. Aufl., p. 24 f.

217) Für das später Folgende muß z. T. auch die Existenz und Stetigkeit höherer Ableitungen zugelassen werden.

letzten Voraussetzung im Unendlichkleinen die Invarianz gegenüber den homogenen linearen Transformationen oder Affinitäten.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit heißt insbesondere eine *n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit* V_n, wenn ihr durch eine [meist positiv-definite[218])] quadratische[219]) Differentialform

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu};\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

eine Maßbestimmung „aufgeprägt" ist. In (2) sind die $a_{\mu\nu}$ eindeutige, mindestens zweimal stetig differentiierbare reelle Funktionen der x_λ, deren Determinante a in dem betrachteten Bereich der Variabeln x_λ nirgends verschwindet.

In einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit ist auch der (zwischen 0 und π liegende reelle) *Winkel* ϑ zweier von einem Punkte P der V_n ausgehenden (reellen) Linienelemente dx^μ, δx^ν bestimmt durch:

$$\cos\vartheta = \frac{a_{\mu\nu} dx^\mu \delta x^\nu}{\sqrt{a_{\varkappa\lambda} dx^\varkappa dx^\lambda}\sqrt{a_{\varrho\sigma}\delta x^\varrho \delta x^\sigma}}, \tag{3}$$

wobei — wie auch weiterhin — die Wurzeln positiv zu nehmen sind, und der Inhalt irgendeines Stückes der V_n durch das n-fache Integral

$$J = \int^{(n)} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n \tag{4}$$

erstreckt über das Gebiet der Variabeln x_λ, das diesem Stücke entspricht.[219a])

218) In der allgemeinen Relativitätstheorie tritt (für $n = 4$) eine Maßbestimmung auf, die auf einer nicht ausgearteten quadratischen Differentialform mit einer positiven und drei negativen Dimensionen beruht. Vgl. V 19, II. (*W. Pauli jr.*). — *Die Entwicklungen des Textes beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist, auf den positiv-definiten Fall.*

219) *A. Carpanese*, Ann. di mat. (3) 28 (1919), p. 147 benutzt zur Festlegung der Metrik anstatt einer quadratischen Differentialform n lineare Differentialformen. Vgl. auch *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (5) 19^I (1910), p. 181, und *E. Cartan*, J. de math. (9) 1 (1922), p. 141. — Die Annahme des Textes ist mit der Forderung äquivalent, daß im Unendlichkleinen der Pythagoreische Lehrsatz gelten soll („Verallgemeinerter Pythagoreischer Satz" nach *H. v. Helmholtz*). Über die Untersuchungen von *H. v. Helmholtz* und *S. Lie* vgl. III AB 1 (*F. Enriques*), Nr. 32, 33. — *n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einer durch ein beliebiges Variationsproblem bewirkten Maßbestimmung* (von denen die *Riemann*schen nur ein ganz spezieller Fall sind), betrachtet *P. Finsler*, Diss. Göttingen 1918, der besonders die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen in solchen Mannigfaltigkeiten untersucht.

219a) Über den Inhaltsbegriff in V_n vgl. *O. Hölder*, Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 31 (1922), 2. Abt. p. 99; in „affin-zusammenhängenden" Mannigfaltigkeiten (Nr. 28) vgl. *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 17 (1923), p. 161, § 6; *O. Veblen*, Proc. Nat. ac. sc. 9 (1923), p. 3; *L. P. Eisenhart*, ebenda, p. 4. — Hier seien auch

Zwei *Riemann*sche Mannigfaltigkeiten V_n und V_n^*, deren Punkte durch die Koordinaten x_λ bzw. x_λ^* gegeben sind, haben somit dann und nur dann dieselbe Maßgeometrie, wenn die zugehörigen quadrierten Linienelemente:

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad ds^{*2} = a^*_{\mu\nu} dx^{*\mu} dx^{*\nu} \tag{5}$$

mittels einer Transformation (1) ineinander übergeführt werden können. Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Transformation ist von *B. Riemann*[220]), *E. B. Christoffel*[221]) und *R. Lipschitz*[222]) erledigt worden. Als notwendige — jedoch nur in besonderen Fällen auch hinreichende — Bedingung erweist sich dabei die Gleichheit des von *B. Riemann*[216]) eingeführten Krümmungsmaßes in entsprechenden Punkten und nach entsprechenden Flächenrichtungen der beiden Mannigfaltigkeiten. Eine V_n ist ein n-dimensionaler euklidischer Raum, wenn ihr quadriertes Bogenelement auf die Summe der Quadrate der n Differentiale dx^λ transformiert werden kann (vgl. auch Nr. **19**).[223])

einige Arbeiten genannt, in denen *Erweiterungen der Integralsätze von Gauß, Green und Stokes auf R_n und V_n* ($n > 3$) gegeben werden: *E. Beltrami*, Mem. Ist. Bologna (2) 8 (1868), p. 551 = Opere II, p. 74, bes. § 4; *E. Betti*, Ann. di mat. (2) 4 (1871), p. 140; *G. Morera*, Math. Ann. 27 (1886), p. 403; *H. Poincaré*, Acta math. 9 (1887), p. 321 [vgl. auch J. Éc. Polyt. (2) 1 (1895), p. 1]; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste III (1899); *V. Volterra*, Lincei Rend. Rom (4) 5I (1889), p. 158, 630; *M. de Franchis*, Palermo Rend. 12 (1898), p. 163; *G. Bocchetta*, Giorn. di mat. 43 (1905), p. 253; *L. E. J. Brouwer*, Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 15 (1906), p. 14, 75, 293 (holl.) = Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 9 (1906), p. 66, 116, 250; Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 28 (1919), p. 116 (holl.) = Proc. Ac. v. Wet. Amsterdam 22 (1919), p. 150; *A. Buhl*, Paris C. R. 155 (1912), p. 123; Ann. Fac. Toulouse (3) 3 (1913), p. 63; *J. Ihsiwara*, Sc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 5 (1916), p. 1; *J. A. Schouten*, Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), p. 60; Riccikalkül, p. 95; *P. Franklin*, Ann. of Math. (2) 24 (1923), p. 213; *R. Weitzenböck*, Invariantentheorie, p. 398. — Den *Stokes*schen Satz in V_3 hat auch *G. Ricci* bewiesen: Atti Ist. Ven. 56 (1897), p. 1536. — Vgl. auch V 19, Nr. 19 (*W. Pauli jr.*).

220) *B. Riemann*, Commentatio mathematica ... (1861), Werke, 2. Aufl., p. 391 (mit den Anmerkungen von *R. Dedekind* und *H. Weber*, p. 405). Hier behandelt *B. Riemann* nur den Fall, in dem die eine Differentialform die Summe von n Quadraten von Differentialen ist.

221) *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 70 (1869), p. 46, 241 = Ges. Math. Abh. I, p. 352, 378.

222) *R. Lipschitz*, J. f. Math. 70 (1869), p. 71; 72 (1870), p. 1; Ausz. Monatsb. Ak. Berlin 1869, p. 44, 53; Bull. sc. math. 4 (1873), p. 97, 142.

223) Von Interesse, namentlich für die allgemeine Relativitätstheorie ($n = 4$), ist auch die Frage der Reduzierbarkeit einer Differentialform (2) mit einer positiven und $n - 1$ negativen Dimensionen auf die „statische" Form:

$$ds^2 = a_{11}(x_2, x_3, \ldots, x_n)\, dx_1^2 + ds_1^2 \tag{a}$$

($a_{11} > 0$, ds_1^2 negativ-definite quadratische Differentialform in den $n - 1$ Ver-

Die Punkte einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_m in einer V_n $(1 \leqq m \leqq n-1)$ können durch die Werte von m unabhängigen Parametern $y_1, y_2, \ldots, y_m$ unterschieden werden. Eine solche V_m besitzt daher eine Parameterdarstellung der Gestalt:

$$x_\lambda = x_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_m), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Die Funktionen x_λ sollen darin stetige und sooft als nötig, mindestens aber einmal stetig differentiierbare Funktionen der m Parameter $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sein. Diese Parameter können noch einer beliebigen stetigen und stetig differentiierbaren Transformation unterworfen werden, ohne daß die durch (6) dargestellte V_m sich ändert.

Eine V_1 in V_n heißt *Kurve*, eine V_2 *Fläche*; eine V_p wohl auch *p-dimensionale Fläche*[224]; eine V_{n-1} in V_n bzw. R_n (die Bezeichnungsweise wechselt) *Hyperfläche*.

18. Geodätische und krumme Linien. Parallelismus in einer V_n. An Stelle der geraden Linien des gewöhnlichen Raumes treten in einer V_n die Extremalen des Variationsproblemes

$$\delta\int ds = \delta\int\sqrt{a_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu} = 0, \tag{7}$$

die *geodätischen Linien* der V_n. Ihre Differentialgleichungen sind:

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\mu\,\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

s bedeutet dabei den Bogen der betrachteten geodätischen Linie, von einem festen Anfangspunkte auf ihr gerechnet, so daß:

$$a_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1 \tag{9}$$

ist.[225] Aus (8) folgt, daß eine geodätische Linie durch Anfangspunkt und Anfangsrichtung festgelegt ist.

änderlichen $x_2, x_3, \ldots, x_n$). Mit dieser Frage haben sich beschäftigt: *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 65 und *J. Radon*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 268, der auch alle auf mehrere wesentlich verschiedene Arten analog zu (a) reduzierbaren *definiten* ds^2 bestimmt.

224) *H. Weyl*, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 154.

225) Ausgeschlossen sind dabei die geodätischen Linien, für die $a_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ ist. Über diese geodätischen *„Nullinien"* vgl. *H. Weyl*, Raum . . ., 4. Aufl. p. 114; *W. van der Woude*, Amsterdam Versl. 31 (1922), p. 373 (holl.) = Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 25 (1922), p. 288; *M. v. Laue*, Relativitätstheorie II, p. 151. — Invariante Herleitung der Differentialgleichung der geodätischen Linien bei *G. Hessenberg*, Sitzgsb. Math. Ges. Berlin 1 (1902), p. 55. — Außer den geodätischen Linien sind auch vielfach untersucht worden die *konformgeodätischen* oder *„natürlichen" Kurven*, d. h. jene Kurven, die durch eine geeignete konforme Transformation der V_n ($a^*_{\mu\nu} = \sigma^2 \cdot a_{\mu\nu}$; σ Ortsfunktion) in geodätische Linien übergeführt werden können. Sie können als Bahnkurven eines Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld betrachtet werden. *Literatur* in [276].

Zwei verschiedene geodätische Linien (g_1), (g_2), die von einem Punkte P der V_n ausgehen, bestimmen das *Büschel geodätischer Linien vom Mittelpunkte P*, d. h. die ∞^1 geodätischen Linien, deren Anfangsrichtungen dem Büschel angehören, das durch die Anfangsrichtungen von (g_1) und (g_2) festgelegt ist.

Existiert in einer V_n ein Koordinatensystem derart, daß darin jede geodätische Linie durch $n-1$ lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten gegeben ist, so ist nach *L. Schläfli*[226]) die V_n eine S_n oder R_n. Die Umkehrung dieses Satzes ist gleichfalls richtig.[227])

Als *krumme Linie* in einer V_n bezeichnen wir jede Kurve der V_n, die keine geodätische Linie ist. Für eine auf ihren Bogen bezogene krumme Linie $x_\lambda = x_\lambda(s)$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, gibt der „*Krümmungsvektor*"[228]):

$$\vartheta^\lambda = \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \tag{10}$$

226) *L. Schläfli*, Ann. di mat. (2) 5 (1871), p. 178; vgl. *E. Beltrami*, ebenda p. 194 = Opere mat. II, p. 385. Daß sich in einer S_n Koordinaten einführen lassen, in denen jede geodätische Linie durch $n-1$ lineare Gleichungen dargestellt wird, hat schon *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 232 = Opere mat. I, p. 406 gezeigt. Vgl. auch *O. Tedone*, Rend. Ist. Lomb. 32 (1899), p. 592; *F. Enriques*, Rend. Acc. Bologna (2) 7 (1902), p. 52; *J. Lüroth*, Palermo Rend. 23 (1907), p. 163. Allgemeinere (nicht quadratische) Maßbestimmungen, in denen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden, betrachtet *W. Wirtinger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 1, der auch eine Verallgemeinerung des im Texte angeführten Satzes gibt. — V_n, in denen bei geeigneter Koordinatenwahl $n-2$ der Gleichungen der geodätischen Linien linear sind, hat *A. Buchholz*, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ..., Bonn 1899, 264 S., untersucht. Vgl. [366a]).

227) Mittels der geodätischen Linien läßt sich auch der *zweite Differentialparameter von Beltrami* [Mem. Acc. Bologna (2) 8 (1868), p. 551 = Opere mat. II, p. 74]

$$\Delta_2 \varphi = a^{\lambda\mu} \varphi_{(\lambda\mu)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial(\sqrt{a}\, a^{\lambda\mu} \varphi_{(\lambda)})}{\partial x^\mu}, \tag{a}$$

$$\left(\varphi_{(\lambda\mu)} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \begin{Bmatrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}, \quad \varphi_{(\lambda)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda}; \quad a \text{ Determinante der } a_{\lambda\mu}\right)$$

erklären: $\frac{1}{n}\Delta_2\varphi$ ist der Mittelwert der zweiten Ableitungen der Funktion φ nach den Bogenlängen von n paarweise zueinander senkrechten geodätischen Linien der V_n. — *Weitere Literatur über Differentialparameter bei beliebigem n: G. Ricci*, Ann. di mat. (2) 14 (1887), p. 1; *E. Padova*, Mem. Lincei Rom (4) 4 (1887), p. 4; *C. Somigliana*, Rend. Ist. Lomb. (2) 22 (1889), p. 275; *G. Pennacchietti*, Atti Acc. Gioenia (4) 9 (1896), Nr. 1; *J. Bielankin*, Bull. Soc. phys. math. Kasan (2) 10 (1900), Nr. 2, p. 181 (russ.); *R. Serini*, Lincei Rend. Rom (5) 32^{II} (1923), p. 18. Vgl. auch *Bianchi-Lukat*, p. 47.

228) „Vektor ϑ^λ" steht für „Vektor von den Koordinaten ϑ^λ". Entsprechend wird „Linienelement dx^λ" gebraucht. Über den *Krümmungsvektor* ϑ^λ s. auch [277]).

die Richtung ihrer *Hauptnormalen* an, der Ausdruck

$$(11) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{a_{\mu\nu}\vartheta^\mu \vartheta^\nu}$$

ihre *erste Krümmung*[229]): der Vektor $h^\lambda = \varrho \vartheta^\lambda$ ist der Einheitsvektor der Hauptnormalen. Analog wie für die krummen Linien im R_n (Nr. 4) kann man auch für die krummen Linien in der V_n im allgemeinen ein begleitendes rechtwinkliges n-Bein, $n-1$ Krümmungen und *Frenet*sche Formeln ableiten. Diese Formeln finden sich zuerst bei *H. Kühne*[230]); später hat sie unabhängig auch *W. Blaschke*[231]) aufgestellt.

Zu einer neuen Deutung der Gleichungen (8) der geodätischen Linien und zugleich zu einer Verallgemeinerung der in ihnen zum Ausdruck kommenden Beziehung führt der von *T. Levi-Civita*[232]) eingeführte Begriff des *Parallelismus in einer* V_n.[233])

229) Eine geometrische Erklärung für die erste Krümmung zuerst bei *A. Voss*, Math. Ann. 16 (1880), p. 150. Eine Erklärung mittels des Parallelismus in der V_n bei *J. Lipka*, Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 353, eine Verallgemeinerung bei *J. Lipka*, Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1923), p. 345. Für $n = 2$ ist die erste Krümmung identisch mit der geodätischen Krümmung der Flächentheorie. Vgl. III D 3, Nr. **11—13** (*R. v. Lilienthal*) und *Bianchi-Lukat*, p. 603 ff.

230) *H. Kühne*, Arch. Math. Phys. (3) 4 (1903), p. 300. Die Ableitung ist hier unterdrückt.

231) *W. Blaschke*, Math. Ztschr. 6 (1920), p. 94. Für den metrischen Raum *H. Weyls* (Nr. 28) hat *G. Juvet*, Paris C. R. 172 (1921), p. 1647, Bull. Soc. neuchâteloise des sc. nat. 46 (1920), p. 1 entsprechende Formeln aufgestellt. Eine Kritik dieser Formeln und ihre Ersetzung durch andere bei *J. A. Schouten*, Riccikalkül, p. 226. Für die V_n vgl. auch *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 72 ff.

232) *T. Levi-Civita*, Palermo Rend. 42 (1917), p. 173 (vgl. auch Questions III). Zu der „Nota critica" am Schlusse dieser Arbeit vgl. *J. Pérès*, Lincei Rend. Rom (5) 29^{I} (1920), p. 134. — Schon vorher tritt gelegentlich — im besonderen Falle einer S_n — eine Verschiebung eines Vektors nach einem Nachbarpunkte auf bei *L. E. J. Brouwer*, Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 15 (1906), p. 75, bes. p. 80 (holl.) = Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 9 (1906), p. 116. Auch bei *A. Dall'Acqua*, Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 1 wird auf p. 7 f. nach *H. Poincaré* eine Art Parallelverschiebung in V_3 definiert. Nach *H. Weyl*, Raum . . ., 5. Aufl., p. 325 ist die Theorie der Parallelverschiebung *auf einer Fläche* und der Krümmung im Grunde schon enthalten in *J. J. Thomson* (*Lord Kelvin*) und *P. G. Tait*, A treatise on natural philosophy, Part I, sect. 135—137, p. 105—109 der Ausgabe von 1912.

233) Unabhängig von *T. Levi-Civita* hat *J. A. Schouten* den Begriff der „geodätischen Bewegung" gebildet, der mit dem des Parallelismus in einer V_n äquivalent ist. Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 21 (1918), p. 607; Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), 95 S., bes. p. 44 ff., wo auch eine geometrische und mechanische Deutung gegeben wird. Vgl. auch *A. D. Fokker*, Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 27 (1918), p. 363 (holl.); Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 21 (1918); p. 505; Wisk. Tijdschr. 14 (1918), p. 249 (holl.); *A. Carpanese*, Ann. di mat. (3) 28 (1919), p. 147; *J. Pérès*, Lincei Rend. Rom (5) 28^{I} (1919), p. 425; *E. Persico*, ebenda 30^{II} (1921), p. 127; *G. Corbelini*, ebenda 32^{I} (1923), p. 72.

In einer V_n m^{ter} Klasse (Nr. 24) sei eine Kurve $\mathfrak{C}$ und durch einen Punkt P von $\mathfrak{C}$ eine Richtung (α) gegeben. Dann heißt nach *T. Levi-Civita*[232]) eine Richtung (β), die in der V_n von einem Nachbarpunkte Q der Kurve $\mathfrak{C}$ ausgeht, parallel zur Richtung (α), wenn in der R_{n+m}, in welche die V_n eingebettet werden kann, $\sphericalangle(\alpha)(f) = \sphericalangle(\beta)(f)$ ist für alle von (α) verschiedenen Richtungen (f), die in der V_n von P ausgehen. Eine andere Erklärung des Parallelismus, die nur auf der inneren Geometrie der V_n selbst beruht, gibt *F. Severi*[234]), weitere derartige Erklärungen *J. A. Schouten*[233]).

Wenn man die Koordinaten x_λ eines Punktes P der Kurve $\mathfrak{C}$ und die Richtungskonstanten ξ^λ $(a_{\mu\nu}\xi^\lambda\xi^\mu = 1)$ der von P ausgehenden Richtung (α) in der V_n als Funktionen des Bogens s von $\mathfrak{C}$ gibt, so bestimmen sich die Zuwüchse $d\xi^\lambda$ für die zu (α) parallele Richtung (β) im Nachbarpunkte $Q\left(x_\lambda + \frac{dx^\lambda}{ds}ds\right)$ der Kurve $\mathfrak{C}$ aus dem Gleichungssystem:

$$(12) \qquad \frac{d\xi^\lambda}{ds} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{ds}\xi^\nu = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$ [235])

In den „Momenten" $\xi_\mu = a_{\mu\nu}\xi^\nu$ geschrieben, lautet dieses System:

$$(13) \qquad \frac{d\xi_\mu}{ds} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}\frac{dx^\nu}{ds}\xi_\lambda = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

(12) oder (13) sind die *Differentialgleichungen des Parallelismus in einer* V_n.

Die *Fundamentaleigenschaften des Parallelismus in einer* V_n sind:

1. Längs eines gegebenen Weges ist der Parallelismus symmetrisch und transitiv.
2. Sind P, P_1 zwei Punkte der V_n, (α) eine Richtung durch P in der V_n, so hängt die zu (α) parallele Richtung (α_1) durch P_1 im allgemeinen von dem Wege ab, auf welchem man von P nach P_1 geht. Die Unabhängigkeit vom Wege kennzeichnet die R_n.

---

234) *F. Severi,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 227. Vgl. *A. Carpanese*[219]), § 10; *E. Bompiani,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 363 ff. — Bei der Parallelverschiebung einer Richtung (α) längs der geodätischen Linie vom Anfangselement PQ ist der Parallelismus in der V_n („Parallelismus von *Levi-Civita*") zu unterscheiden von dem Parallelismus in der V_2, die durch alle geodätischen Linien gebildet wird, welche dem durch die Anfangsrichtungen PQ und (α) bestimmten Büschel angehören („Parallelismus von *Severi*"). Die Parallelen zu einer Richtung (α) in P nach *Levi-Civita* und *Severi* bilden in zweiter Ordnung einen Winkel, den *E. Bompiani* bestimmt hat [Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 371 ff.].

235) Integration dieses Systems bei *P. Dienes,* Palermo Rend. 47 (1923), p. 144.

3. Längs einer geodätischen Linie sind die Richtungen ihrer Tangenten parallel. Diese Eigenschaft ist für die geodätischen Linien der V_n charakteristisch. Hierin liegt die neue Deutung der Gleichungen (8), auf die vorhin angespielt wurde.
4. Verschiebt man zwei Richtungen parallel zu sich selbst längs eines beliebigen Weges, so bleibt ihr Winkel erhalten. Insbesondere bilden parallele Richtungen längs einer geodätischen Linie mit dieser denselben Winkel.

Das gewöhnliche Differential eines Tensors in bezug auf ein parallel mitbewegtes Bezugssystem ist das kovariante Differential [III D 10, Nr. **19** (*R. Weitzenböck*)] des Tensors (*J. A. Schouten*[233]).

H. Weyl hat den Begriff des Parallelismus analysiert und zu einem stufenweisen Aufbau der „reinen Infinitesimalgeometrie" verwertet, der im V. Abschnitt besprochen werden soll, ebenso wie gewisse von verschiedenen Autoren untersuchte Verallgemeinerungen dieses Begriffes. Auch in der gewöhnlichen Flächentheorie (V_2 im R_3) hat der Begriff des Parallelismus schon Verwendung gefunden.[236])

19. Der Krümmungstensor und die aus ihm abgeleiteten Größen. Während im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum und ebenso im R_n ein Vektor bei Parallelverschiebung längs einer beliebigen geschlossenen Kurve nach einmaligem Umgang in seine Anfangslage zurückkehrt, ist das in einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit, die kein R_n ist, nicht mehr der Fall. Führt man in einer solchen V_n den Vektor ξ^λ durch Parallelverschiebung um ein von zwei Linienelementen dx^λ und δx^λ in einem Punkte P aufgespanntes infinitesimales Parallelogramm herum, so erfährt er dabei, abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung, den Zuwachs:

(14) $\Delta \xi^\lambda = \delta d \xi^\lambda - d \delta \xi^\lambda = -\frac{1}{2} R^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu \nu} \xi^\varkappa (dx^\mu \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\mu)$.[237])

236) Vgl. *D. J. Struik*, Grundzüge, z. B. p. 89 f.; *A. Myller*, Paris C. R. 174 (1922), p. 997; 176 (1923), p. 483; *G. Corbelini*, Lincei Rend. Rom (5) 32^I (1923), p. 72; *H. Weyl*, Raum . . ., 5. Aufl., p. 88 ff.; *L. Bianchi*, Napoli Rend. (3) 28 (1922), p. 150.

237) Zu dieser Herleitung des Krümmungstensors in einer V_n vgl. etwa *T. Levi-Civita*, Palermo Rend. 42 (1917) p. 179 f., 196 f.; *J. A. Schouten*, Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), p. 64 ($n = 4$); *H. Weyl*, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 384. Strenge Herleitung der Änderung eines Vektors bei Parallelverschiebung um eine geschlossene infinitesimale Kurve herum bei *J. Pérès*, Lincei Rend. Rom. (5) 28 (1919), p 425; *P. Dienes*, Palermo Rend. 47 (1923), p. 144; *H. Tietze*, Math. Ztschr. 16 (1923), p. 111; vgl. auch *W. Wirtinger*, Trans. Phil. Soc. Cambridge 22 (1922), p. 443. — Bei der Parallelverschiebung des Textes erfährt das ganze Bündel von ∞^{n-1} Richtungen in P im allgemeinen eine Drehung. Jede (reelle) Richtung, die dabei ungeändert bleibt, heißt eine *Rotationsachse* der betrachteten Flächenrichtung. Dieser Begriff, sowie ein invariantes *Maß der Drehung* bei *E. Bompiani*, Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 839 ff.

Der in (14) rechts auftretende Tensor vierter Stufe heißt der *Krümmungstensor* der V_n, auch der *Riemann-Christoffelsche Tensor oder Affinor.* Seine gemischten Koordinaten $R_{\varkappa\cdot\mu\nu}^{\lambda}$ sind mit den Vierzeigersymbolen zweiter Art von *E. B. Christoffel*[238]) identisch:

$$(15)\quad R_{\varkappa\cdot\mu\nu}^{\lambda} = \{\varkappa\lambda, \mu\nu\} = \frac{\partial \left\{ {\varkappa\mu \atop \lambda} \right\}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \left\{ {\varkappa\nu \atop \lambda} \right\}}{\partial x^{\mu}} + \left\{ {\varkappa\mu \atop \varrho} \right\} \left\{ {\varrho\nu \atop \lambda} \right\} - \left\{ {\varkappa\nu \atop \varrho} \right\} \left\{ {\varrho\mu \atop \lambda} \right\},^{239)}$$

seine kovarianten Koordinaten $R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = a_{\lambda\tau} R_{\varkappa\cdot\mu\nu}^{\tau}$ also mit den Vierzeigersymbolen erster Art:

$$(16)\quad R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = (\varkappa\lambda, \mu\nu) = \frac{\partial \left[{\varkappa\mu \atop \lambda} \right]}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \left[{\varkappa\nu \atop \lambda} \right]}{\partial x^{\mu}} + \left\{ {\varkappa\nu \atop \varrho} \right\} \left[{\lambda\mu \atop \varrho} \right] - \left\{ {\varkappa\mu \atop \varrho} \right\} \left[{\lambda\nu \atop \varrho} \right].^{239)}$$

In einer R_n ist der Krümmungstensor an jeder Stelle Null.

Aus dem Krümmungstensor ergibt sich durch Verjüngung der

---

238) *E. B. Christoffel,* J. f. Math. 70 (1869), p. 46 = Ges. Math. Abh. I, p. 352.

239) In der Bezeichnungsweise (Buchstaben, Stellung der Zeiger, Zahlenfaktoren) weichen die verschiedenen Autoren etwas voneinander ab; vergleichende Tabelle bei *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 186 f. *B. Riemann,* Commentatio, p. 402 schreibt für das $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ des Textes $-\frac{1}{2}(\varkappa\lambda\mu\nu)$. Wegen der Eigenschaften des Krümmungstensors vgl. III D 10 b), Nr. 21 (*R. Weitzenböck*). Die *Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus dem Krümmungstensor* behandelt *H. Vermeil,* Math. Ann. 79 (1918), p. 289. — Im V_3 lassen sich die $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ durch den symmetrischen Tensor $\alpha_{\lambda\mu} = -(R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}R \cdot a_{\lambda\mu})$ ersetzen, indem man mit *G. Ricci* mod. 3 kongruente Zeiger als identisch ansieht und $a \cdot \alpha^{\lambda\mu} = R_{\lambda+1\,\lambda+2\,\mu+1\,\mu+2}$ setzt. Vgl. dazu auch *E. B. Christoffel,* J. f. Math. 70 (1869), p. 65 = Ges. Math. Abh. I, p. 371. — Über die identischen Relationen für die $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ [III D 10 b), Nr. 21 (*R. Weitzenböck*)] und ihre gegenseitige Abhängigkeit vgl. *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (5) 19II (1910), p. 86; *G. Hessenberg,* Math. Ann. 78 (1917), p. 190. Erwähnt sei auch die wichtige von *G. Ricci* entdeckte, von *E. Padova,* Lincei Rend. Rom (4) 5I (1889), p. 174 zuerst publizierte Identität für die kovarianten Ableitungen der $R_{\varkappa\cdot\mu\nu}^{\lambda}$:

$$R_{\varkappa\ \mu\nu(\varrho)}^{\lambda} + R_{\varkappa\cdot\varrho\mu(\nu)}^{\lambda} = R_{\varkappa\cdot\nu\varrho(\mu)}^{\lambda} = 0,$$

die gewöhnlich nach ihrem Wiederentdecker die *Identität von Bianchi* genannt wird [*L. Bianchi,* Lincei Rend. Rom (5) 11I (1902), p. 3]. Neuere Ableitungen bei *G. Herglotz,* Leipz. Ber. 73 (1921), p. 223 ff.; *J. A. Schouten,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 58; *R. Weitzenböck,* Wien. Ber. 130 (1921), p. 31; *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 148; *A. E. Harward,* Phil. Mag. 44 (1922), p. 380. Verallgemeinerung auf allgemeinere Parallelübertragungen (Nr. 28, 31): *R. Bach,* Math. Ztschr. 9 (1921), p. 110; *A. Veblen,* Proc. Nat. Ac. sc. 8 (1922), p. 192; *J. A. Schouten,* Math. Ztschr. 17 (1923), p. 111; *R. Weitzenböck,* Invariantentheorie, p. 356; *L. Berwald* in *W. Blaschke,* Differentialgeometrie II, p. 171; *J. A. Schouten,* Riccikalkül, p. 90. Vgl. auch *W. Wirtinger,* Trans Cambridge Phil. Soc. 22 (1922), p. 444; *E. Cartan,* J. de math. (9) 1 (1922), p. 141, Ann. Éc. Norm. (3) 40 (1923), p. 325; *R. Lagrange,* Thèse, Paris 1923, p. 17 = Ann. de Toulouse 1923.

symmetrische Tensor zweiter Stufe (*„einmal verjüngter Krümmungstensor“*)[240]):

$$(17)\quad R_{\varkappa\mu} = R^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\lambda} = \frac{\partial \begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \lambda\end{Bmatrix}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \lambda\end{Bmatrix}}{\partial x^{\mu}} + \begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\lambda\\ \lambda\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\mu\\ \lambda\end{Bmatrix},$$

und durch abermalige Verjüngung der *Krümmungsskalar:*

$$(18)\qquad R = a^{\varkappa\mu} R_{\varkappa\mu} = a^{\varkappa\mu} a^{\lambda\nu} R_{\varkappa\lambda\mu\nu}.$$

In der Geometrie sind einige aus dem Krümmungstensor und seinen Verjüngungen abgeleitete Größen von besonderer Wichtigkeit: das *Riemannsche Krümmungsmaß*, die *Richtungsinvariante* und die *Ortsinvariante der Krümmung.*[241])

Das *Riemannsche Krümmungsmaß* K_R in einem Punkte P einer V_n nach der Flächenrichtung $(dx^{\lambda}, \delta x^{\lambda})$, die von zwei verschiedenen von P ausgehenden Linienelementen dx^{λ}, δx^{λ} bestimmt wird, ist gegeben durch:

$$(19)\quad K_R = \frac{R_{\varkappa\lambda\mu\nu}(dx^{\varkappa}\delta x^{\lambda} - dx^{\lambda}\delta x^{\varkappa})(dx^{\mu}\delta x^{\nu} - dx^{\nu}\delta x^{\mu})}{(a_{\varkappa\mu}a_{\lambda\nu} - a_{\varkappa\nu}a_{\lambda\mu})(dx^{\varkappa}\delta x^{\lambda} - dx^{\lambda}\delta x^{\varkappa})(dx^{\mu}\delta x^{\nu} - dx^{\nu}\delta x^{\mu})}.\ ^{242)}$$

Die Summen in Zähler und Nenner sind darin nur über alle Kombinationen der Wertepaare $\varkappa, \lambda$; μ, ν zu erstrecken, für die $\varkappa < \lambda$; $\mu < \nu$ ist. K_R bleibt unverändert, wenn man an Stelle der Linienelemente dx^{λ}, δx^{λ} zwei beliebige getrennte Linienelemente $a\,dx^{\lambda} + \alpha\,\delta x^{\lambda}$, $b\,dx^{\lambda} + \beta\,\delta x^{\lambda}$ des von ihnen gebildeten Büschels nimmt (*„Büschelinvariante“* nach *F. Klein*).

Aus K_R ergibt sich durch einmalige Verjüngung im Zähler und Nenner die *Richtungsinvariante der Krümmung*[243]):

$$(20)\qquad K_{ds} = \frac{1}{n-1}\,\frac{R_{\varkappa\lambda\mu\nu}a^{\lambda\nu}\,dx^{\varkappa}dx^{\mu}}{a_{\lambda\nu}dx^{\lambda}dx^{\nu}} = \frac{1}{n-1}\,\frac{R_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}{a_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}},$$

und durch nochmalige Verjüngung die *Ortsinvariante der Krümmung*[243]):

$$(21)\qquad K = \frac{1}{n(n-1)} R_{\varkappa\lambda\mu\nu} a^{\varkappa\mu} a^{\lambda\nu} = \frac{1}{n(n-1)} R.$$

---

240) Eine geometrische Konstruktion dieses Tensors bei *E. Bompiani*, Paris C. R. 174 (1922), p. 737.

241) Weitere (in den Komponenten des Krümmungstensors quadratische) Invarianten hat *E. Bompiani*, Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 378 ff., 849 ff. eingeführt und eingehend studiert.

242) *B. Riemann*, Commentatio, p. 403, Formel III.

243) Die Benennungen des Textes rühren von *F. Klein* her; vgl. Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 26 (1917), 2. Abt., p. 70. Bei *G. Ricci*, Atti Ist. Veneto 63 (1904), p. 1233 heißt $(n-1)K_{ds}$ die mittlere Krümmung der V_n im Punkte P nach der Richtung von ds. Für das $-R$ des Textes ist in Italien der Name *„curvatura media“* gebräuchlich. — Für $n = 4$ ist der Tensor $G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}Ra_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}$ besonders wichtig [vgl. V 19, Nr. 17 (*W. Pauli jr.*)]. Eine geometrische Erklärung dieses Tensors bei *E. Cartan*, Paris C. R. 174 (1922), p. 437.

Zunächst sollen die wichtigsten geometrischen Erklärungen für diese invarianten Bildungen besprochen werden.

Die *Büschelinvariante* K_R erscheint bei *B. Riemann*[244]) als die Verallgemeinerung des *Gauß*schen Krümmungsmaßes der Flächen. Durch die Linienelemente dx^λ, δx^λ sind zwei von P ausgehende geodätische Linien (g_1), (g_2) und durch diese ein Büschel geodätischer Linien mit dem Mittelpunkte in P festgelegt. K_R ist das *Gauß*sche Krümmungsmaß der Fläche, die von diesem Büschel geodätischer Linien gebildet wird, im Punkte P. Eine zweite, gleichfalls von *B. Riemann*[245]) gegebene Erklärung, auf die wir hier nicht eingehen können, entspringt der analytischen Definition des Krümmungstensors mit Hilfe der Normalkoordinaten [III D 10 b), Nr. 20 (*R. Weitzenböck*)]. Neuerdings hat *F. Severi*[246]) diese Erklärung unter Zuhilfenahme des R_{n+m}, in den die V_n eingebettet werden kann (Nr. 24), mehr geometrisch formuliert.

T. Levi-Civita[247]) verwendet zur Erklärung von K_R den Begriff des Parallelismus in einer V_n (Nr. 18): $\overline{PQ} = \delta s$ sei ein infinitesimaler Bogen einer geodätischen Linie der V_n. Von P und Q aus ziehe man zwei geodätische Linien in parallelen Richtungen und trage auf ihnen den gleichen Bogen $\overline{PP'} = \overline{QQ'} = ds$ ab. P' und Q' verbinde man wieder durch eine geodätische Linie.[248]) Dann hat man im Punkte P nach der Flächenrichtung $(PP'; PQ)$:

$$K_R = \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}{\Delta^2}. \tag{22}$$

Darin bedeutet Δ den Flächeninhalt des infinitesimalen „Parallelogrammoides“ $PP'Q'Q$.

Endlich gibt *E. Bompiani*[249]) zwei geometrische Interpretationen von K_R mit Hilfe gewisser Winkelgrößen.

Die *Richtungsinvariante* K_{ds} *der Krümmung* ist nach *G. Ricci*[250])

244) *B. Riemann*, Habilitationsvortrag II, 3; Commentatio, p. 403. — Vgl. auch *A. Voss*, Math. Ann. 16 (1880), p. 574; *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p. 539; *J. Hadamard*, Procès-verbaux, Bordeaux 1897/8, p. 85.

245) *B. Riemann*, Habilitationsvortrag II, 2. Vgl. auch Nr. 16.

246) *F. Severi*, Palermo Rend. 42 (1917), p. 251 ff.

247) *T. Levi-Civita*, Palermo Rend. 42 (1917), p. 173. Vgl. auch [246]).

248) Wegen einer allgemeineren Möglichkeit vgl. *F. Severi*, Palermo Rend. 42 (1917), p. 245.

249) *E. Bompiani*, Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 366 ff. Daselbst p. 853 auch eine geometrische Deutung des Ausdruckes $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}\xi_1^\varkappa\xi_2^\lambda\eta_1^\mu\eta_2^\nu$, in dem $\xi_1^\varkappa, \xi_2^\lambda$; η_1^μ, η_2^ν die Koordinaten zweier Paare von Einheitsvektoren bedeuten, und p. 844 eine kinematische Interpretation von K_R im Falle $n = 3$.

250) *G. Ricci*, Atti Ist. Veneto 63 (1904), p. 1233.

und *G. Herglotz*[251]) der Mittelwert der Krümmungsmaße nach den $n-1$ Flächenrichtungen, die durch die gegebene Richtung dx^λ und $n-1$ zu ihr und untereinander senkrechte Richtungen bestimmt werden.

Die *Ortsinvariante K der Krümmung* ist der Mittelwert der Krümmungsmaße K_R nach den $\frac{n(n-1)}{2}$ durch ein orthogonales n-Bein in der V_n bestimmten Flächenrichtungen.[252]) Einen anderen Ausdruck für K hat *H. Vermeil*[253]) auf Veranlassung von *F. Klein* angegeben:

$$(23)\qquad K = \frac{6}{n-1}\lim_{\varrho\to 0}\frac{F_n - O_n}{\varrho^2 F_n} = \frac{6(n+2)}{n(n-1)}\lim_{\varrho\to 0}\frac{I_n - W_n}{\varrho^2 I_n}.$$

Hierin bedeutet I_n, F_n Inhalt und Oberfläche einer $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Kugel vom Halbmesser ϱ; W_n, O_n Inhalt und Oberfläche einer hinreichend kleinen $(n-1)$-dimensionalen Entfernungskugel[254]) vom Halbmesser ϱ um den betrachteten Punkt in der V_n. Endlich tritt K bei den V_n erster Klasse [Nr. 24] auch als doppelter Mittelwert der Produkte der reziproken Hauptkrümmungsradien [Nr. 22] zu je zweien auf, wobei die V_n in einen R_{n+1} eingebettet gedacht wird. Bei einer beliebigen V_n kann man den Entwicklungen von *W. Killing*[255]) verschiedene geometrische Deutungen von K entnehmen, die aber alle den R_{n+m} benutzen, in den die V_n eingebettet werden kann (Nr. 24).

Die im vorstehenden besprochenen invarianten Bildungen sind für die innere Beschaffenheit der V_n von großer Bedeutung. Einige darauf bezügliche Sätze seien hier noch zusammengestellt.

Wie schon erwähnt (Nr. 17), haben zwei V_n mit derselben Metrik

---

251) *G. Herglotz,* Leipz. Ber. 68 (1916), p. 199. Ebenda für $n=4$ eine auch für beliebiges n gültige allgemeinere Erklärung. Vgl. auch *F. Klein,* Jahresb Deutsche Math.-Ver. 26 (1917), 2. Abt., p. 70.

252) *F. Klein* hat daher für K auch den Namen *mittleres Krümmungsmaß* der V_n vorgeschlagen. — Der Satz des Textes findet sich anscheinend (für $n=4$) zuerst bei *H. A. Lorentz,* Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 24 (1916), p. 1389 (holl.), dann bei *G. Herglotz*[251]). — Vgl. auch *J. A. Schouten,* Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), p. 67 ff.

253) *H. Vermeil,* Gött. Nachr. 1917, p. 334. Die Formeln (10) sind die Verallgemeinerung der für $n=2$ von *J. Bertrand,* J. de math. 13 (1848), p. 80 und *V. Puiseux,* ebenda p. 87, bzw. von *Diguet,* ebenda p. 83 angegebenen. Vgl. III D 1, 2, Nr. 36 (*H. v. Mangoldt*); III D 3, Nr. 15 (*R. v. Lilienthal*).

254) d. h. des Ortes der Punkte konstanter geodätischer Entfernung ϱ von einem festen Punkte P der V_n. P heißt der Mittelpunkt, ϱ der Halbmesser der Entfernungskugel. Die Bezeichnung nach *B. Baule,* Math. Ann. 83 (1921), p. 286.

255) *W. Killing,* Raumformen II, § 13. Seine Entwicklungen beziehen sich allerdings auf V_n in S_{n+m}, sind aber leicht auf V_n in R_{n+m} übertragbar.

in entsprechenden Punkten und nach entsprechenden Flächenrichtungen immer dasselbe *Riemann*sche Krümmungsmaß. Dagegen zieht die Gleichheit des *Riemann*schen Krümmungsmaßes K_R in entsprechenden Punkten und nach entsprechenden Flächenrichtungen für zwei beliebige V_n nicht auch umgekehrt die Gleichheit ihrer Maßbestimmungen nach sich. Bei konstantem K_R ist aber auch die Umkehrung richtig: $K_R = 0$ charakterisiert die euklidischen Mannigfaltigkeiten R_n [*B. Riemann, R. Lipschitz*[256])], $K_R = \text{const.}\ (\neq 0)$ oder:

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = K_0(a_{\varkappa\mu}a_{\lambda\nu} - a_{\varkappa\nu}a_{\lambda\mu}) \qquad (K_0 \neq 0) \tag{24}$$

die nicht-euklidischen Mannigfaltigkeiten (*E. Beltrami, R. Lipschitz, F. Schur*[257])]. Ist in einer V_n $(n > 2)$ das *Riemann*sche Krümmungsmaß in jedem Punkte nach allen Flächenrichtungen hin konstant, so ändert es sich auch von Punkt zu Punkt nicht [Satz von *F. Schur*[258])].

Ein ähnlicher Satz gilt auch für die Richtungsinvariante der Krümmung K_{ds}.[259]) Ist K_{ds} nicht in jedem Punkte der V_n nach allen von ihm ausgehenden Richtungen [und daher für $n > 2$ in der ganzen V_n[259])] konstant, so existieren in jedem Punkte der V_n n gegenseitig senkrechte Richtungen, nach denen K_{ds} einen stationären Wert annimmt. Diese Richtungen, die nicht eindeutig bestimmt zu sein brauchen, heißen nach *G. Ricci*[260]) die *Hauptrichtungen*, das von ihnen gebildete

---

256) *B. Riemann,* Commentatio, p. 401 f.; *R. Lipschitz,* J. f. Math. 70 (1869), p. 71. Weitere Literatur: *M. Lévy,* Paris C. R. 86 (1878), p. 463; *R. Beez,* Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 1, 65; *G. Ricci,* Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 139; *W. de Tannenberg,* Paris C. R. 118 (1894), p. 1092; 119 (1894), p. 321; *L. Bianchi,* Lincei Rend. Rom (5) 7^{II} (1898), p. 147; *Bianchi-Lukat,* § 321; *H. Weyl,* Gött. Nachr. 1921, p. 103; *W. Wirtinger,* Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1922), p. 439. Vgl. auch Nr. 28.

257) Daß ein nichteuklidischer Raum (im Sinne von *Lobatschewskij* bzw. *Riemann*) konstantes *Riemann*sches Krümmungsmaß besitzt, hat *E. Beltrami,* Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 232 = Opere Mat. I, p. 406 gezeigt. Den weitergehenden Satz des Textes hat für beliebiges n zuerst *R. Lipschitz,* J. f. Math. 72 (1870), p. 1 bewiesen, später in übersichtlicherer Weise *F. Schur,* Math. Ann. 27 (1886), p. 537; vgl. etwa noch: *L. Bianchi,* Lincei Rend. Rom (5) 7^{II} (1898), p. 147; *Bianchi-Lukat,* §§ 321 ff.; *O. Tedone,* Rend. Ist. Lomb. 32 (1899), p. 592; *F. S. Woods,* Ann. of Math. (2) 3 (1902), p. 71; *H. Weyl,* Gött. Nachr. 1921, p. 110 ff. — S. dazu auch Fußnote [205a]).

258) *F. Schur*[257]), p. 563. Einfacher Beweis bei *L. Bianchi,* Lincei Rend. Rom (5) 11^{I} (1902), p. 3; Lezioni, 2. ed., t. I, p. 349; vgl. auch *H. Weyl,* Gött. Nachr. 1921, p. 99.

259) Vgl. *G. Herglotz,* Leipz. Ber. 68 (1916), p. 203, wo ein verwandter Satz ausgesprochen wird; *L. P. Eisenhart,* Proc. Nat. Ac. sc. 8 (1922), p. 24.

260) *G. Ricci,* Atti Ist. Veneto 63 (1904), p. 1233; für $n = 3$ schon Mem. Soc. It. sc. (3) 12 (1899), p. 69 und Paris C. R. 127 (1898), p. 344. Vgl. auch

n-Bein das *Haupt-n-Bein*, die zugehörigen Werte von $(n-1)\cdot K_{ds}$ die *Hauptinvarianten* im betrachteten Punkt der V_n.[261]) Die Hauptinvarianten sind auch dann eindeutig bestimmt, wenn es die Hauptrichtungen nicht sind. Die Hauptrichtungen setzen sich zu n Systemen von je ∞^{n-1} Kurven der V_n zusammen, den *Hauptkongruenzen* der V_n. Die Hauptkongruenzen bilden ein System von n paarweise orthogonalen Kurvenkongruenzen (Nr. 20). Sie stehen in Beziehung zur Theorie der geodätischen V_m $(m < n)$, und allgemeiner zur Theorie der V_m mit lauter Nabelpunkten in der V_n (Nr. 27).

20. Die Orthogonalsysteme von Kurvenkongruenzen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Theorie der Orthogonalsysteme von Kurvenkongruenzen in einer V_n, die von *G. Ricci*[262]) herrührt, ist eine Verallgemeinerung der Methode der Ableitung nach den Bogenlängen zweier orthogonaler Kurvenscharen auf einer Fläche.[263]) Sie hat durch *G. Ricci*[264]) und andere italienische Mathematiker[265]), na-

---

L. P. Eisenhart, Proc. Nat. Ac. sc. 8 (1922), p. 24, sowie *J. L. Synge,* ebenda, p. 198, 204, wo das Wort „Hauptrichtungen" in allgemeinerer Bedeutung gebraucht wird. Allgemein spricht man von den Hauptrichtungen eines beliebigen symmetrischen Tensors 2. Stufe (s. etwa *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 33). Die *Ricci*schen Hauptrichtungen sind in diesem Sinn die Hauptrichtungen des einmal verjüngten Krümmungstensors $R_{\varkappa\mu}$ [Nr. 19, Gl. (17)]. Vgl. noch *L. P. Eisenhart,* Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 259. — Ein merkwürdiges durch den Krümmungstensor einer V_4 bestimmtes Richtungsquadrupel hat *E. Kretschmann,* Ann. d. Phys. 53 (1917), p. 592 betrachtet.

261) Für $n=3$ bilden die Hauptinvarianten ein vollständiges System von Differentialinvarianten zweiter Ordnung für die Grundform ds^2 (Nr. 17); *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (5) 21^{I} (1912), p. 527; Palermo Rend. 33 (1912), p. 194.

262) *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (5) 4^{II} (1895), p. 232; Lincei Mem. Rom (5) 2 (1896), p. 276. Zusammenfassender Bericht: *G. Ricci* und *T. Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125, insb. Kap. II u. IV.

263) Vgl. III D 3, Nr. 8, 29 (*R. v. Lilienthal*).

264) *G. Ricci,* Mem. Soc. It. d. Scienze (3) 12 (1899), p. 69; Auszüge: Paris C. R. 127 (1898), p. 344, 360; Math. Ann. 54 (1901), p. 173; Lincei Rend. Rom (5) 14^{II} (1905), p. 487 (Theorie der V_3 und V_n mit kontinuierlichen Bewegungsgruppen; vgl. Nr. 26); Lincei Rend. Rom (5) 11^{I} (1902), p. 355 (V_m in V_n; vgl. Nr. 21); Lincei Rend. Rom (5) 12^{I} (1903), p. 409 (Geodätische V_m $(1 < m < n)$ in einer V_n, insb. für $n=3$; vgl. Nr. 27); Atti Ist. Veneto 63 (1904), p. 1233 (Hauptkongruenzen einer V_n; vgl. Nr. 19); Lincei Rend. Rom (5) 19^{I} (1910), p. 181; 19^{II} (1910), p. 85; Atti Soc. It. Progr. sc. 3 (1910), p. 477; Lincei Rend. Rom (5) 27^{II} (1918), p. 36 (V_n mit gegebenen inneren Eigenschaften, bes. V_n mit Orthogonalsystemen von Kurvenkongruenzen mit konstanten Rotationskoeffizienten); Lincei Rend. Rom (5) 27^{I} (1918), p. 21, 75 (V_3 mit geodätischen Hauptkongruenzen; vgl. Nr. 19); Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 65 (Reduzierbarkeit des ds^2 einer V_n auf die „statische Form"; vgl. Nr. 17); Lincei Rend. Rom

mentlich *T. Levi-Civita*[266]), die verschiedenartigsten Anwendungen erfahren. Neuerdings ist sie von *U. Cisotti*[267]) nach der operativen Seite hin ergänzt, und von *J. A. Schouten* und *D. J. Struik* im Rahmen der direkten Analysis *Schoutens* (Nr. **16 a**) aufs neue entwickelt worden.[268]) Die beiden zuletzt genannten Autoren haben sie dann auf die verschiedensten Fragen angewendet, insbesondere auf die Theorie der n-fachen Orthogonalsysteme in einer V_n (Nr. **25**) und der V_m in V_n $(m < n)$ (Nr. **21, 23**).[269])

In einer V_n vom quadrierten Bogenelement Nr. **17**, (2), definieren die Gleichungen

$$(25)\qquad \frac{dx^\varrho}{ds} = \frac{dx^\varrho}{\sqrt{a_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}} = \lambda^\varrho,$$

wo die λ^ϱ gegebene Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten, die in dem betrachteten Bereich der V_n regulär sind, nicht alle zugleich

---

(5) 32^II (1923), p. 265 (Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kurvenkongruenzen auf der Einheitskugel).

265) *A. dall'Acqua*, Atti Ist. Veneto 59 (1900), p. 245; Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 1 (Theorie der Kurvenkongruenzen in einer V_3); Lincei Rend. Rom (5) 12^I (1903), p. 153 (Orthogonalsysteme von Kurvenkongruenzen im R_3 mit konstanten Rotationskoeffizienten); *P. Cattaneo*, Atti Ist. Veneto 61 (1902), p. 41 (Kurvenkongruenzen im R_3); *A. Tonolo*, Atti Ist. Veneto 71 (1912), p. 1075 (Verallgemeinerung der Theorie des beweglichen Trieders auf n Dimensionen). Vgl. auch *G. Corbelini*, Lincei Rend. Rom (5) 32^I (1923), p. 112; *C. Dei*, ebenda, p. 474, sowie *L. P. Eisenhart*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 259 (Gewisse Orthogonalsysteme von Normalenkongruenzen).

266) *T. Levi-Civita*, Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 255 (Bestimmung aller V_n, die eigentliche geodätische Transformationen zulassen; vgl. Nr. **26**; s. auch *J. E. Wright*, Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 1); Lincei Rend. Rom. (5) 8^I (1899), p 239 (Geraden- und Kurvenkongruenzen im R_3, insb. isotrope); Palermo Rend. 42 (1917), p. 173, §§ 11—13 (Parallelismus in einer V_n; vgl. Nr. **18**).

267) *U. Cisotti*, Lincei Rend. Rom. (5) 27^I (1918), p. 387; 27^II (1918), p. 22.

268) *J. A. Schouten*, Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), 95 p.; Math. Ztschr. 11 (1921), p. 58; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 22 (1919), p. 596, 684; Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 28 (1919), p. 201, 425 (holl.).

269) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 22 (1919), p. 596, 684; Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 28 (1919), p. 201, 425 (holl.) (Anwendung auf die Theorie der n-fachen Orthogonalsysteme von V_{n-1} in einer V_n; vgl. Nr. **25**); Palermo Rend. 45 (1921), p. 313 (Verallgemeinerung des Satzes von *Malus-Dupin* und verwandter Sätze auf V_n); Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 24 (1921), p. 146; Palermo Rend. 46 (1922), p. 165 (Anwendungen auf die Theorie der V_m in V_n; vgl. Nr. **23**). Siehe auch *D. J. Struik*, Grundzüge. Vgl. ferner *V. Hlavatý*, Anz. (Věstnik) Böhm. Ges. Wiss. Prag 1922/3, 30 p. (Verallgemeinerung der Krümmungstheorie).

Null werden und der Gleichung

(26) $$a_{\varrho\tau}\lambda^\varrho\lambda^\tau \equiv \lambda_\varrho\lambda^\varrho = 1$$

genügen, eine Kongruenz von gerichteten Kurven oder *Kurvenkongruenz.*[270])

Es mögen jetzt n paarweise orthogonale Kurvenkongruenzen [1], [2], ..., [n] vorliegen, die durch *lateinische* Zeiger an den λ unterschieden werden sollen: λ_i^ϱ, $\lambda_{i|\varrho}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Die λ genügen dann den Gleichungen:

(27) $$\lambda_i^\varrho\lambda_{k|\varrho} = \varepsilon_{ik}, \qquad (\varepsilon_{ik} = 1 \text{ für } i = k, \text{ sonst Null})$$

oder den äquivalenten:

(28) $$\sum_{i=1}^n \lambda_{i|\varrho}\lambda_{i|\sigma} = a_{\varrho\sigma}, \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i^\varrho\lambda_i^\sigma = a^{\varrho\sigma}.$$

$1, (2, \ldots, n)$ bedeute die Kurve der Kongruenz [1], ([2], ..., [n]), die durch einen beliebigen Punkt der V_n geht, $s_1, (s_2, \ldots, s_n)$ ihren Bogen, so daß $\frac{\partial}{\partial s_i} = \lambda_i^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho}$ ist.

Jedes kovariante System [III D 10 b), Nr. **10** ff. (*R. Weitzenböck*)], kann dann in folgender Form dargestellt werden:

(29) $$v_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_m} = \sum_{r_1, r_2 \ldots r_m} v_{r_1 r_2 \ldots r_m}\lambda_{r_1|\varrho_1}\lambda_{r_2|\varrho_2}\ldots\lambda_{r_m|\varrho_m}$$

und entsprechendes gilt für kontravariante und gemischte Systeme. Die Skalare:

(30) $$v_{r_1 r_2 \ldots r_m} = v_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_m}\lambda_{r_1}^{\varrho_1}\lambda_{r_2}^{\varrho_2}\ldots\lambda_{r_m}^{\varrho_m}$$

heißen die *orthogonalen* Koordinaten des Tensors v, dessen kovariante Koordinaten die $v_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_m}$ sind. Die orthogonalen Koordinaten $\lambda_{i|k}$ der λ_i^ϱ sind Null oder Eins, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$ ist; die des Fundamentaltensors $a_{\lambda\mu}$ der V_n sind die ε_{lm}.[270a])

Die orthogonalen Koordinaten der kovarianten Ableitung $v_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_m(\tau)}$ eines Tensors m^{ter} Stufe $v_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_m}$ werden mit den entsprechenden lateinischen Zeigern bezeichnet:

(31) $$v_{r_1 r_2 \ldots r_m(t)} = v_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_m(\tau)}\lambda_{r_1}^{\varrho_1}\lambda_{r_2}^{\varrho_2}\ldots\lambda_{r_m}^{\varrho_m}\lambda_t^\tau$$

Eine Ausnahme wird nur für die orthogonalen Koordinaten der kovarianten Ableitungen von $\lambda_{i|\varrho}$ gemacht, für die nach *G. Ricci* γ_{irt} geschrieben wird:

(32) $$\gamma_{irt} = \lambda_{i|\varrho(\tau)}\lambda_r^\varrho\lambda_t^\tau.$$

---

270) Zum folgenden vgl. *G. Ricci* und *T. Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125, Kap. II.

270a) Die *orthogonalen Koordinaten* wurden zuerst in den Arbeiten von *J. A. Schouten* und *D. J. Struik* (Fußnote [268]) systematisch verwendet.

Diese Invarianten heißen die *Rotationskoeffizienten* wegen der nahen Beziehung, in der sie zur Theorie des beweglichen Trieders von *G. Darboux*[271]) stehen.[272]) Zwischen ihnen bestehen die Relationen:

$$(33) \qquad \gamma_{irt} + \gamma_{rit} = 0,$$

durch welche die Anzahl der algebraisch unabhängigen γ_{irt} auf $\frac{n^2(n-1)}{2}$ reduziert wird.

Die orthogonalen Koordinaten $v_{r_1 r_2 \ldots r_m(t)}$ der kovarianten Ableitung eines Tensors $v_{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_m}$ drücken sich durch die des Tensors v und die γ_{irt} folgendermaßen aus[273]):

$$(34) \qquad v_{r_1 r_2 \ldots r_m(t)} = \frac{\partial v_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial s_t} + \sum_{i=1}^{n} \{ v_{i r_2 \ldots r_m} \gamma_{i r_1 t} + v_{r_1 i \ldots r_m} \gamma_{i r_2 t} + \cdots + v_{r_1 r_2 \ldots i} \gamma_{i r_m t} \}.$$

Es gilt $f_{(rt)} = f_{(tr)}$, oder ausgeschrieben:

$$(35) \qquad \frac{\partial}{\partial s_t} \frac{\partial f}{\partial s_r} - \frac{\partial}{\partial s_r} \frac{\partial f}{\partial s_t} = \sum_{i=1}^{n} (\gamma_{itr} - \gamma_{irt}) \frac{\partial f}{\partial s_i},$$

d. h. die Differentiationen nach s_r und s_t sind nicht vertauschbar. Ferner hat man die Gleichungen:

$$(36) \qquad v_{h(rt)} - v_{h(tr)} = \sum_{i=1}^{n} R_{ihrt} v_i,$$

in denen R_{ihrt} die orthogonalen Koordinaten des *Riemann*schen Krümmungstensors (Nr. **19**) sind:

$$(37) \qquad R_{pqrt} = R_{\pi \varkappa \varrho \tau} \lambda^{\pi}_{p} \lambda^{\varkappa}_{q} \lambda^{\varrho}_{r} \lambda^{\tau}_{t}.$$

Für $v_h = \lambda_{i|h}$ folgt aus (32), daß die Rotationskoeffizienten γ_{irt} dem folgenden System von Differentialgleichungen erster Ordnung genügen:

$$(38) \qquad \gamma_{ihr(t)} - \gamma_{iht(r)} = R_{ihrt},$$

das bei *G. Ricci*[262]) in aufgelöster Form auftritt.

Die Vorteile der im vorstehenden skizzierten Methode bestehen vor allem darin, daß durchwegs mit Skalaren gerechnet wird und daß sich bei ihr die Zerlegung eines Tensors nach n zueinander orthogo-

---

271) *G. Darboux,* Surfaces I, Livre I, Chap. V; *G. Koenigs,* Leçons de Cinématique, Paris 1897, Chap. X und Note von *E.* u. *F. Cosserat* „Sur la Cinématique dans les milieux continus".

272) Über die geometrische Bedeutung der Rotationskoeffizienten vgl. *G. Ricci*[262]), Lincei Mem. Rom, p. 303, wo die V_n dazu in einen R_{n+m} eingebettet gedacht ist; *T. Levi-Civita,* Palermo Rend. 42 (1917), § 13; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 22 (1919), p. 599.

273) Das Folgende bis auf die Bezeichnungsweise nach *U. Cisotti*[267]).

nalen Richtungen aufs einfachste vollzieht. Der Übergang von kovarianten Koordinaten zu orthogonalen geschieht durch Ersetzen aller griechischen Zeiger durch die entsprechenden lateinischen und gleichzeitigen Übergang von $a_{\lambda\mu}$ zu ε_{lm}. Auch der Prozeß der Verjüngung u. ä. m. überträgt sich in einfacher Weise.[274])

Im folgenden sollen die einfachsten geometrischen Anwendungen der Theorie kurz besprochen werden.

Die Kurvenkongruenz $[n]$ ist dann und nur dann eine *Normalenkongruenz*, d. h. sie besteht aus den orthogonalen Trajektorien einer Schar von V_{n-1} in der V_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{konst.}, \tag{39}$$

wenn die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Gleichungen:

$$\gamma_{nlm} - \gamma_{nml} = 0, \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{40}$$

erfüllt sind.[275]) Sind also alle Kongruenzen eines orthogonalen n-tupels Normalenkongruenzen, so sind alle γ_{lmn} mit drei verschiedenen Zeigern Null und umgekehrt.

Die Kurvenkongruenz $[n]$ ist dann und nur dann *geodätisch*, d. h. sie besteht aus lauter geodätischen Linien der V_n, wenn:

$$\gamma_{nln} = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-1).\text{[276])} \tag{41}$$

---

274) Z. B. ist in einem Punkte der V_n R_{ikik} das *Riemann*sche Krümmungsmaß K_R (Nr. 19) nach der von den Kurven i und k dort gebildeten Flächenrichtung, $R_{ii} = \sum_{k=1}^{n} R_{ikik}$ die mit $n-1$ multiplizierte Richtungsinvariante K_{ds} der Krümmung nach der Richtung der Kurve i, $R = \sum_{i,k=1}^{n} R_{ikik}$ der Krümmungsskalar.

275) Bei einer beliebigen Kongruenz heißt $\gamma_{nlm} - \gamma_{nml}$ die *Anormalität* (anormalità).

276) *G. Ricci*[262]), Lincei Mem. Rom; für $n = 2$ auch Superficie I, Kap. IV; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Palermo Rend. 45 (1921), § 2, 1. Sätze über geodätische Normalenkongruenzen bei *J. A. Schouten*, Verh. Ak. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), p. 62 f.; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Palermo Rend. 45 (1921), § 2, 2. Ebenda §§ 6, 7 Sätze über *konform-geodätische* Kongruenzen, d. h. solche Kongruenzen, die durch Multiplikation des quadrierten Bogenelementes mit einem Skalar in geodätische Kongruenzen überführbar sind. Weitere *Arbeiten geometrischen Charakters über konform-geodätische Kurven* (vgl. [225]) *und Kongruenzen: E. Kasner*, Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 401; 8 (1907), p. 135; 10 (1909), p. 201; The Princeton Colloquium 1913; *K. Ogura*, Tôhoku Math. J. 7 (1915), p. 124; 8 (1915), p. 187; 9 (1916), p. 134; *J. Lipka*, Trans. Amer. Math. Soc. 13 (1912), p. 77; Proc. Nat. Ac. sc. 3 (1916), p. 78; Bull. Amer. Math. Soc. (2) 26 (1920), p. 71; Proc. Amer. Ac. Boston 55 (1920), p. 285 [die beiden letzten Arbeiten auch Publ. Massach. Inst. Technol. Ser. 2 (1920/1)]; Proc. Nat. Ac. sc. 6

Ist die Kongruenz $[n]$ keine geodätische, so heißt der Vektor von den kontravarianten bzw. orthogonalen Koordinaten:

$$\vartheta_n^\mu = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^\mu \gamma_{nln}, \quad \vartheta_{n|l} = \gamma_{nln}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

der *Krümmungsvektor* dieser Kongruenz im betrachteten Punkte P (vgl. Nr. 18 (10)). Er hat die Richtung der Hauptnormalen der Kurve n in P; seine Länge:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{a_{\mu\nu} \vartheta^\mu \vartheta^\nu} = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \gamma_{nln}^2} \tag{43}$$

ist die *erste Krümmung* dieser Kurve in P (Nr. 18 (11)).[277])

Wenn die n paarweise orthogonalen Kongruenzen $[1], [2], \ldots, [n]$ den Relationen:

$$\gamma_{nlm} + \gamma_{nml} = 0, \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n-1;\ l \neq m) \tag{44}$$

genügen, so bilden die Kongruenzen $[1], [2], \ldots, [n-1]$ in bezug auf die Kongruenz $[n]$ ein *kanonisches Orthogonalsystem*.[278]) Man kann zu jeder Kongruenz $[n]$ auf eine oder mehrere Arten $n-1$ andere Kongruenzen bestimmen, die in bezug auf sie ein kanonisches Orthogonalsystem bilden. Ist $[n]$ eine Normalenkongruenz, so ist jedes γ_{nlm} $(l \neq m)$ Null. Die Kongruenzen $[1], [2], \ldots, [n-1]$, die mit $[n]$ ein kanonisches Orthogonalsystem bilden, bestehen dann aus den Krümmungslinien der ∞^1 zur Kongruenz $[n]$ senkrechten V_{n-1} (Nr. 22).

A. dall'Acqua[279]) hat — für $n = 3$ — die *Ricci*schen Untersuchungen dadurch vervollständigt, daß er zugleich mit einer vorgelegten Kongruenz die Gesamtheit aller zu ihr orthogonalen Kurvenkongruenzen oder ihren „orthogonalen Komplex" betrachtet, und auf

(1920), p. 621; Ann. of Math. (2) 23 (1921), p. 101; J. Math. Phys. Massach. Inst. Technol. 1 (1922), p. 21: 2 (1923), p. 31, 74. Vgl. dazu auch die Untersuchungen von *P. Stäckel* über äquivalente dynamische Probleme, J. f. Math. 107 (1891), p. 319 [weitere Literatur bei *P. Appell,* J. f. Math. 110 (1892), p. 37], und über dynamische Probleme, deren Differentialgleichungen eine infinitesimale Transformation gestatten, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 331; ferner *P. Painlevé,* J. de math. (4) 10 (1894), p. 5, Bull. Soc. Math. France 22 (1894), p. 136 sowie *J. E. Wright,* Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 1. — Die von einem Büschel konform-geodätischer Kurven gebildeten V_2 betrachtet *J. Lipka,* Proc. Amer. Ac. Boston 59 (1923), p. 51.

277) Bei *G. Ricci*[262]), Lincei Mem. Rom, p. 298 heißt der Vektor ϑ „curvatura geodetica"; vgl. auch *J. E. Wright,* Invariants, p. 78.

278) *G. Ricci*[262]), Lincei Mem. Rom, p. 301 ff.; für $n = 2$ auch Superficie, Einl. Kap. VI; *G. Ricci* und *T. Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125, Kap. II; *J. E. Wright,* Invariants, p. 73; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 22 (1919), p. 597.

279) *A. dall'Acqua,* Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 1.

beide Gebilde die aus der Theorie der Flächen geläufigen Begriffe überträgt.

Die weiteren Anwendungen der Theorie der orthogonalen Kurvenkongruenzen sind bereits eingangs, insbesondere in den Fußnoten [264]) bis [269]), kurz angedeutet worden.

III. m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten ($1 < m < n$), die in einer n-dimensionalen enthalten sind.

21. Die Grundgleichungen für eine V_m in V_n. Die Grundgleichungen der Theorie der V_m ($1 < m < n$), die in einer V_n beliebigen *Riemann*schen Krümmungsmaßes enthalten sind, wurden zuerst von *R. Lipschitz*[280]), *A. Voss*[281]), *G. Ricci*[282]) und vollständig von *H. Kühne*[283]) aufgestellt.[284]) Neuerdings haben *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]) sowie *H. Weyl*[286]) durchsichtige Herleitungen dieser Grundgleichungen gegeben.

In einer V_n mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und dem quadrierten Bogenelement[287]):

---

280) Siehe namentlich: *R. Lipschitz*, J. f. Math. 71 (1870), p. 274, 288; Auszug: Bull. sc. math. 4 (1874), p. 297.

281) *A. Voss*, Math. Ann. 16 (1880), p. 129.

282) *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (5) 11^{I} (1902), p. 355.

283) *H. Kühne*, Arch. Math. Phys. (3) 4 (1903), p. 300. Für V_m in R_n finden sich *alle* Grundformeln schon bei *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom. (4) 4^{II} (1888), p. 203. Vgl. auch *C. E. Wilder*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 99 und für $m = 2$, $n > 3$ die in [300]) bis [302]) genannten Arbeiten.

284) Vgl. auch für V_{n-1} in V_n: *Bianchi-Lukat*, Kap. 22; für V_{n-1} in R_n: *G. Ricci*, Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 151 ff.; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (2) 3 (1886), p. 277; *E. Cesàro*, Atti Acc. Napoli (2) 6 (1894), 10 p. ($n = 4$); Rend. Acc. Napoli (2) 8 (1894), p. 87; (3) 1 (1895), p. 47; Natürliche Geometrie, p. 280 ff. ($n = 4$), 303 ff. (n beliebig); *E. O. Lovett*, J. de math. (5) 7 (1901), p. 259; *G. O. James*, Amer. J. Math. 25 (1903), p. 249 = Diss. John Hopkins Univ. Baltimore ($n = 4$). — *L. Ingold*, Trans. Amer. Math. Soc. 13 (1912), p. 319 hat die Grundgleichungen für eine V_m im *Funktionenraum* entwickelt.

285) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, a) Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 24 (1921), p. 146; b) Palermo Rend. 46 (1922), p. 165; *D. J. Struik*, Grundzüge III, IV, namentlich: III, 6; IV, 1, 2, 5. Soweit diese Autoren mit Koordinaten arbeiten, ist es charakteristisch für ihre Methode, daß sie keine Parameter in die V_m legen, sondern bloß die Koordinaten x_ν der umgebenden V_n verwenden.

286) *H. Weyl*, Math. Ztschr. 12 (1922), p. 165. Die Ableitung der Grundgleichungen im Texte folgt dieser Arbeit.

287) Im folgenden laufen die großen Zeiger $A, M, N, P, \ldots; L, M, N, R, \ldots$ von 1 bis n, die kleinen Zeiger $\lambda, \mu, \nu, \varrho, \ldots; l, m, n, r, \ldots$ von 1 bis m. Endlich laufen die Zeiger $\alpha, \beta, \ldots; a, b, \ldots$ von $m+1$ bis n. $\begin{Bmatrix} MN \\ A \end{Bmatrix}$ sind die

$$(1) \qquad dS^2 = a_{AM}\, dx^A\, dx^M$$

sei vermöge der Gleichungen:

$$(2) \qquad x_A = x_A(y_1, y_2, \ldots, y_m), \qquad (A = 1, 2, \ldots, n)$$

eine V_m eingebettet. In einem willkürlichen Punkte P dieser V_m spannen dann die Vektoren e_μ mit den Koordinaten:

$$(3) \qquad e^A_\mu = \frac{\partial x_A}{\partial y_\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

innerhalb des n-dimensionalen Vektorraumes von P den m-dimensionalen *Tangentialraum* der V_m auf. Das quadrierte Bogenelement der V_m wird:

$$(4) \qquad ds^2 = b_{\lambda\mu}\, dy^\lambda\, dy^\mu = a_{AM} e^A_\lambda e^M_\mu\, dy^\lambda\, dy^\mu .$$

Um die Metrik der V_n auf die V_m übertragen zu können, muß dem Punkt P der V_m auch noch ein $(n - m)$-dimensionaler *Normalraum* zugeordnet werden. Dieser bestehe aus allen Vektoren, die zum Tangentialraum in P senkrecht sind. Er werde festgelegt durch $n - m$ paarweise senkrechte Einheitsvektoren e_α $(\alpha = m+1, m+2, \ldots, n)$:

$$(5) \qquad a_{AM} e^A_\alpha e^M_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} = 1 \text{ für } \alpha = \beta \\ = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \end{Bmatrix}; \quad a_{AM} e^A_\alpha e^M_\mu = 0 .$$

Jetzt wird die Zerspaltung des Vektorraumes in P in Tangential- und Normalraum auf die Parallelverschiebung (Nr. 18) eines beliebigen Vektors in P nach einem unendlich benachbarten Punkte P' der V_m angewendet:

1. Ein tangentialer Vektor t in P geht durch diese Parallelverschiebung über in einen Vektor $t' + dn$ (t' tangential, dn normal) in P'. Das Gesetz $t \to t'$ gibt den *affinen Zusammenhang* der V_m (Nr. 28), das Gesetz $t \to dn$ die *longitudinale Krümmung* der V_m in P.
2. Ein normaler Vektor n in P geht durch Parallelverschiebung nach P' über in einen Vektor $n' + dt$ (n' normal, dt tangential)

---

*Christoffel*schen Symbole zweiter Art in bezug auf die Grundform (1) der V_n, $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix}$ die entsprechenden in bezug auf die Grundform (4) der V_m. R_{AMNP} bezeichnet die Komponenten des Krümmungstensors (Nr. 19) der V_n im Koordinatensystem der x_A, $r_{\lambda\mu\nu\varrho}$ die des Krümmungstensors der V_m im Koordinatensystem der y_λ. Endlich bedeuten eingeklammerte Zeiger kovariante Differentiation in der V_m, z. B.

$$(\text{a}) \qquad \begin{cases} H_{\alpha|\mu\varrho(\nu)} = \dfrac{\partial H_{\alpha|\mu\varrho}}{\partial y^\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} H_{\alpha|\tau\varrho} - \begin{Bmatrix} \varrho\nu \\ \tau \end{Bmatrix} H_{\alpha|\mu\tau}; \\[2ex] T_{\alpha\beta|\nu(\varrho)} = \dfrac{\partial T_{\alpha\beta|\nu}}{\partial y^\varrho} - \begin{Bmatrix} \nu\varrho \\ \tau \end{Bmatrix} T_{\alpha\beta|\tau}. \end{cases}$$

in P'. Das Gesetz $n \to dt$ gibt *die transversale Krümmung*, das Gesetz $n \to n'$ die *Torsion* der V_m in P.

Die analytische Durchführung dieser Zerlegung gibt die *Grundgleichungen für eine V_m in V_n*:

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\partial e^A_\mu}{\partial y_\nu} + \left\{ {MN \atop A} \right\} e^M_\mu e^N_\nu = \left\{ {\mu\nu \atop \lambda} \right\} e^A_\lambda + H_{\alpha|\mu\nu} e^A_\alpha ,$$

$$\text{(II.)} \qquad \frac{\partial e^A_\beta}{\partial y_\nu} + \left\{ {MN \atop A} \right\} e^M_\beta e^N_\nu = - b^{\lambda\mu} H_{\beta|\mu\nu} e^A_\lambda + T_{\beta\alpha|\nu} e^A_\alpha .$$

Hierin sind $H_{\alpha|\mu\nu}$ die Komponenten der longitudinalen, $-b^{\lambda\mu}H_{\alpha|\mu\nu}$ die der transversalen Krümmung, $T_{\beta\alpha|\nu}$ die der Torsion. Die transversale Krümmung läßt sich also auf die longitudinale zurückführen. Es bestehen die Symmetriebedingungen:

$$\text{(6)} \qquad \text{a)} \quad H_{\alpha|\mu\nu} = H_{\alpha|\nu\mu}; \qquad \text{b)} \quad T_{\alpha\beta|\nu} + T_{\beta\alpha|\nu} = 0,$$

von denen die zweite aussagt, daß die Torsion eine kongruente Abbildung (infinitesimale Drehung) ist.

Die Integrabilitätsbedingungen der Grundgleichungen (I.), (II.) lauten[288]):

$$\text{(III.)} \quad R_{AMNP} e^A_\lambda e^M_\mu e^N_\nu e^P_\varrho = r_{\lambda\mu\nu\varrho} - (H_{\alpha|\lambda\nu} H_{\alpha|\mu\varrho} - H_{\alpha|\lambda\varrho} H_{\alpha|\mu\nu}),$$

$$\text{(IV.)} \quad R_{AMNP} e^A_\alpha e^M_\mu e^N_\nu e^P_\varrho = H_{\alpha|\mu\varrho(\nu)} - H_{\alpha|\mu\nu(\varrho)} + H_{\beta|\mu\varrho} T_{\beta\alpha|\nu} - H_{\beta|\mu\nu} T_{\beta\alpha|\varrho},$$

$$\text{(V.)} \quad R_{AMNP} e^A_\alpha e^M_\beta e^N_\nu e^P_\varrho = T_{\alpha\beta|\nu(\varrho)} - T_{\alpha\beta|\varrho(\nu)} - (T_{\gamma\alpha|\nu} T_{\gamma\beta|\varrho} - T_{\gamma\alpha|\varrho} T_{\gamma\beta|\nu}) - b^{\sigma\tau}(H_{\alpha|\sigma\nu} H_{\beta|\tau\varrho} - H_{\alpha|\sigma\varrho} H_{\beta|\tau\nu}).$$

Geometrisch gelangt man zu den Gleichungen (III.)—(V.) dadurch, daß man einen zur V_m tangentialen, bzw. normalen Vektor um ein Flächenelement der V_m herumführt und seine Änderung dabei in einen tangentialen und normalen Bestandteil zerlegt.

---

288) Die Gleichungen (III) entsprechen der *Gauß*schen Gleichung der Flächentheorie, die Gleichungen (IV) den *Mainardi-Codazzi*schen Gleichungen. Die Gleichungen (V) wurden für V_m in V_n zuerst von *H. Kühne*[283]), für V_m in R_n schon früher von *G. Ricci*[283]) angegeben. — *H. Weyl*[286]) nennt den Tensor rechts in (IV) den *Codazzischen Tensor,* den Tensor, der die ersten vier Summanden rechts in (V) zu Komponenten hat, den *transversalen*, $r_{\lambda\mu\nu\varrho}$ den *longitudinalen Flächenwirbel.* — Ausführliche Literaturnachweise zu den Grundgleichungen (III.)—(V.) bei *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 136, Fußn. — Während die $H_{\alpha|\mu\nu} = H_{\alpha|\nu\mu}$ die Bestimmungszahlen eines Tensors (des „*Krümmungsaffinors*“, s. weiter unten im Text) sind, sind es die $T_{\alpha\beta|\nu}$ nicht.

J. A. Schouten und *D. J. Struik*[289]) denken die V_n von einem Orthogonalsysteme von Kurvenkongruenzen λ_L^M $(L = 1, 2, \ldots, n)$ (Nr. 20) durchzogen, derart, daß die V_m ganz von Kurven der Kongruenzen λ_l^M $(l = 1, 2, \ldots, m)$ gebildet wird. Sie zerlegen dann für eine beliebige Kongruenz in der V_m:

$$(7)\qquad \xi^A = \sum_{l=1}^{m} \xi_l \lambda_l^A, \qquad \Big(\sum_{l=1}^{m} \xi_l^2 = 1\Big)$$

den *absoluten Krümmungsvektor* (d. h. den Krümmungsvektor in der V_n; Nr. 20), dessen orthogonale Koordinaten:

$$(8)\qquad \vartheta_L = \sum_{p=1}^{m} \xi_{L(p)} \xi_p, \qquad (L = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, in eine Komponente:

$$(9)\qquad \vartheta_l = \sum_{p=1}^{m} \xi_{l(p)} \xi_p, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

in der V_m und eine Komponente:

$$(10)\qquad \vartheta_a = \sum_{p=1}^{m} \xi_{a(p)} \xi_p = \sum_{l,p=1}^{m} \xi_l \xi_p \gamma_{lap}, \qquad (a = m+1, m+2, \ldots, n)$$

senkrecht dazu. ϑ_l ist der *relative Krümmungsvektor* der Kongruenz (7), d. h. ihr Krümmungsvektor in der V_m, ϑ_a der *Vektor der erzwungenen Krümmung.*[290]) Der Tensor mit den Koordinaten $\gamma_{lap} = H_{a|lp}$, der mit dem Tensor $-H_{\alpha|\lambda\mu}$ in (I.) korrespondiert, ist der *Krümmungsaffinor* der V_m. Zur Gleichung (III.) gelangen diese Autoren durch Zerlegung der orthogonalen Koordinaten (Nr. 20) des *Riemann-Christoffel*schen Krümmungstensors der V_n nach der V_m und senkrecht dazu.[291])

22. Krümmungseigenschaften einer V_{n-1} in V_n. Die Krümmungstheorie einer V_{n-1} in V_n[292]) ist derjenigen der Flächen im gewöhn-

289) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), a) p. 146 ff.: b) p. 167 ff. Vgl. *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 91; für V_2 in R_n auch *E. A. Wilson* und *C. L. E. Moore*, Proc. Amer. Ak. Boston 52 (1916), p. 319 ff.

290) *G. Ricci*[282]), p. 360 nennt diesen Vektor „curvatura normale relativa a V_n".

291) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), a) p. 150 ff.; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 123.

292) Die *Krümmungstheorie einer V_{n-1} in einer beliebig gekrümmten V_n* zuerst, von mechanischen Analogien ausgehend, bei *R. Lipschitz*, J. f. Math. 71 (1870), p. 274, 288; Math. Ann. 6 (1873), p. 416; J. f. Math. 81 (1876), p. 230, 295; rein geometrisch bei *A. Voss*[281]). Einzelheiten bei *E. Padova*, Lincei Rend. Rom (4) 4^{II} (1888), p. 369, 454, insb. p. 371 ($n = 3$). Vgl. auch *Bianchi-Lukat*, Kap. 22 (n beliebig); *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 81 ff., 140 f. (n beliebig). — *Für eine umgebende S_n* siehe noch: *W. Killing*, Raumformen II, § 11; *L. Berzolari*, Lincei Rend. Rom (5) 6^{II} (1897), p. 283; *E. Cesàro*, Lincei Rend. Rom (5) 13^{I} 1904), p. 658; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 125 f.; *für eine umgebende R_n* siehe [297]).

lichen dreidimensionalen Raum [III D 1. 2, V. (*H. v. Mangoldt*); III D 3, I. (*R. v. Lilienthal*)] vollkommen analog.

Bei einer V_{n-1} in V_n ist in jedem Punkte nur ein Normalenvektor $e_\alpha = e_n$ vorhanden, so daß die Torsion (Nr. 21) Null ist, die Gleichungen (V.) ganz fortfallen und $H_{\alpha|\lambda\mu} = H_{n|\lambda\mu} = h_{\lambda\mu}$ die Koordinaten eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe in der V_{n-1} werden. Dieser heißt der *zweite Fundamentaltensor*, $h_{\lambda\mu} dy^\lambda dy^\mu$ die *zweite Fundamentalform* der V_{n-1}. An sie schließt sich die Krümmungstheorie der V_{n-1} in V_n an.

In jedem Punkte der P der V_{n-1} gibt die Gleichung:

$$h_{\lambda\mu} dy^\lambda dy^\mu = 0 \tag{11}$$

den zugehörigen quadratischen $(n-2)$-dimensionalen Kegel der *Asymptotenrichtungen* (*erster Ordnung*) in der V_{n-1}. Zwei in bezug auf ihn konjugierte Richtungen der V_{n-1} durch P heißen *konjugierte Richtungen*, seine Hauptachsenrichtungen innerhalb der V_{n-1} die *Hauptkrümmungsrichtungen* der V_{n-1} in P. Die Kurven auf der V_{n-1}, deren Tangentenrichtung in jedem Punkte eine Asymptotenrichtung erster Ordnung (bzw. Hauptkrümmungsrichtung) der V_{n-1} ist, heißen die *Asymptotenlinien* oder *Haupttangentenkurven erster Ordnung* (bzw. *Krümmungslinien*)[293]) der V_{n-1}. Die Asymptotenlinien erster Ordnung einer V_{n-1} sind dadurch gekennzeichnet, daß ihr oskulierender zweidimensionaler Vektorraum in jedem Punkte dem entsprechenden Tangentialraum der V_{n-1} angehört oder unbestimmt ist (vgl. Nr. 23).

Die *Hauptkrümmungsrichtungen* der V_{n-1} sind durch die Gleichungen

$$(b_{\mu\nu} - R_p h_{\mu\nu}) dy^\mu = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{12}$$

gegeben, in denen für R_p die bei definiter Form (1) stets reellen Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{b} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} - Rh_{11} & \ldots & b_{1,n-1} - Rh_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} - Rh_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n-1} - Rh_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \equiv 1 - D_1 R + D_2 R^2 - \cdots + (-1)^{n-1} D_{n-1} R^{n-1} = 0 \tag{13}$$

($b = \det. b_{\lambda\mu}$) zu nehmen sind.[294]) Diese Wurzeln sind die $n-1$ *Hauptkrümmungsradien*, ihre reziproken Werte die *Hauptkrümmungen* der V_{n-1} im Punkte P. Die Anzahl der nicht verschwindenden Haupt-

293) *L. Kronecker*[297]), p. 692 (V_{n-1} in R_n); *A. Voß*[281]), p. 150 (V_{n-1} in V_n).

294) Wegen der besonderen Fälle, die eintreten, wenn die Matrix $\|h_{\lambda\mu}\|$ einen Rang $< n-1$ hat, oder wenn die Wurzeln R_p von (13) zum Teil oder alle einander gleich sind, vgl. etwa *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 32 ff., 84 ff.

krümmungen ist gleich dem Rang der quadratischen Matrix $\|h_{\mu\nu}\|$. Die D_k rechts in (13) sind die Summen der Produkte der Hauptkrümmungen zu je k. Insbesondere heißt $\frac{1}{n-1}\cdot D_1$ *der Skalar der mittleren Krümmung*[295]), $\frac{1}{(n-1)(n-2)}\cdot D_2$ die *relative Krümmung*[296]) der V_{n-1} in bezug auf die V_n im Punkte P.

Die D_p hängen im allgemeinen wegen (III.) auch von der Metrik der umgebenden V_n ab. Im speziellen Falle einer V_{n-1} *in* R_n[297]) sind sie, mit Ausnahme von D_1, nur von den Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$ der ersten Fundamentalform (4) der V_{n-1} und ihren ersten zwei Ableitungen nach den y_ϱ abhängig, also absolute Differentialinvarianten der V_{n-1}, und zwar die D_{2k} rationale, die D_{2k+1} irrationale. Insbesondere ist D_2 die einzige Differentialinvariante, die höchstens zweite Ableitungen der $b_{\lambda\mu}$ und diese nur linear enthält. $\frac{2}{(n-1)(n-2)}D_2$ ist die Ortsinvariante K der Krümmung der V_{n-1} (Nr. 19). Die Invariante D_{n-1} ist bei einer V_{n-1} in R_n das *Kroneckersche Krümmungsmaß*[298]) der V_{n-1}, d. i. das reziproke Produkt ihrer $n-1$ Hauptkrümmungsradien in der R_n. (Vgl. auch [319]).)

23. Krümmungseigenschaften einer V_m $(1 < m < n-1)$ in V_n. Die Krümmungstheorie der V_m $(2 \leqq m < n-1)$ in V_n ist erst von

---

295) $D^A = -\frac{1}{n-1}D_1 e_n^A$ sind die Koordinaten des *Vektors der mittleren Krümmung* der V_{n-1} (Nr. 23).

296) *G. Ricci*[282]), p. 361.

297) Zur *Krümmungstheorie der* V_{n-1} *in* R_n $(n > 3)$, vgl.: *L. Kronecker,* Berl. Monatsb. 1869, p. 688 = Werke I, p. 215; *F. Souvorof,* Bull. sc. math. 4 (1873), p. 180 $(n=4)$; *C. Jordan,* Paris C. R. 79 (1874), p. 909; *R. Beez,* Math. Ann. 7 (1874), p. 387; Ztschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 423; 21 (1876), p. 373; *R. Lipschitz,* Paris C. R. 82 (1876), p. 160, 218; auch J. f. Math. 81 (1876), p. 295; *M. Allé,* Wien. Ber. 74 (1876), p. 9; *T. Craig,* Amer. J. Math. 4 (1881), p. 297; *R. Lipschitz,* Berl. Ber. 1882, p. 1077; *G. Ricci,* Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 135; *A. Brill,* Math. Ann. 26 (1886), p. 300 $(n=4)$; *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. (2) 3 (1886), p. 277; *E. Padova,* Lincei Mem. Rom (4) 4 (1887), p. 4; *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (4) 5I (1889), p. 643 $(n=4)$; *A. Puchta,* Mitt. Deutsche Math. Ges. Prag 1892, p. 43; *P. Saurel,* Ann. of math. (2) 5 (1904), p. 188; *L. Neymeyer,* Diss. Freiburg i. Br. 1922 (autogr.). — Vgl. auch die Behandlung bei *Bianchi-Lukat,* 1. Aufl., Kap. XXII, und *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, Kap. 17, bes. § 247. — Vom Standpunkte der Kugelgeometrie: *S. Lie,* Gött. Nachr. 1871, p. 191, 535; Math. Ann. 5 (1872), p. 145, bes. p. 195 f. (z. T. $n=3$); *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 270 f. = Math. Abh. I, p. 119 ff. (Übertragung auf die Liniengeometrie).

298) *L. Kronecker*[297]).

J. A. Schouten und *D. J. Struik*[299]) systematisch behandelt worden. Für die Flächen $(m = 2)$ im R_4 hat schon *K. Kommerell*[300]), für die Flächen im R_n *E. E. Levi*[301]), *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*[301]) sowie *F. Kämmerer*[301]) die entsprechenden Entwicklungen gegeben. Sonst liegen nur Untersuchungen über einzelne Punkte vor.[302])

Zunächst sollen hier die Krümmungseigenschaften einer V_m in V_n besprochen werden, die nur vom Tensor $H^{AMN} = H_{\alpha|\mu\nu} e_\alpha^A e_\mu^M e_\nu^N$ [dem „Krümmungsaffinor" (Nr. 21)] abhängen.

Als *Verallgemeinerung der zweiten Fundamentalform* (11) für die V_m in V_n $(m < n-1)$ erhält man die Vektorform:

$$(14) \qquad H_{\alpha|\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \cdot e_\alpha^A = H_{\mu\nu}^A dy^\mu dy^\nu .^{303)}$$

Das Quadrat der Länge des durch sie gegebenen Vektors ist eine

299) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Palermo Rend. 46 (1922), p. 165; Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 24 (1921), p. 146; vgl. auch *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 91 ff., 123 ff. Die Autoren wenden ihre allgemeinen Ergebnisse auch auf V_2 und V_3 in V_n an. Vgl. ferner *C. E. Wilder,* Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 99 (V_m in R_n). — Über V_2 *in* R_n *und* V_n $(n > 3)$ siehe die folgenden Fußnoten; über V_3 *in* R_n vgl. noch *C. H. Sisam,* Amer. J. Math. 33 (1911), p. 97; *E. Cartan,* Paris C. R. 167 (1918), p. 357, 426, 482, 550; Bull. Soc. math. France 47 (1918), p. 125; 48 (1919), p. 132.

300) *K. Kommerell,* Diss. Tübingen 1897; vgl. auch *V. Hlavatý,* Publ. fac. sc. Univ. Masaryk, Brünn 1923, Nr. 25; Rozpravy Ak. Prag 32 (1923), Nr. 14 (tschech.).

301) *E. E. Levi,* Diss. Pisa 1905 = Ann. di Pisa 10 (1908), 99 p.; *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 267; Auszug: Proc. Nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 273; *F. Kämmerer,* Mitt. Math. Sem. Univ. Gießen 1 (1922), 9. Heft, 24 p.

302) Vgl. außer den zu Beginn von Nr. 21 genannten Abhandlungen noch *H. Hovestadt,* Progr. Realg. Münster i. W. 1880 (V_2 in R_n); *W. Killing,* Raumformen II, § 13 (V_m in S_n); *P. del Pezzo,* Rend. Acc. Napoli 25 (1886), p. 176 (V_m in R_n); *L. Berzolari,* Atti Acc. Torino 33 (1898), p. 692, 759 (V_m in S_n); *M. Servant,* Bull. Soc. Math. France 30 (1902), p. 92 (V_2 in R_4); *H. Kühne,* Math. Ann. 56 (1902), p. 257; Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904), p. 251 (V_m in R_n); *C. Segre,* Atti Acc. Torino 42 (1907), p. 559 (V_2 in R_n); *E. Artom,* Periodico di Mat. (3) 10 (1912), p. 59 (V_2 in R_n); *C. L. E. Moore,* Bull. Amer. Math. Soc. 18 (1912), p. 284; Ann. of Math. (2) 16 (1915), p. 89 (V_2 in R_n); *E. Bompiani,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1113 (V_m in V_n); *R. Lagrange,* Paris C. R. 174 (1922), p. 521, 658; 176 (1923), p. 562, 1121; Thèse, Paris 1923 = Ann. de Toulouse 1923. — Über die in algebraischer Richtung anschließenden Arbeiten siehe III C 7, Nr. 29, 37 (*C. Segre*).

303) Diese Vektorform anscheinend zuerst bei *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 267, bes. p. 310; Proc. Nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 274.

skalare Differentialform vierten Grades, die sich zuerst bei *A. Voß*[281]) findet:

$$(15)\quad a_{AA'}e^A_\alpha e^{A'}_{\alpha'} H_{\alpha\,|\,\mu\nu} H_{\alpha'\,|\,\mu'\nu'} dy^\mu dy^\nu dy^{\mu'} dy^{\nu'} = a_{AA'} H^A_{\mu\nu} H^{A'}_{\mu'\nu'} dy^\mu dy^\nu dy^{\mu'} dy^{\nu'}.$$

Ihre geometrische Bedeutung, sowie die der zugehörigen doppelt-quadratischen Form:

$$(16)\qquad a_{AA'} H^A_{\mu\nu} H^{A'}_{\mu'\nu'} dy^\mu dy^\nu \delta y^{\mu'} \delta y^{\nu'}$$

hat *E. Bompiani*[304]) angegeben.

Außer diesen Formen spielt bei den V_m in V_n noch der *Vektor der mittleren Krümmung*[305]):

$$(17)\qquad D^A = \frac{1}{m} H^A_{\lambda\mu} b^{\lambda\mu} = \frac{1}{m} H_{\alpha\,|\,\lambda\mu} b^{\lambda\mu} e^A_\alpha$$

eine große Rolle. Ist er von Null verschieden, so gibt seine Richtung eine ausgezeichnete Normale der V_m, die *Normale der mittleren Krümmung* und das Quadrat seiner Länge einen Skalar, den *Skalar der mittleren Krümmung der* V_m.

In sehr verschiedener Weise ist der Begriff der *Asymptotenlinien* oder *Haupttangentenkurven* einer V_{n-1} in V_n auf die V_m in V_n übertragen worden. Am nächsten liegt es, als *Asymptotenlinien* p^{ter} *Ordnung* ($p = 1, 2, \ldots$) die Kurven der V_m zu bezeichnen, deren oskulierender $(p+1)$-dimensionaler Vektorraum in jedem Punkte dem zugehörigen m-dimensionalen Tangentialraum der V_m angehört oder unbestimmt ist.[306]) Dann hat aber eine V_m im allgemeinen keine Asymptotenlinien. Man kann auch jene Kurven der V_m Asymptotenlinien nennen, deren Richtung bei einer Parallelverschiebung (Nr. **18**) längs ihrer selbst nach einem Nachbarpunkte in dieselbe Richtung übergeht, gleichviel ob man sich die Parallelverschiebung in der V_m oder in der umgebenden V_n ausgeführt denkt. Dann erhält man nach

---

304) *E. Bompiani,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1113. — *Bompiani* bestimmt auch (ebenda p. 1124 ff.) alle V_2 in V_n, für welche die Differentialform (15) das Quadrat einer quadratischen ist.

305) *R. Lipschitz,* J. f. Math. 78 (1874), p. 1 (vgl. Berl. Monatsb. 1872, p. 361); 81 (1876), p. 230 (V_m in V_n); *W. Killing,* Raumformen, p. 245 (V_m in S_n); *E. E. Levi,* Ann. di Pisa 10 (1908), p. 69 (V_2 in R_n); *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 322; Proc. Nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 273 (V_2 in R_n); *E. Bompiani,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1131 ff. (V_m in V_n); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), b) p. 170; *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 97 (V_m in V_n). — Vgl. auch Fußnote[376]).

306) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[299]), p. 168; *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 79 f., 93, 110 (V_m in V_n). Für V_{n-1} in R_n vgl. *C. L. E. Moore,* Ann. of Math. (2) 13 (1912), p. 89.

E. Bompiani[307]) die Kurven, für welche die biquadratische Form (15) verschwindet. Endlich nennen *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*[308]) die Kurven einer V_2 Asymptotenlinien, deren oskulierender zweidimensionaler Vektorraum zum Vektor der mittleren Krümmung (17) senkrecht ist. Die Differentialgleichung dieser Kurven ist:

$$a_{AA'} D^A H^{A'}_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = 0 . \tag{18}$$ [309])

Die eigentlichen *Krümmungsverhältnisse der V_m in V_n* lassen sich nach *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[299]) folgendermaßen auseinandersetzen:

Der Vektor der erzwungenen Krümmung (10) einer Kongruenz (7) in der V_m gehört in jedem Punkt P der V_m dem zur V_m senkrechten Vektorraum $R_{m'}$ $\left(m' \leqq \frac{m(m+1)}{2};\ m' < n - m\right)$ an, der in P durch die $\frac{m(m+1)}{2}$ Vektoren mit den orthogonalen Koordinaten (Nr. 20) $\gamma_{lap} = H_{a|lp}$ $(l, p = 1, 2, \ldots, m)$ aufgespannt wird. Dieser Vektorraum bestimmt zusammen mit dem Tangentialraum der V_m in P einen Vektorraum $R_{m+m'}$[310]), das *Krümmungsgebiet* der V_m in P. Im Krümmungsgebiet spielt sich alles ab, was auf die erste Krümmung (Nr. 18, 20) der Kurven der V_m in P bezug hat.

Ist $m' = \frac{m(m+1)}{2}$, so beschreibt der Vektor der erzwungenen Krüm-

307) *E. Bompiani*, Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1116 ff. (V_m in V_n).

308) *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*, Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 354 ff.; Proc. Nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 277 (V_2 in R_n). Vgl. auch *C. E. Wilder*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 108 (V_m in R_n).

309) Hier seien auch die *Quasiasymptotenlinien* (quasiasintotiche) erwähnt. *E. Bompiani* nennt Quasiasymptotenlinie $\gamma_{k,h}$ einer V_m in V_n jede Kurve der V_m, deren oskulierender h^{ter} Vektorraum in jedem Punkte mit dem oskulierenden k-Raum der V_m (d. h. dem Vektorraum kleinster Dimensionenzahl, der die Umgebung k^{ter} Ordnung des Punktes der V_m enthält), besondere Inzidenzeigenschaften hat. *E. Bompiani*, Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 393, Nr. 6, 7; Palermo Rend. 37 (1914), p. 305; Paris C. R. 168 (1919), p. 755; bes. für $m = 2$, $h = n-1$, $k = 1$: Rend. Ist. Lomb. (2) 47 (1914), p. 177; Lincei Rend. Rom (5) 25I (1916), p. 493, 576, wo Sätze von *Beltrami* und *Enneper* über die Asymptotenlinien der V_2 in R_3 verallgemeinert werden. — Verschiedene Verallgemeinerungen des Begriffes der *konjugierten Richtungen und konjugierten Systeme* für V_2 in R_n bei *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*, Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 356; *E. Bompiani*, Palermo Rend. 46 (1922), p. 91; für V_m in V_n: *E. Bompiani*, Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1120; für V_m in R_n: *C. E. Wilder*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 110. — Verallgemeinerungen des Begriffes Striktionslinie auf V_m in V_n bei *H. Kühne*, Math. Ann. 54 (1901), p. 545. Vgl. auch *A. Myller*[236]).

310) *P. del Pezzo*[302]), (V_m in R_n); *E. E. Levi*[301]), p. 60 (V_2 in R_n); *E. Artom*[302]), (V_2 in R_n); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[299]), p. 171 f.; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 103 ff., 125 ff.

mung (10) im Krümmungsgebiet $R_{m+\frac{m(m+1)}{2}}$ einen m-dimensionalen Kegelmantel, und sein Endpunkt eine V_{m-1} vom Grade 2^{m-1}, die in einer $R_{\frac{m(m+1)}{2}-1}$ im Krümmungsgebiet liegt, und deren Schwerpunkt den Vektor der mittleren Krümmung (17) zum Radiusvektor hat: das *Krümmungsgebilde.*[311]) Zwischen den ∞^{m-1} Richtungen in der V_{m-1} in P und den ∞^{m-1} Punkten des Krümmungsgebildes besteht eine eineindeutige Zuordnung.

Die Richtungen der V_m, die den extremen Längen des Vektors der erzwungenen Krümmung entsprechen, sind die *Hauptkrümmungsrichtungen* der V_m.[312]) Im allgemeinen geht die $R_{\frac{m(m+1)}{2}-1}$, die das Krümmungsgebilde enthält, nicht durch P, und es gibt daher keine Asymptotenlinien erster Ordnung. Der Vektor U_a, der sich von P bis zu der $R_{\frac{m(m+1)}{2}-1}$ erstreckt und senkrecht zu ihr ist, heißt der *Umbilikalvektor* der V_m in P.

J. A. Schouten und *D. J. Struik* besprechen auch die speziellen Fälle, die für $m' < \frac{m(m+1)}{2}$ eintreten.[313]) Ist insbesondere $m' = 1$ (2, 3), d. h. hat das Krümmungsgebiet $m+1$ $(m+2,\ m+3)$ Dimensionen, so heißt der Punkt P ein *axialer* (*planarer, spatialer*) Punkt der V_m.[314]) Ein axialer Punkt, in dem sich das Krümmungsgebilde

311) Wegen anderer Gebilde zur Kennzeichnung der Krümmung vgl. für V_2 in R_4: *K. Kommerell*[300]), p. 22; Math. Ann. 60 (1905), p. 554 = Progr. Karls-gymn. Heilbronn 1905; für V_2 in R_n: *E. E. Levi*[301]), p. 68, Fußn.; *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*, Proc. Amer. Ac. Bost. 52 (1916), p. 329; Proc. Nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 275; für V_m in R_n: *H. Kühne*, Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904), p. 251; *C. E. Wilder*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 108, 118. — Über das Verhalten des Krümmungsgebildes einer V_m in V_n bei konformer Transformation der V_n siehe *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Paris C. R. 176 (1923), p. 1597 oder *J. A. Schouten*, Riccikalkül, p. 202.

312) *K. Kommerell*[300]), p. 18 ff. (V_2 in R_4); *E. E. Levi*[301]), p. 67 (V_2 in R_n); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[299]), p. 172 (V_m in V_n). — Andere Richtungen sind die zuerst von *C. Jordan*, Paris C. R. 79 (1874), p. 909 betrachteten *Hauptrichtungen* der V_m; vgl. auch *Lipschitz*, J. f. Math. 81 (1876), p. 295 = Paris C. R. 82 (1876), p. 160, 218; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 95 f. (m beliebig); *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*, Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 352; Proc. Nat. Ac. sc. 2 (1916), p. 277 ($m = 2$). — Für $m = n - 1$ fallen Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptrichtungen zusammen.

313) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[299]), p. 172 ff.

314) Die Namen *axial* und *planar* rühren, für V_2 in R_n, von *E. E. Levi*[301]), p. 61 her, der Name *spatial* von *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Christiaan Huygens 2 (1923), p. 167.

auf einen Punkt reduziert, ist ein *Nabelpunkt* der V_m.[315]) In einem axialen Punkt der V_m gilt eine ganz analoge Krümmungstheorie wie für eine V_{n-1} in V_n; der Einheitsvektor der zur V_m senkrechten Richtung im Krümmungsgebiet tritt dabei an Stelle des Normaleneinheitsvektors der V_{n-1} in V_n.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Sätze von *Euler* und *Meusnier* in verschiedener Weise auf V_{n-1} und V_m in V_n verallgemeinert worden sind.[316])

Die Krümmungseigenschaften einer V_m in V_n, bei denen auch die *Riemann-Christoffel*schen Tensoren beider Mannigfaltigkeiten eine Rolle spielen, leitet man am einfachsten nach *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[317]) aus der orthogonalen Form (Nr. 20) der Gleichungen (III):

$$\text{(III}'.) \qquad R_{lqpr} = r_{lqpr} - \sum_{a=m+1}^{n} (H_{a|lp} H_{a|qr} - H_{a|lr} H_{a|qp})$$

ab. Man erhält nach zweimaliger Verjüngung:

$$(19) \qquad \frac{1}{m(m-1)} \sum_{l,p}^{l \neq p} R_{lplp} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{l,p}^{l \neq p} r_{lplp}$$
$$- \frac{1}{m(m-1)} \sum_{a} \sum_{l,p}^{l \neq p} (H_{a|ll} H_{a|pp} - H^2_{a|pl}).$$

Hierin steht links die Krümmung der V_m^*, die aus allen von P ausgehenden und die V_m in P berührenden geodätischen Linien der V_n besteht, oder die *erzwungene Krümmung* der V_m.[318]) Der Minuend rechts, die halbe Ortsinvariante der Krümmung der V_m (Nr. 19) heißt nach *G. Ricci*[282]) auch die *absolute Krümmung* der V_m, der Subtrahend ihre *relative Krümmung* in bezug auf die V_n. Die relative Krümmung der V_m in V_n ist die Summe der algebraischen Mittelwerte aller Produkte ungleichnamiger Hauptkrümmungsradien zu je zweien in be-

---

315) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[299]), p. 173, 178. — Für V_{n-1} in V_n ist jeder Punkt *axial*. Über V_m mit lauter axialen (planaren, Nabel-) Punkten vgl. Nr. 27.

316) Außer einigen der Arbeiten [297]), [302]) vgl. etwa noch: *W. Killing*, Raumformen II, § 11; *L. Berzolari*, Lincei Rend. Rom (5) 6^{II} (1897), p. 283; (5) 7^{I} (1898), p. 4; *E. Bompiani*, Atti Acc. Torino 48 (1913), p. 393; *T. Boggio*, Lincei Rend. Rom. (5) 28^{I} (1919), p. 59; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Palermo Rend. 46 (1922), p. 168, 177; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 78, 85f., 88, 93, 115f.

317) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), a) p. 150ff.; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 123ff.

318) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), a) p. 153; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 126.

zug auf $n-m$ gegenseitig senkrechte Normalenrichtungen der V_m.[319]) Legt man durch die V_m in willkürlicher Weise $n-m$ zueinander paarweise senkrechte V_{m+1}, so ist die relative Krümmung der V_m in bezug auf die V_n die Summe der relativen Krümmungen in bezug auf diese V_{m+1}.[320])

24. Klasse einer V_m. In diesem Abschnitt handelt es sich um die Frage nach dem R_n kleinster Dimensionenzahl, in den eine gegebene V_m eingebettet werden kann. Nach *L. Schläfli*[321]) läßt sich jede V_m in einen R_{m+p} einbetten, wobei $0 \leqq p \leqq \frac{m(m-1)}{2}$ ist. Die kleinste Zahl p, die dabei eintreten kann, heißt nach *G. Ricci*[322]) die *Klasse* der V_m. Durch den Parallelismus in der V_m (Nr. 18) ist nach *J. A. Schouten*[323]) eine obere Schranke $N\left(\leqq \frac{m(m-1)}{2}\right)$ für die Klasse der V_m gegeben: verschiebt man ein m-Bein von einem beliebigen Punkte P der V_m in ihr längs einer geschlossenen Kurve parallel zu sich selbst, bis es wieder nach P zurückkehrt, und sind bei allen möglichen Wahlen der Wegkurve dabei gerade ∞^N Endlagen des m-Beines möglich, so ist die Klasse der $V_m \leqq N$.

Die Mannigfaltigkeiten nullter Klasse sind mit den R_m identisch. Die einzigen reellen S_m erster Klasse sind für $m \geqq 3$ die sphärischen

---

319) Ein allgemeiner Satz über die Summe der Mittelwerte aller Produkte ungleichnamiger Hauptkrümmungsradien zu je p in bezug auf alle möglichen Normalenrichtungen bei *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), a) p. 159; über allgemeinere Krümmungsinvarianten vgl. *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 128 ff. Dort auch Literaturangaben. S. auch [388]).

320) *H. Hovestadt,* Progr. Realgymn. Münster i. W. 1880 (V_2 in R_n); *W. Killing,* Raumformen, p. 245 (V_m in S_n); *L. Berzolari,* Atti Acc. Torino 33 (1898), p. 692, 759 (V_m in S_n); *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (5) 11^I (1902), p. 361 (V_m in V_n); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[285]), a) p. 153 f. (V_m in V_n). Vgl. *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 127.

321) *L. Schläfli,* Ann. di mat. (2) 5 (1871), p. 190. — Eine exakte Formulierung der Voraussetzungen, unter denen die Behauptung von *Schläfli* richtig ist, steht bisher aus. — Bemerkungen zur Abzählung von *Schläfli* bei *P. Stäckel,* J. f. Math. 113 (1894), p. 102; vgl. auch *B. K. Mlodzieiowski,* Mosk. Nachr. Phys. Math. B 8 (1889), p. 1 (russ.).

322) *G. Ricci,* Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 135. *Ricci* spricht eigentlich von der *Klasse der Fundamentalform* der V_m. Dieser Begriff beruht also auf der Transformation der Fundamentalform der V_m in eine Summe von Quadraten der Differentiale. Eine andere Normalform der Fundamentalform einer V_m bei *J. Lense,* Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 92.

323) *J. A. Schouten,* Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 21 (1918), p. 607; *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 99 f. Für V_3 in R_4 vgl. auch *G. Rimini,* Ann. sc. norm. Pisa 9 (1904), p. 40.

Mannigfaltigkeiten, wie zuerst *R. Beez*[324]) gezeigt hat. Die konform-euklidischen Mannigfaltigkeiten (Nr. 26) haben für $m > 3$ stets die Klasse zwei (*H. W. Brinkmann*).[324a])

25. n-fache Orthogonalsysteme in einer V_n. Die n-fachen Orthogonalsysteme von V_{n-1} in einer V_n $(n > 3)$[325]) sind von *G. Ricci*[326]), sowie *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[327]) behandelt worden. Eine Behandlung für V_{n-1} in R_n rührt von *G. Darboux*[331]) her. *G. Darboux* hat für R_n, *G. Ricci*[326]) für V_n als erster die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß eine Schar von ∞^1 V_{n-1} $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ konst. in einer V_n einem n-fachen Orthogonalsystem angehört. Sie bestehen aus einem System von $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ und einem System von $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung von f nach den x_ν. *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[327]) haben diese Bedingungen auf eine andere Gestalt gebracht und geometrisch gedeutet. Für $n = 3$ entsteht eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, die im R_3 identisch ist mit der Gleichung III D 9, Nr. 8 (*E. Salkowski*).

Die V_{n-1} eines n-fachen Orthogonalsystemes in einer V_n schneiden sich in den Krümmungslinien (Nr. 22). Diese Verallgemeinerung des Satzes von *Dupin* gestattet auch eine Umkehrung[327]), die sich für dreifache Orthogonalsysteme im R_3 auf den Satz von *G. Darboux*[328]) reduziert.

Während eine V_n für $n = 3$ stets durch jeden Punkt n-fache Orthogonalsysteme in jeder Lage enthält, wie *E. Cotton*[325]) gezeigt hat, ist das für $n > 3$ nach *J. A. Schouten*[329]) dann und nur dann der Fall, wenn die V_n konform-euklidisch ist (Nr. 26).

---

324) *R. Beez*, Ztschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 373. Vgl. auch *C. J. Monro*, Proc. Math. Soc. London 9 (1878), p. 171; *A. Brill*, Math. Ann. 26 (1886), p. 300; *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p. 163; *E. Cesàro*, Atti Acc. Napoli (2) 6 (1894), 10 p.; *Bianchi-Lukat*, 1. Aufl., p. 615; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 142.

324a) *H. W. Brinkmann*, Proc. Nat. Ac. sc. 9 (1923), p. 172.

325) Für V_2 in V_3 siehe *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (4) 5^I (1889), p. 643; (5) 3^II (1894), p. 93; *E. Cotton*, Ann. de Toulouse (2) 1 (1899), p. 410.

326) *G. Ricci*, Lincei Mem. Rom (5) 2 (1895), p. 276.

327) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 22 (1919) p. 596, 684; Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 28 (1919), p. 201, 425 (holl.); vgl. auch *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 83 ff.; *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 145 f.; *L. P. Eisenhart*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 259.

328) *G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. 3 (1866), p. 110.

329) *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 83 ff.

Auf die Arbeiten über *n-fache Orthogonalsysteme im* R_n $(n > 3)$ [*J. Drach*[330]), *G. Darboux*[331]), *A. Pellet*[332]), *E. Rath*[333]), *L. Bianchi*[334])] *und* S_n [*L. Bianchi*[334])] können wir hier nicht näher eingehen, ebenso auch nicht auf die Untersuchungen von *C. Guichard* über *Netze und Kongruenzen im* R_n. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf III D 9, Nr. 29 ff. (*E. Salkowski*).

IV. Besondere Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

26. Mannigfaltigkeiten mit besonderen inneren Eigenschaften ohne Rücksicht auf eine umgebende Mannigfaltigkeit. Die ersten besonderen V_n, die untersucht worden sind, waren die V_n *konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes* K_R. Es wurde bereits bemerkt (Nr. 19), daß sie für $K_R = 0$ mit den euklidischen, sonst mit den nichteuklidischen Räumen identisch sind. Über ihre Kennzeichnung durch die in ihnen enthaltenen geodätischen V_2 und V_{n-1} sowie über die V_m konstanten Krümmungsmaßes in R_n und S_n wird in Nr. 27 berichtet.[335])

Als nächste Verallgemeinerung der S_n können für $n \geqq 3$[336]) die V_n angesehen werden, die sich konform auf einen R_n abbilden lassen („*konform-euklidische* V_n"). Zu ihnen gehören die R_n und S_n. Für $n = 3$ sind die konform-euklidischen V_n von *E. Cotton*, *A. Finzi* und *G. Ricci* behandelt worden[337]), für $n > 3$ von *H. Weyl*, sowie nament-

330) *J. Drach*, Paris C. R. 125 (1897), p. 598 (vgl. *G. Ricci*, ebenda p. 810); Bull. soc. math. France 36 (1908), p. 85.

331) *G. Darboux*, Systèmes orthogonaux, p. 120; Acta math. 26 (1902), p. 227, ferner die in III D 9, Fußn. [181]) genannten Arbeiten von *G. Darboux* und *S. Lie*.

332) *A. Pellet*, Paris C. R. 128 (1899), p. 233, 284; Ann. de Toulouse (2) 2 (1900), p. 137; Nouv. Ann. (4) 16 (1916), p. 37.

333) *E. Rath*, Arch. Math. Phys. 9 (1905), p. 196.

334) *L. Bianchi*, Lincei Rend. Rom (5) 24^II (1915), p. 261; 25^I (1916), p. 237, 381, 435; 26^II (1917), p. 137; Ann. di mat. (3) 27 (1918), p. 183; 28 (1919), p. 187. — *Bianchi* gibt vor allem die Theorie der *Ribaucour*schen Transformationen der n-fachen Orthogonalsysteme im R_n und S_n.

335) Die V_3 *konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes* sind auch dadurch gekennzeichnet, daß ihre Entfernungskugeln [Fußn. [254])] geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung $\frac{1}{2} D_1$ (Nr. 22) sind. *B. Baule*, Math. Ann. 83 (1921), p. 286 — Gewisse Abbildungen zweier V_n und insbesondere zweier S_n aufeinander betrachtet *L. Bianchi*, Lincei Rend. Rom (5) 25^I (1916), p. 127; 26^I (1917), p. 447.

336) Für $n = 2$ ist *jede Riemann*sche Mannigfaltigkeit konform-euklidisch.

337) *E. Cotton*, a) Paris C. R. 125 (1896), p. 225; 127 (1898), p. 349; b) Ann. de Toulouse (2) 1 (1899), p. 385; *A. Finzi*, Atti Ist Veneto 62 (1903), p. 1049; *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (5) 19^I (1910), p. 181.

lich von *J. A. Schouten* und *A. Finzi.*[338]) Eine V_n $(n > 3)$ ist dann und nur dann konform-euklidisch, wenn der Krümmungstensor (Nr. **19**) die Gestalt:

$$(1) \qquad R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{n-2}(a_{\varkappa\mu}l_{\lambda\nu} - a_{\varkappa\nu}l_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}l_{\varkappa\nu} + a_{\lambda\nu}l_{\varkappa\mu})$$

hat.[339]) Für eine V_3 ist $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ stets von der Form (1). Eine V_3 ist dann und nur dann konform-euklidisch, wenn

$$(2) \qquad l_{\lambda\mu(\nu)} - l_{\lambda\nu(\mu)} = 0$$

ist. (2) ist für $n > 3$ eine bloße Folge von (1). (Vgl. Nr. **30.**)

Die Beziehungen der konform-euklidischen V_n zu den n-fachen Orthogonalsystemen von V_{n-1} wurden in Nr. 25 besprochen; ihre Beziehungen zu den V_n mit lauter Nabelpunkten werden in Nr. 27, die konforme Abbildbarkeit zweier beliebigen V_n in Nr. **30** behandelt.[340])

Eine andere Verallgemeinerung der R_n und S_n bilden die V_n *mit einer kontinuierlichen Gruppe von starren Bewegungen.* An die Arbeiten über diese V_n haben sich naturgemäß auch solche über V_n *mit anderen kontinuierlichen Transformationsgruppen bestimmter Art* angeschlossen.[341])

Als *infinitesimale Bewegung* einer V_n bezeichnet man jede infini-

---

338) *H. Weyl,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 404 (vgl. auch Gött. Nachr. 1921, p. 104); *J. A. Schouten,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 58; *A. Finzi,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 111; Lincei Rend. Rom (5) 31^{I} (1922), p. 8. Vgl. auch: *A. Buchholz,* Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ..., Bonn 1899, 214 p.; *A. Palatini,* Atti Ist. Veneto 79 (1920), p. 321; *H. W. Brinkmann,* Proc. Nat. Ac. sc. 9 (1923), p. 1; *A. Finzi,* Lincei Rend. Rom (5) 32^{I} (1923), p. 215; sowie *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 138, 150.

339) Daß diese Bedingung notwendig ist, hat zuerst *H. Weyl*[338]), p. 404 bemerkt. *J. A. Schouten*[338]), p. 79 ff. hat gezeigt, daß sie auch hinreicht.

340) Die Formeln für die Änderung der fundamentalen Größen einer V_n bei konformer Abbildung geben: *A. Finzi*[337]); *T. Levi-Civita,* Lincei Rend. Rom (5) 27^{II} (1918), p. 184; *J. A. Schouten,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 78.

341) Zum folgenden vergleiche man auch den Bericht von *U. Amaldi,* Ann. di mat. (3) 15 (1908), p. 293, bes. p. 308 ff.; ferner *L. Bianchi,* Gruppi continui, p. 489 ff.; *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 155 ff. — Mit der Theorie der Bewegungsgruppen einer V_n hängt auch die Frage der Reduzierbarkeit ihres ds^2 auf die „statische" Form (Nr. 17) zusammen. Vgl. *J. Radon,* Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 268. — Bogenelemente der allgemeinen Form

$$ds = dx^1 \cdot \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dx^2}{dx^1}, \ldots, \frac{dx^n}{dx^1}\right),$$

die eine Bewegungsgruppe zulassen, bestimmt für $n = 2$ *A. Maccone,* Lincei Rend. Rom (5) 32^{I} (1923), p. 327. Dort auch die entsprechende Verallgemeinerung der Gl. (4). — Über die Beziehungen der *Bewegungsgruppe einer* V_n zu den *volumtreuen Gruppen einer* R_n vgl. *L. Bianchi,* Atti Acc. Torino 38 (1903), p. 376.

tesimale Transformation

$$X(f) = \xi^\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x^\varrho}, \tag{3}$$

die das quadrierte Bogenelement der V_n ungeändert läßt. Hat der Vektor ξ^ϱ konstante Länge, so spricht man von einer *Translation* (scorrimento).[342]) Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Transformation (3) eine infinitesimale Bewegung ist, lauten

$$\xi_{\varrho(\sigma)} + \xi_{\sigma(\varrho)} = 0\,^{343)}, \qquad (\xi_\varrho = a_{\varkappa\varrho}\xi^\varkappa). \tag{4}$$

Bekanntlich läßt jede R_n und S_n eine $\frac{n(n+1)}{2}$-gliedrige kontinuierliche Gruppe von Bewegungen zu.[344]) Das Problem, alle überhaupt möglichen kontinuierlichen Bewegungsgruppen einer V_n anzugeben und die entsprechenden V_n (d. h. die entsprechenden ds^2) zu bestimmen, wurde für $n = 3$ von *L. Bianchi*[345]), für $n = 4$ von *G. Fubini*[346])

342) *L. Bianchi,* Gruppi continui, p. 499. — *O. Onicescu,* Lincei Rend. Rom (5) 29^{I} (1920), p. 351; 29^{II} (1920), p. 294 nennt *infinitesimale Translation* (traslazione) eine infinitesimale Bewegung einer V_n, welche die Richtungen längs einer Kongruenz (Nr. 20) von Bahnkurven parallel im Sinne von *Levi-Civita* (Nr. 18) verschiebt. Er betrachtet V_n, die eine solche infinitesimale Translation zulassen.

343) Sie finden sich als Bedingungen für die Unveränderlichkeit einer Figur in der V_n schon bei *M. Lévy,* Paris C. R. 86 (1878), p. 875, im Sinne der Fragestellung des Textes zuerst bei *W. Killing,* J. f. Math. 109 (1892), p. 167, nach dem sie auch die „Gleichungen von *Killing*" heißen. Die invariante Form des Textes rührt von *G. Ricci,* Mem. soc. It. delle sc. (3) 12 (1899), p. 78 her. — Allgemeiner findet man für die Variation von $ds^2 = a_{\varrho\sigma}dx^\varrho dx^\sigma$ bei (3):

$$X(ds^2) = \left(\xi_{\varrho(\sigma)} + \xi_{\sigma(\varrho)}\right) dx^\varrho\, dx^\sigma.$$

Vgl. *M. Lévy,* Paris C. R. 86 (1878), p. 463, 812, 875 (V_n); *E. Cesàro,* Lincei Rend. Rom (4) 4^{II} (1888), p. 376 (S_3); *E. Padova,* Studi editi della Università di Padova ... III (1888), 30 p.; Lincei Rend. Rom (4) 5^{I} (1889), p. 174 (V_3); *G. Ricci,* Studi editi della Università di Padova ... III (1888), 23 p. (V_n); *E. Cesàro,* Rend. Acc. Napoli (2) 8 (1894), p. 149; (3) 1 (1895), p. 47; *K. Żorawski,* Bull. Ac. Sc. Krakau 1911, p. 3, 175; 1912, p. 269, 436, 721; 1914, p. 107, 220; 1915, p. 122, 188, wo die Deformation der V_n bzw. die Bewegung kontinuierlicher Medien in R_n und V_n betrachtet wird.

344) Die R_n und S_n sind die einzigen V_n von dieser Eigenschaft. *W. Killing*[343]), p. 171 f.; *O. Tedone,* Rend. Ist. Lomb. (2) 32 (1899), p. 592.

345) *L. Bianchi,* Mem. soc. It. delle sc. (3) 11 (1897), p. 267; Gruppi continui, p. 489 ff. *E. Cotton,* Paris C. R. 128 (1899), p. 495; [337]) b), Kap. V hat angegeben, welche dreidimensionale Mannigfaltigkeiten zu den Typen von *Bianchi* hinzukommen, wenn ds^2 nicht positiv-definit ist.

346) *G. Fubini,* a) Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 39; b) Ann. di mat. (3) 9 (1903), p. 33; Auszug: Lincei Rend. Rom (5) 11^{II} (1902), p. 53. — *Fubini* gibt auch eine Reihe von allgemeinen Sätzen über die kontinuierlichen Bewegungs-

gelöst. Die drei Typen von V_3 mit viergliedriger Bewegungsgruppe hat dann *C. Rimini*[347]) eingehend betrachtet. *G. Ricci*[348]) hat mit den Methoden seines absoluten Differentialkalküls die Frage beantwortet, wie man bei gegebenem quadrierten Bogenelement einer V_3 erkennt, ob diese V_3 Bewegungen zuläßt, und wie man, wenn das der Fall ist, die zugehörige Bewegungsgruppe bestimmt. Später dehnte er einige Ergebnisse dieser Untersuchung auf die V_n aus.[349])

Als infinitesimale *konforme Transformation* einer V_n bezeichnet man jede Transformation (3), welche die Eigenschaft

$$(5) \qquad X(ds^2) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot ds^2$$

besitzt.[350]) Auch hier erhebt sich die Frage, welche Gruppen überhaupt als konforme Gruppen einer V_n aufgefaßt werden können, und, wenn eine solche Gruppe gefunden ist, die Aufgabe, die zugehörige V_n durch Angabe ihres ds^2 zu bestimmen. Mit beiden Problemen hat sich wieder *G. Fubini* beschäftigt und dabei den engen Zusammenhang hervorgehoben, in dem die konformen Gruppen der V_n einerseits mit den Bewegungsgruppen stehen[351]), andererseits mit den Gruppen von Punkt- und Berührungstransformationen, welche die Entfernungskugeln einer V_n fest lassen.[352])[352a])

Schließlich hat sich *G. Fubini* auch mit der Bestimmung der V_n befaßt, *die eine kontinuierliche Gruppe zulassen, welche die geodätischen*

---

gruppen der V_n, sowie eine Methode zur Aufsuchung ihrer endlichen diskontinuierlichen Untergruppen, die er auf zwei der *Bianchi*schen Typen von Bewegungsgruppen einer V_3 anwendet.

347) *C. Rimini*, Ann. sc. norm. Pisa 9 (1904), 57 p. Vgl. auch *S. C. Davisson*, Diss. Tübingen 1900.

348) *G. Ricci*, Mem. soc. It. delle sc. (3) 12 (1899), p. 69. Auszüge: Paris C. R. 127 (1898), p. 344, 360; Math. Ann. 54 (1901), p. 173 ff.

349) *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (5) 14^{II} (1905), p. 487. — Gewisse V_4 mit einer zweigliedrigen Bewegungsgruppe treten auch bei *L. P. Eisenhart*, Proc. Nat. Ac. sc. 6 (1920), p. 328 auf.

350) Bei konstantem λ spricht man von einer infinitesimalen Ähnlichkeit. Vgl. z. B. *G. Fubini*[346]), a) p. 56.

351) *G. Fubini*, Atti Acc. Torino 38 (1903), p. 404.

352) *G. Fubini*, Rend. Ist. Lomb. (2) 38 (1905), p. 178. *G. Fubini*, Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 141 hat auch untersucht, wann sich zwischen zwei V_n eine derartige Berührungstransformation aufstellen läßt, daß sich die Entfernungskugeln [Fuß. [254])] der beiden V_n entsprechen.

352a) Hier seien noch erwähnt die auf R_n bezüglichen, z. T. aber auch für V_n gültigen Untersuchungen von *L. Bianchi*, Atti Acc. Torino 30 (1908), p. 376, 479 über *Gruppen, die ein n-dimensionales Volumen invariant lassen*, bzw. *mit einer Konstanten multiplizieren.*

Linien der V_n untereinander vertauscht.[353]) Er hat alle V_2 und V_3 bestimmt, die eine solche Gruppe gestatten, und darauf hingewiesen, daß seine Methode, abgesehen von gewissen Ausnahmefällen, auch für einen beliebigen Wert von n zur Lösung der Aufgabe hinreicht.

Eine andere Frage, die sich auf die geodätischen Linien bezieht, ist die nach den V_n, *welche eigentliche geodätische Transformationen zulassen.* Gesucht werden dabei die V_n, die sich auf eine andere V_n punktweise so abbilden lassen, daß die geodätischen Linien beider Mannigfaltigkeiten einander entsprechen, wobei der triviale Fall gleicher oder ähnlicher Linienelemente ($ds^* = a \cdot ds$; $a =$ Konst.) auszuschließen ist. Für $n > 2$[354]) hat zuerst *T. Levi-Civita*[355]) die Frage vollständig beantwortet. *G. Fubini*[356]) bestimmt *alle* V_n, die auf eine der von *T. Levi-Civita* gefundenen geodätisch abbildbar sind. *E. Bompiani*[357]) bestimmt die V_n, die sich auf eine andere V_n eineindeutig punktweise so abbilden lassen, daß dabei parallelen Richtungen (Nr. 18) immer ebensolche entsprechen. Ferner untersucht er[358]), welche V_3,

353) *G. Fubini*, Mem. Acc. Torino (2) 53 (1903), p. 261. Vgl. auch Lincei Rend. Rom (5) 14^{I} (1905), p. 678 und *A. Boulanger*, Paris C. R. 136 (1903), p. 661 ($n = 3$). — Für $n = 2$ ist diese Aufgabe schon von *S. Lie*, Math. Ann. 20 (1882), p. 357 in Angriff genommen und von *G. Koenigs*, Ann. de Toulouse 6 (1892), p. 1; Mém. sav. étr. Paris 31 (1894), Nr. 6 sowie *L. Raffy*, Bull. soc. math. France 22 (1894), p. 63, 85; J. de math. (4) 10 (1894), p. 331 im wesentlichen erledigt worden. Vgl. III D 6 a, Nr. 9 (*A. Voss*).

354) Für $n = 2$ erhält man (bei Beschränkung auf das Reelle) die *Liouville*schen Flächen [*U. Dini*, Ann. di mat. (2) 8 (1869), p. 269]. Vgl. III D 3, Nr. 18 (*R. v. Lilienthal*); III D 6 a, Nr. 9 (*A. Voss*).

355) *T. Levi-Civita*, Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 255. — Vgl. auch *J. E. Wright*, Ann. di mat. (3) 16 (1909), p. 1 sowie Invariants, letzter Abschnitt. — Über geodätische Abbildung zweier V_n aufeinander vgl. noch *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Christiaan Huygens 2 (1923), p. 299; *J. A. Schouten*, Riccikalkül V, § 19 ff.

356) *G. Fubini*, Lincei Rend. Rom (5) 14^{I} (1905), p. 678 ($n = 3$); (5) 14^{II} (1905), p. 315 ($n > 3$; hier wird nur der allgemeine Fall erledigt). Die entsprechende Frage für $n = 2$ hat schon *G. Koenigs*, Note II in *G. Darboux*, Surfaces IV behandelt.

357) *E. Bompiani*, Lincei Rend. Rom (5) 29^{I} (1920), p. 347.

358) *E. Bompiani*, Ann. di mat. (3) 31 (1922), p. 51. *Bompiani*, Lincei Rend. Rom (5) 27^{I} (1918), p. 278 zeigt auch, daß eine punktweise Abbildung zweier V_n, welche die V_2 vom *Gauß*schen Krümmungsmaß Null einander entsprechen läßt, für $n > 3$ stets, für $n = 3$ im allgemeinen das Produkt einer Isometrie und einer Ähnlichkeit ist. Eine verwandte Kennzeichnung der isometrischen Abbildungen zweier V_n bei *E. Bompiani*, Lincei Rend. Rom (5) 27^{I} (1918), p. 230. — *A. Finzi*, Atti Ist. Veneto 81 (1922), p. 333 gibt eine Eigenschaft der infinitesimalen Deformationen einer V_3, welche die geodätischen Linien erhalten.

die eigentliche geodätische Transformationen zulassen, in einer R_4 oder S_4 existieren.

Eine Reihe von Arbeiten behandelt die V_n *mit besonderen Eigenschaften der Hauptkongruenzen* (Nr. 19). Die V_n mit unbestimmten Hauptkongruenzen sind von *R. Serini*, *E. Kasner*, *D. J. Struik*, *J. A. Schouten* und *D. J. Struik* sowie *L. P. Eisenhart* behandelt worden.[359]) Die V_3 mit geodätischen Hauptkongruenzen hat *G. Ricci*[360]) untersucht, besondere V_3 mit V_2-normalen Hauptkongruenzen („*Normalräume*") *L. Bianchi* und *A. Palatini*.[361])

B. Baule[362]) bestimmt alle V_3, in denen sämtliche Kurven mit konstanter von Null verschiedener erster und verschwindender zweiter Krümmung (Nr. 18) geschlossen sind.

Endlich hat auch noch *A. Buchholz*[363]) gewisse Mannigfaltigkeiten studiert, namentlich in bezug auf ihre geodätischen Linien.

27. Mannigfaltigkeiten besonderen Verhaltens gegen eine umgebende Mannigfaltigkeit. Zu den Mannigfaltigkeiten, die durch be-

---

359) *R. Serini*, Lincei Rend. Rom (5) 27^{I} (1918), p. 235 (V_3 im R_4); *E. Kasner*, Amer. J. Math. 43 (1921), p. 20, 126 (V_4), p. 130 (V_4 in R_6), p. 217 (V_4); Math. Ann. 85 (1922), p. 227 (V_4); *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 166f.; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Amer. J. Math. 43 (1921), p. 213 [vgl. auch *A. Finzi*, Lincei Rend. Rom (5) 32^{I} (1923), p. 217]; *L. P. Eisenhart*, Proc. Nat. Ac. sc. 7 (1921), p. 328; 8 (1922), p. 24; *J. L. Synge*, ebenda, p. 204. Siehe auch *R. Weitzenböck*, Ber. Wien 130 (1921), p. 44. — Eine V_n mit unbestimmten Hauptrichtungen (Nr. 19) heißt wohl auch eine *Einstein-Mannigfaltigkeit* (vgl. *A. Einstein*, Berl. Sitzgsb. 1919, p. 349). *H. W. Brinkmann*, Proc. Nat. Ac. sc. 9 (1923), p. 172 betrachtet die V_n, die konform auf V_n mit unbestimmten Hauptrichtungen abgebildet werden können.

360) *G. Ricci*, Lincei Rend. Rom (5) 27^{I} (1918), p. 21, 75.

361) *L. Bianchi*, Lincei Rend. Rom (5) 25^{I} (1916), p. 59; *A. Palatini*, Lincei Rend. Rom (5) 28^{II} (1919), p. 334; Ann. di mat. (3) 29 (1921), p. 191. Ferner: *A. Finzi*, Rend. Acc. Napoli (3) 29 (1923), p. 36. Vgl. auch: *T. Levi-Civita* Lincei Rend. Rom (5) 26^{I} (1917), p. 522; 27^{I} (1918), p. 10; 27^{II} (1918), p. 220, 240, 283, 343; 28^{I} (1919), p. 3, 101.

362) *B. Baule*, Math. Ann. 84 (1921), p. 202.

363) *A. Buchholz*, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre . . ., Bonn 1899, 264 p. — Weitere in diesen Abschnitt gehörige Untersuchungen: *A. dall'Acqua*, Lincei Rend. Rom (5) 17^{II} (1908), p. 269 (V_3, für welche die Gleichung $\Delta_2\varphi = 0$ ein Integral der Form $F(x_1, x_2)\cdot f(x_3)$ hat); *L. Bianchi*, Lincei Rend. Rom (5) 25^{II} (1916), p. 177 und *F. Cecioni*, Ann. di mat. (3) 30 (1921), p. 278 (ds^2 in n Variabeln vom *Riemann*schen Krümmungsmaß Null mit konstanten $\left\{\begin{matrix} i\,k \\ s \end{matrix}\right\}$ und ihre Beziehung zu den kommutativen Zahlensystemen mit n Einheiten); *L. P. Eisenhart*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 297 (V_n mit einem Tensor $\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$ $(\neq a_{\mu\nu})$, dessen kovariante Ableitungen Null sind).

sonderes Verhalten gegen eine umgebende Mannigfaltigkeit bemerkenswert sind, gehören vor allem *die in einer* V_n *geodätischen* V_m $(m < n)$, die für $m = n - 1$ zuerst von *A. Voss*[364]) untersucht worden sind. Eine V_m heißt *geodätisch* in einer V_n, wenn jede in der V_m geodätische Linie auch in der V_n geodätisch ist.[365]) *J. Hadamard*[364]) hat die V_3 mit ∞^1 und ∞^2 geodätischen V_2 bestimmt, *G. Ricci*[364]) die V_3 mit ∞^2 geodätischen V_2 geometrisch gekennzeichnet.[366]) Eine V_m ist dann und nur dann in einer V_n geodätisch, wenn alle $H_{\alpha\,|\,\lambda\mu}$ (Nr. 21) in jedem Punkte der V_m Null sind (*G. Ricci*).[364]) Der *Riemann*sche Krümmungstensor (Nr. 19) einer in einer V_n geodätischen V_m ist in jedem Punkte die V_m-komponente des *Riemann*schen Krümmungstensors der V_n; die erzwungene Krümmung (Nr. 21) jeder Kurve der V_m ist Null (*J. A. Schouten* und *D. J. Struik*).[364]) Die Asymptotenlinien und Krümmungslinien einer in einer V_n geodätischen V_{n-1} sind unbestimmt, ihre Hauptkrümmungen Null.

In einer V_n konstanten *Riemann*schen Krümmungsmaßes, also in einer S_n oder R_n (Nr. 19), existieren durch jeden Punkt in jeder Richtung geodätische V_2 (V_{n-1}). Jede dieser Eigenschaften ist kennzeichnend.[366a]) Eine V_n ist sogar schon eine S_n oder R_n, wenn auch nur zwei verschiedene Punkte in ihr existieren, durch die es in jeder Richtung geodätische V_2 (V_{n-1}) gibt (*F. Schur, G. Herglotz, J. Blumen-*

364) *A. Voss,* Math. Ann. 16 (1880), p. 129. Vgl. außerdem namentlich: *J. Hadamard*, Bull. sc. math. (2) 25 (1901), p. 37; *G. Ricci,* Lincei Rend. Rom (5) 12^I (1903), p. 409; *C. Rimini,* Ann. sc. norm. Pisa 9 (1904), p. 29 ff.; *J. A. Schouten,* Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 21 (1918), p. 607; Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 27 (1918), p. 16 (holl.); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 24 (1921), p. 146; *D. J. Struik,* Grundzüge, namentlich p. 96 f., 101 ff., 125 ff., 142 ff.; *G. Vitali,* Lincei Rend. Rom (5) 31^II (1922), p. 86; *E. Bompiani,* ebenda 32^II (1923), p. 14.

365) Diese Erklärung nach *J. Hadamard*[364]). *C. Rimini*[364]) u a. bezeichnen solche V_m als *total-geodätisch,* während sie [nach *F. Schur,* Math. Ann. 27 (1886), p. 546] geodätische Flächen in V_n die von einem Büschel geodätischer Linien (Nr. 18) gebildeten V_2 nennen und die Bezeichnung geodätische V_m in V_n in analoger Bedeutung gebrauchen.

366) *T. Levi-Civita,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 193 zeigt, daß die V_n, die eine Kongruenz von Kurven mit vollständigem (d. h. vom Wege unabhängigen) Parallelismus enthalten, ∞^1 geodätische V_{n-1} besitzen. Vgl. auch *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom (5) 30^II (1921), p. 168. — *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom (5) 30^II (1921), p 395 untersucht die V_3, die zwei Scharen von je ∞^1 geodätischen V_2 enthalten, deren Schnittkongruenz eine Normalenkongruenz ist, sowie [Lincei Rend. Rom (5) 32^II (1923), p. 14] die V_n, die als Ort von geodätischen V_m betrachtet werden können.

366a) Diese Eigenschaft ist nur eine neue Formulierung einer in Nr. 18 (vgl. Fußn. [226]) angeführten.

feld und *W. Mayer*).[367]) Dafür, daß es durch einen einzigen Punkt P einer V_n in jeder Richtung geodätische V_2 gibt, ist es nach *G. Herglotz*[367]) notwendig und hinreichend, daß die Grundform $a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ der V_n eine $\frac{n(n-1)}{2}$-gliedrige kontinuierliche Gruppe von Transformationen der V_n gestattet, die den Punkt P festlassen.[368]) Entsprechend haben *J. Blumenfeld* und *W. Mayer*[367]) gezeigt, daß aus der Tatsache der Kongruenz um einen Punkt P der V_n die der Existenz geodätischer V_{n-1} durch diesen Punkt in jeder Richtung folgt.

Die in einer V_n geodätischen V_m gehören zu den V_m *mit lauter Nabelpunkten* (Nr. 23) *in einer* V_n, die für $m = n - 1$ ebenfalls zuerst von *A. Voss*[364]) betrachtet worden sind.

Damit eine V_n $(n > 3)$ durch jeden Punkt senkrecht zu jeder Richtung eine V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten enthält, ist es notwendig und hinreichend, daß sie konform-euklidisch (Nr. 26) ist. Eine V_3 enthält stets durch jeden Punkt senkrecht zu jeder Richtung eine V_2 mit lauter Nabelpunkten (*J. A. Schouten*).[369])

Die Krümmungslinien einer V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten in einer V_n sind unbestimmt, die Hauptkrümmungen alle gleich. Das *Riemann*sche Krümmungsmaß der V_{n-1} ist um das Quadrat h^2 dieses gemeinsamen Wertes größer als das der V_n in demselben Punkte nach der gleichen Flächenrichtung.[370]) Eine V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten in einer konform-euklidischen V_n (S_n) ist eine V_{n-1} derselben Art.[371]) Sätze über die Beziehung der V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten zu den Hauptkongruenzen der umgebenden V_n (Nr. 19) haben *C. Rimini*[372]), *J. A. Schouten*[369]), *D. J. Struik*[369]) gegeben, Sätze über solche V_m $(m < n)$ in V_n *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*.[373])

Die V_m $(m < n - 1)$ *mit lauter axialen Punkten* (Nr. 23) sind

---

367) *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p. 537; *G. Herglotz*, Leipz. Ber. 73 (1921), p. 215; *J. Blumenfeld* und *W. Mayer*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 219.

368) Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung hat schon *F. Schur*[367]) gegeben.

369) *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 11 (1921), p. 85; *D. J. Struik*, Handelingen 18. Nederl. Nat.- en Geneesk. Congr. Utrecht 1921, p. 88 (holl.). Vgl. auch Grundzüge, p. 142 f.

370) Für $h =$ konst. schon bei *A. Voss*[364]), p. 158.

371) *D. J. Struik*[369]). Vgl. auch [318]).

372) *C. Rimini*[364]), p. 46.

373) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*, Palermo Rend. 46 (1922), p. 173 ff. — Bei *D. J. Struik*, Grundzüge, p. 109 treten auch „*infrageodätische* V_m p^{ter} *Ordnung in* V_n" auf.

von *C. Segre*[374]) sowie von *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[374]) betrachtet worden, die V_2 *mit lauter planaren Punkten im* R_n $(n > 4)$ von *C. Segre*[375]) und *E. E. Levi.*[375]) Die V_3 *mit spatialen Punkten* in V_n sind untersucht worden von *J. A. Schouten* und *D. J. Struik*[375a]), die V_3 *in* R_n von *C. H. Sisam* und *E. Cartan.*[299])[386])

Eine wichtige Klasse von V_m sind *die Minimal-*V_m *in* V_n, d. h. die V_m, für welche die erste Variation des Inhaltes jedes durch eine geschlossene V_{m-1} begrenzten Teiles bei festgehaltener Begrenzung verschwindet. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß der Vektor der mittleren Krümmung (Nr. 23) in jedem Punkte verschwindet (*R. Lipschitz*).[376]) Die Minimal-V_2 in V_n als Translations-V_2 haben *E. Bompiani* und *C. L. E. Moore* behandelt.[377])

Mit V_{n-1} *konstanter mittlerer Krümmung* (Nr. 22) in V_n hat sich *B. Baule*[378]) beschäftigt und gezeigt, daß es nur in V_n konstanter Ortsinvariante der Krümmung (Nr. 19) solche V_{n-1} geben kann, die sich bei Wahrung ihrer Eigenschaft auf jeden Punkt der V_n zusammenziehen lassen.

Die V_2 *in* R_4, *die durch die Gleichungen* $u + iv = f(x + iy)$

---

374) a. a. O.[373]), p. 175. Vgl *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 114, sowie, für V_2 in R_n: *C. Segre,* Atti Acc. Torino 42 (1907), p. 571; für V_2 in R_4: *E. E. Levi,* Ann. sc. norm. Pisa 10 (1908), p. 77.

375) *C. Segre*[374]), p. 569 ff. („superficie Φ"); *E. E. Levi*[374]); p. 81 ff. — Für eine V_2 in V_3 ist *jeder* Punkt *axial,* für eine V_2 in V_4 *jeder* Punkt *planar* oder *axial.*

375a) *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* a. a. O.[373]), vgl. *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 119; *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Christiaan Huygens 2 (1923), p. 167.

376) *R. Lipschitz,* Berl. Monatsb. 1872, p. 361; J. f. Math. 78 (1874), p. 1 (V_m in V_n). *Weitere Literatur über Minimal-*V_m *in* V_n: *W. Killing,* Raumformen, p. 246 (V_m in S_n); *E. Padova,* Lincei Rend. Rom (4) 4^{II} (1888), p. 369, 454 (V_2 in V_3); *L. Bianchi,* Lezioni, 2. Aufl. II, p. 577 (V_2 in V_3); *H. Kühne,* Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904), p. 260 (V_m in R_n); *K. Kommerell,* Math. Ann. 60 (1905), p. 586 (V_2 in R_4); *E. E. Levi,* Ann. sc. Norm. Pisa 10 (1908), p. 91 (V_2 in R_n); *J. Eiesland,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 17 (1910), p. 75 (V_2 in R_4); *L. P. Eisenhart,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 18 (1910), p. 60; Amer. J. Math. 34 (1912), p. 215 (V_2 in R_4); *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 325 (V_2 in R_n); *C. L. E. Moore,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 25 (1919), p. 75 (V_2 in R_n); (2) 27 (1921), p. 211 (V_m in R_n); *E. Bompiani,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1113, 1138 (V_m in V_n); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Palermo Rend. 46 (1922), p. 170; *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 97 ff., 119. Vgl. auch [60]).

377) *E. Bompiani,* Paris C. R. 169 (1919), p. 840 (V_2 in V_n); *C. L. E. Moore,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 25 (1919), p. 75 (V_2 in R_n).

378) *B. Baule,* Math. Ann. 83 (1921), p. 286. Vgl. auch [61]).

dargestellt werden können, haben *St. Kwietniewski, K. Kommerell* und *L. P. Eisenhart* betrachtet.[379])

Vielfach untersucht worden sind auch *die in einer* R_{n+1} *oder* S_{n+1} ($n > 2$) *verbiegbaren* V_n. Nachdem *R. Beez*[380]) bemerkt hatte, daß eine V_n im R_{n+1} ($n > 2$) im allgemeinen unverbiegbar ist („Satz von *Beez*"), fand *W. Killing*[381]) als notwendige Bedingung für die im R_{n+1} bzw. S_{n+1} deformierbaren V_n das Verschwinden aller dreireihigen aus den $h_{\lambda\mu}$ (Nr. 22) gebildeten Determinanten. Besondere im R_4 verbiegbare V_3 sind dann von *F. Schur* und *R. Banal* studiert worden.[382]) *L. Bianchi*[383]) hat später *alle* solchen V_3 bestimmt. Für beliebiges n (> 2) haben *U. Sbrana, E. Bompiani, E. Beggi, E. Cartan* die im R_{n+1} (S_{n+1}) verbiegbaren V_n untersucht.[384]) Diese haben wenigstens $n - 2$ verschwindende Hauptkrümmungen. Ihre Asymptotenrichtungen (Nr. 22) bilden ∞^2 R_{n-2} (S_{n-2}). Ihre berührende geodätische R_n (S_n) ist für alle Punkte einer geodätischen R_{n-2} (S_{n-2}) dieselbe.[385]) Zu ihnen gehören insbesondere die *abwickelbaren* V_n.[386]) Diese, sowie

379) *St. Kwietniewski,* Diss. Zürich 1902; Wiad. mat. 10 (1906), p. 129 (poln.); *K. Kommerell,* Math. Ann. 60 (1905), p. 586 (= Progr. Karlsgymn. Heilbronn 1905); *L. P. Eisenhart,* Amer. J. Math. 34 (1912), p. 224. Vgl. auch *J. S. Taylor,* C. R. Congr. Straßburg 1920, p. 388; J. Math. Phys. Massach. Inst. of Technol. 2 (1922), p. 1, sowie *E. E. Levi*[376]), p. 91 (Fußn.).

380) *R. Beez,* Ztschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 373. Vgl. auch *G. Ricci,* Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 135; Bull. sc. math. (2) 16 (1892), p. 187 (Fußn.); *E. Cesàro,* Rend. Acc. Napoli (3) 1 (1895), p. 47; Natürliche Geometrie, Kap. 17, bes. § 257; *J. E. Campbell,* Proc. London Math. Soc. 29 (1898), p. 249; *H. Kühne,* Math. Ann. 56 (1902), p. 263; *G. B. James,* Amer. J. Math. 25 (1903), p. 249. — Der Satz gilt auch in einer S_{n+1}.

381) *W. Killing,* Raumformen, p. 236 f. Vgl. auch *F. Schur,* Math. Ann. 27 (1886), p. 163; 28 (1887), p. 344 ff.; *H. Kühne*[380]).

382) *F. Schur,* Math. Ann. 28 (1887), p. 343; *R. Banal,* Atti Ist. Veneto 54 (1895), p. 998; Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 213; Lincei Rend. Rom (5) 6^{II} (1897), p. 356; (5) 7^{I} (1898), p. 7; (5) 8^{II} (1899), p. 13.

383) *L. Bianchi,* Mem. Soc. It. delle sc. (3) 13 (1905), p. 261.

384) *U. Sbrana,* Palermo Rend. 27 (1909), p. 1; Ann. di mat. (3) 15 (1908), p. 329; *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom (5) 23^{I} (1914), p. 126; Paris C. R. 164 (1917), p. 508; *E. Beggi,* Periodico di mat. (3) 11 (1914), p. 211; *E. Cartan,* Bull. soc. math. France 44 (1916), p. 65.

385) *F. Schur,* Math. Ann. 27 (1886), p. 537 (V_3 in R_4); *U. Sbrana*[384]) *E. Bompiani*[384]) (V_{n-1} in R_n).

386) Über diese V_n und allgemeiner über die von $\infty^p R_m$ erzeugten V_n in R_{n+1} vgl. namentlich einen Teil der in [117]) genannten projektiv-differentialgeometrischen Untersuchungen; ferner *E. Cartan,* Paris C. R. 167 (1918), p. 426 (Abwickelbare V_3 in R_n); Bull. soc. math. France 47 (1919), p. 125; 48 (1920), p. 132, insb. Kap. 5 (Abwickelbare V_m in R_n; S_m in S_n vom gleichen Krümmungsmaß).

allgemeiner die V_m *konstanter Krümmung in* R_n *und* S_n, hat *E. Cartan*[387]) eingehend untersucht.[388]) Derselbe Autor studiert auch gewisse V_4 des R_5, die sich auf eine andere, nicht konform-äquivalente konform abbilden lassen.[388a])

Zum Schluß zählen wir noch einige *weitere Untersuchungen* über besondere V_m in V_n auf. *E. Bompiani* bestimmt die V_{n-1} des R_n, deren quadriertes Bogenelement eine quadratische Form von $m = n - 2$ Differentialen ist[389]), sowie die V_2 in V_n, deren Krümmungsmaß in jedem Punkte gleich dem *Riemann*schen Krümmungsmaß der V_n nach der Flächenrichtung der V_2 ist.[390]) *S. Lie*[391]) hat die Translations-V_2 im R_n und die Translations-V_3 im R_4 untersucht, die auf zwei oder mehr Weisen als Translationsmannigfaltigkeiten aufgefaßt werden

387) *E. Cartan,* Paris C. R. 167 (1918), p. 357, 426, 482, 550 ($m = 3$); Bull. soc. math. France 47 (1919), p. 125; 48 (1920), p. 132 (m beliebig).

388) Hier seien noch einige weitere Arbeiten über die *Verbiegung einer beliebigen* V_m *in* R_n *und* V_n genannt: Auf die Invarianz des *Riemann*schen Krümmungsmaßes (Nr. 19) einer V_m bei Verbiegung im R_n haben *C. J. Monro,* Proc. London Math. Soc. 9 (1878), p. 175; *H. Hovestadt,* Progr. Realgymn. Münster i. W. 1880, 16 p.; *P. Stäckel,* J. f. Math. 113 (1894), p. 110; *H. Kühne,* Arch. Math. Phys. (3) 4 (1903), p. 308 hingewiesen. Allgemeinere Biegungsinvarianten einer V_m in V_n bei *R. Lipschitz,* J. f. Math. 71 (1870), p. 274, 288 (V_m in R_n); J. f. Math. 81 (1876), p. 230; *W. Killing,* Raumformen, p. 241 ff. (V_m in S_n); *A. Puchta,* Mitt. Prager Math. Ges. 1892, p. 43 (V_{n-1} in R_n); *H. Maschke,* Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 81 (V_{n-1} in R_n); *W. H. Bates,* Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911), p. 19 (V_{n-1} in R_n); *J. A. Schouten* und *D. J. Struik,* Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 24 (1921), p. 155; vgl. auch *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 128 ff. Bedingungen für ein V_m-Element zweiter Ordnung in einer R_n geben *C. J. Monro,* a. a. O., p. 171; *P. Stäckel,* a. a. O., p. 112 ff.; eine Kritik dieser Versuche findet man bei *D. J. Struik,* Grundzüge, p. 147 f. Die Deformation der S_m in R_n hat *F. Schur,* Math. Ann. 27 (1886), p. 173 behandelt. — *E. Bompiani,* Lincei Rend. Rom (5) 24^{I} (1915), p. 1193; 25^{I} (1916), p. 627; 26^{I} (1917), p. 590; 28^{II} (1919), p. 254, 317; 29^{I} (1920), p. 38; 30^{I} (1921), p. 55 [vgl. auch Paris C. R. 164 (1917), p. 508] gibt eine ausführliche Theorie der Biegungen ν^{ter} Ordnung einer V_2 in R_n, d. h. der Biegungen, die das quadrierte Linienelement und die $\nu - 1$ ersten Krümmungen aller Kurven der V_2 invariant lassen. — Vgl. noch *R. Lagrange,* Paris C. R. 174 (1922), p. 658; Thèse, Paris 1923 = Ann. de Toulouse 1923.

388a) *E. Cartan,* Bull. Soc. math. France 46 (1919), p. 84. — Vgl. dazu [415]), [421]).

389) *E. Bompiani,* Paris C. R. 160 (1915), p. 760. — Diese V_{n-1} des R_n sind die Verallgemeinerung der Tangentenflächen der Minimalkurven und ihrer Ausartungen im R_3. Für $m < n - 2$ gibt es keine derartigen V_m in R_n.

390) *E. Bompiani,* Atti Ist. Veneto 80 (1921), p. 1128.

391) *S. Lie,* Leipz. Ber. 49 (1897), p. 181. Vgl. auch *B. Gambier,* Paris C. R. 174 (1922), p. 98. Der Begriff einer Translations-V_m im R_n findet sich schon bei *S. Lie,* Arch. for Math. 7 (1882), p. 155; Paris C. R. 114 (1892), p. 277; vgl. auch p. 334; Leipz. Ber. 48 (1896), p. 152.

können. *E. Bompiani* und *C. L. E. Moore* studieren die Translations-V_2 in V_n[392]), *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore*[393]) die Rotations-V_2, die abwickelbaren V_2 sowie die geradlinigen V_2 im R_n.[393a])

V. Neuere Grundlegung der Infinitesimalgeometrie.

28. Aufbau der reinen Infinitesimalgeometrie nach H. Weyl. Von den verschiedenen Arten der Begründung, welche die Infinitesimalgeometrie in den letzten Jahren durch *G. Hessenberg*[394]), *H. Weyl*[395]) und — als Sonderfall einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre — durch *R. König*[396]) erfahren hat, geben wir hier *H. Weyls* Aufbau der „reinen" Infinitesimalgeometrie[397]) wieder.

Bei diesem werden drei Stufen unterschieden:

1. Die n-dimensionale Mannigfaltigkeit (Situs-Mannigfaltigkeit).
2. Die affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit.
3. Der metrische Raum.

392) *E. Bompiani,* Paris C. R. 169 (1919), p. 840 (V_2 in V_n); *C. L. E. Moore,* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 25 (1919), p. 75 (V_2 in R_n).

393) *E. B. Wilson* und *C. L. E. Moore,* Proc. Amer. Ac. Boston 52 (1916), p. 336 ff., 340 ff. (abwickelb. und geradl. V_2 in R_n), p. 362 (Rotations-V_2 in R_n). Vgl. auch *C. L. E. Moore,* Ann. of Math. (2) 21 (1919), p. 81; Bull. Amer. Math. Soc. (2) 26 (1919), p. 454 = Publ. Mass. Inst. of Technology 2, Nr. 6, 1920 (Rotations-V_2 in R_4); Proc. Amer. Ac. Boston 53 (1918), p. 651 (Gewisse Rotations-V_p in R_{2p}).

393a) Über besondere V_m in V_n bzw. R_n siehe noch *R. Lagrange,* Paris C. R. 176 (1923), p. 562, 1121; Thèse, Paris 1923 = Ann. de Toulouse 1923; *J. Lipka,* Proc. Amer. Ac. Boston 59 (1923), p. 51 (vgl. Fußnote [276]).

394) *G. Hessenberg,* Math. Ann. 78 (1917), p. 187. — Vgl. auch — hauptsächlich für $n = 2$ — Acta Math. 23 (1900), p. 121.

395) *H. Weyl,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 384; Sitzgsb. preuß. Ak. 1918, p. 465; Raum ..., § 13 ff.; Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 31 (1922), p. 205 (Kurze zusammenfassende Darstellung der in Nr. 28 f. besprochenen Gedankengänge); Raumproblem. — Vgl. auch *R. Bach,* Math. Ztschr. 9 (1921), p. 110; ferner die in Nr. 31 besprochenen Arbeiten, sowie *A. S. Eddington*, Mathematical Theory, Kap. VII. — Über p-dimensionale Mannigfaltigkeiten $(1 < p < n)$ im affin-zusammenhängenden Raum vgl. *H. Weyl,* Math. Ztschr. 12 (1922), p. 165; im Euklidisch-affinen Raum *L. Berwald,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 31 (1922), p. 162. Eine ausführliche Darstellung des *Weyl*schen Aufbaus der Infinitesimalgeometrie (Nr. 28) gibt auch *J. Mulhall,* Anales Soc. cient. Argentina 95 (1923), p. 5 (span.).

396) *R. König,* Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 28 (1919), p. 213. Anwendung auf die gewöhnliche und affine Flächentheorie: Leipz. Ber. 71 (1919), p. 3.

397) Der Name „*Reine* Infinitesimalgeometrie" wurde von *Weyl* deshalb gewählt, weil in seinem „metrischen Raum" (Nr. 28) die Möglichkeit entfällt, irgend zwei Linienelemente auch an verschiedenen Stellen des Raumes ihrer Länge nach zu vergleichen; eine Möglichkeit, die *Weyl* als das letzte ferngeometrische Element ansieht, das der Geometrie *Riemanns* noch anhaftete.

1. *Die n-dimensionale Mannigfaltigkeit* definiert *H. Weyl* im wesentlichen so, wie es in Nr. 17 geschehen ist.

2. Eine Mannigfaltigkeit heißt *affin-zusammenhängend,* wenn jeder ihrer Punkte P mit seiner Umgebung affin zusammenhängt, d. h. wenn von jedem Vektor in P feststeht, in welchen Vektor in einem beliebigen unendlich benachbarten Punkt P' er durch *Parallelverschiebung* oder parallele „*Übertragung*“ übergeht.

Die *Parallelverschiebung* von P nach P' ist dabei durch folgende Postulate definiert:

a) Sie bildet die sämtlichen Vektoren in P auf die sämtlichen Vektoren in P' linear (affin) ab.

b) Es gibt ein Koordinatensystem, bei dessen Benutzung die Komponenten eines jeden Vektors in P durch Parallelverschiebung von P nach einem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte nicht geändert werden. („*In P geodätisches Koordinatensystem.*“)[397a]

Sind ξ^λ die Komponenten eines beliebigen Vektors in P, $\xi^\lambda + d\xi^\lambda$ die Komponenten des Vektors, der aus ihm durch Parallelverschiebung von P nach P' hervorgeht, so folgt aus a) und b):

$$d\xi^\lambda = -\,d\gamma^\lambda_\mu \xi^\mu, \quad d\gamma^\lambda_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu; \quad (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}).\text{[398]} \tag{1}$$

Die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ heißen *die Komponenten des affinen Zusammenhanges.*[399]

397a) Zu diesem Begriffe vgl. auch *O. Veblen,* Proc. Nat. Ac. sc. 8 (1922), p. 192.

398) Die Gleichungen (1) sind als eine in den ξ^λ lineare Approximation anzusehen, die überall dort hinreicht, wo es sich um eine Annäherung erster Ordnung handelt. Sowie eine Annäherung zweiter Ordnung in Betracht kommt, muß der lineare affine Zusammenhang (1) durch einen quadratischen ersetzt werden. Vgl. *P. Dienes,* Paris C. R. 174 (1922), p. 1167; 175 (1922), p. 209. — Ist in der Mannigfaltigkeit ein Vektorfeld $\xi^\lambda = \xi^\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gegeben, so versteht man unter der *invarianten Änderung* oder dem *Differential* $\delta\xi^\lambda$ des Feldvektors in einem Punkte $P(x_\lambda)$ der Mannigfaltigkeit bei Verschiebung nach einem Nachbarpunkte $Q(x_\lambda + dx^\lambda)$ die Differenz zwischen dem Feldvektor $\xi^\lambda + d\xi^\lambda = \xi^\lambda + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu$ in Q und dem von P nach Q parallel verschobenen („übertragenen“) Feldvektor, d. i. dem Vektor $\xi^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} dx^\mu \xi^\nu$; also die Größe:

$$\delta\xi^\lambda = d\xi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} dx^\mu \cdot \xi^\nu. \tag{1a}$$

Erst nach Einführung des Begriffes der Parallelverschiebung oder Übertragung eines Vektors in der Mannigfaltigkeit ist also die Differentiation von Vektoren (und beliebigen Tensoren) erklärt.

399) Die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems stetige und einmal stetig differentiierbare Funktionen der Koordinaten. Sie haben keinen Tensorcharakter.

Durch die Forderung der Invarianz von $\xi^\lambda \eta_\lambda$ bei simultaner Parallelverschiebung von ξ^λ und η_λ (ξ^λ willkürlich) von P nach P' ist weiter auch die Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors η_λ definiert:

(2) $$d\eta_\lambda = d\gamma_\lambda^\mu \eta_\mu \quad \text{usf.}$$

Im affin-zusammenhängenden Raum kann man schon die Begriffe der *geodätischen Linie* und der *Krümmung* aufstellen.

Eine *geodätische Linie* beschreibt der Anfangspunkt jedes Vektors, der beständig parallel in sich selbst verschoben wird. Die geodätischen Linien genügen somit dem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

(3) $$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0\,.$$

Zur *Krümmung* der Mannigfaltigkeit im Punkte P gelangt man ebenso wie in Nr. 19 durch Parallelverschiebung eines Vektors ξ^λ um ein von zwei Linienelementen dx^λ und δx^λ in P aufgespanntes infinitesimales Parallelogramm. Der Zuwachs, den die ξ^λ dabei erfahren, ist (bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung):

(4) $$\Delta \xi^\lambda = \delta d \xi^\lambda - d \delta \xi^\lambda = -\tfrac{1}{2} K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu\nu} \xi^\varkappa (dx^\mu \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\mu)\,,$$

wo

(5) $$K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\varkappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\varkappa\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\varrho_{\varkappa\mu} \Gamma^\lambda_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\varkappa\nu} \Gamma^\lambda_{\varrho\mu}\,.$$

Die lineare Transformation (4) charakterisiert die *Krümmung* der Mannigfaltigkeit in P nach der vom Flächenelement (dx^λ, δx^λ) eingenommenen Flächenrichtung. Der Tensor von den Komponenten (5) heißt der *Krümmungstensor.*[400]) Sein identisches Verschwinden kennzeichnet die *euklidisch-affinen* oder *linearen* Mannigfaltigkeiten, d. h. jene, in denen die Vektorübertragung, die durch Parallelverschiebung zustandekommt, integrabel ist.[401])

3. Eine Mannigfaltigkeit heißt ein *metrischer* Raum, wenn:

a) sie in jedem Punkte eine *Maßbestimmung* trägt;

b) jeder ihrer Punkte mit seiner Umgebung *metrisch zusammenhängt.*

400) *H. Weyl* schreibt statt des $-K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu\nu}$ des Textes $F^{\lambda}_{\varkappa\mu\nu}$. Die $K^{\lambda}_{\varkappa\ \mu\nu}$ besitzen schiefe und zyklische Symmetrie:

$$K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu\nu} + K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \nu\mu} = 0\,, \quad K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu\nu} + K^{\lambda}_{\nu \cdot \varkappa\mu} + K^{\lambda}_{\mu \cdot \nu\varkappa} = 0\,.$$

Wichtiger als der Tensor $K^{\lambda}_{\varkappa \cdot \mu\nu}$ ist für die Physik der *verjüngte Krümmungstensor*

(5a) $$K_{\mu\nu} = K^{\lambda}_{\mu \cdot \nu\lambda} = -\left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\varrho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\varrho\lambda}\right).$$

401) Vgl. auch *W. Wirtinger,* Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1922), p. 439.

a) Eine Mannigfaltigkeit trägt in einem Punkte P eine *Maßbestimmung,* wenn jeder Vektor ξ^λ in P eine *Strecke* bestimmt und eine nicht ausgeartete quadratische Form:

$$\mathfrak{x}^2 = a_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu, \qquad (a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}) \tag{6}$$

existiert, derart, daß zwei Vektoren ξ^λ und η^λ dann und nur dann dieselbe Strecke bestimmen, wenn $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{y}^2$ ist. $\mathfrak{x}^2$ ist durch diese Forderung nur bis auf einen Faktor A $(\neq 0)$ bestimmt, dessen Festlegung die Mannigfaltigkeit im Punkte P *eicht.*[402]) Nach Festlegung des *Eichverhältnisses* A heißt $\mathfrak{x}^2$ die *Maßzahl* l *der Strecke* $\mathfrak{x}$, die durch den Vektor ξ^λ bestimmt wird.[403])

b) Ein Punkt P *hängt* mit seiner Umgebung *metrisch zusammen,* wenn von jeder Strecke in P feststeht, in welche Strecke in einem beliebigen unendlich benachbarten Punkte P' sie durch *kongruente Verpflanzung* von P nach P' übergeht.

Die *kongruente Verpflanzung* von P nach P' ist dabei durch das folgende Postulat definiert:

Es gibt eine Eichung der Umgebung von P derart, daß die Maßzahl einer jeden Strecke in P durch kongruente Verpflanzung von P nach einem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte nicht geändert wird. (In P *geodätische Eichung.*)

Diese Forderung übersetzt sich analytisch in:

$$dl = -l\,d\varphi; \quad d\varphi = \varphi_\lambda dx^\lambda, \tag{7}$$

wo die lineare Differentialform $d\varphi$ bei Abänderung der Eichung gemäß $\bar{l} = Al$ in

$$d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{dA}{A} \tag{8}$$

übergeht.

Die Metrik der Mannigfaltigkeit ist demnach relativ zu einem Bezugssystem (= Koordinatensystem + Eichung) durch eine quadratische und eine lineare Differentialform charakterisiert:

$$Q = a_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu, \quad d\varphi = \varphi_\lambda dx^\lambda, \tag{9}$$

die bei Koordinatentransformationen invariant sind, sich dagegen bei

402) Es wird zugelassen, daß $\mathfrak{x}^2$ p positive und q negative $(p + q = n)$ Dimensionen hat. Die Mannigfaltigkeit heißt dann im Punkte P $(p + q)$-dimensional. Wenn $p \neq q$, so kann man durch die Forderung $p > q$ das Vorzeichen von $\mathfrak{x}^2$ festlegen, so daß das Eichverhältnis A eine *positive* (stetige und stetig differentiierbare) Ortsfunktion ist.

403) Mittels der quadratischen Grundform läßt sich das Senkrechtstehen und allgemeiner der Winkel zweier Vektoren in P in der gewöhnlichen Weise (Nr 17) erklären.

Umeichung gemäß

$$(10)\qquad \bar{Q} = \Lambda Q, \quad d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\Lambda}{\Lambda}$$

(Λ positive, stetig differentiierbare Ortsfunktion) ändern.

Ein metrischer Raum trägt von Natur aus affinen Zusammenhang: d. h. die Forderung, daß bei infinitesimaler Parallelverschiebung eines Vektors auch die durch ihn bestimmte Strecke kongruent verpflanzt werden soll, bestimmt die Komponenten des affinen Zusammenhanges eindeutig:

$$(11)\qquad \begin{cases} \Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} = a^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\varkappa\lambda}\ ^{404)}; \\ \Gamma_{\nu,\varkappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\varkappa\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) + \frac{1}{2}(a_{\varkappa\nu}\varphi_{\lambda} + a_{\lambda\nu}\varphi_{\varkappa} - a_{\varkappa\lambda}\varphi_{\nu}). \end{cases}$$

Die durch diesen affinen Zusammenhang gemäß (4), (5) charakterisierte Krümmung ist jetzt genauer als *Vektorkrümmung* zu bezeichnen. Ihr steht die *Streckenkrümmung* gegenüber, ein linearer Tensor zweiter Stufe mit den Komponenten:

$$(12)\qquad f_{\lambda\mu} = \frac{\partial\varphi_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\ ^{405)},$$

zu dem man in entsprechender Weise durch Verpflanzung einer Strecke von der Maßzahl l von P aus kongruent zu sich selbst längs des Umfanges eines infinitesimalen Parallelogramms gelangt.

Für den Tensor der *Vektorkrümmung* gilt im metrischen Raume die Zerlegung:

$$(13)\qquad K^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu} = {}^{*}K^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\varkappa}\cdot f_{\mu\nu} \quad (\delta^{\lambda}_{\varkappa} = 0, \lambda \neq \varkappa; = 1, \lambda = \varkappa).$$

Der Tensor von den Komponenten ${}^{*}K^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu}$ heißt die *Richtungskrümmung.*

Das identische Verschwinden der Vektorkrümmung kennzeichnet die *metrisch-euklidischen*, das der Streckenkrümmung die *Riemann*schen Räume. Nur in einem *Riemann*schen Raum läßt sich jede Strecke von ihrem ursprünglichen Ort in einer vom Wege unabhängigen Weise nach jedem anderen Punkte verpflanzen. Ein *Riemann*scher Raum läßt sich so eichen, daß $d\varphi$ identisch verschwindet.[406])

---

404) Bei allen Größen α^{λ}, die (vielleicht neben anderen) einen oberen Index λ tragen, wird das Herunterziehen des Index durch $\alpha_{\mu} = a_{\lambda\mu}\alpha^{\lambda}$ erklärt und der umgekehrte Prozeß des Hinaufziehens durch die dazu inversen Gleichungen.

405) Er genügt den invarianten Gleichungen: $\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} = 0.$

406) Zur Theorie des *Weyl*schen metrischen Raumes vgl. auch *R. Bach,* Math. Ztschr. 9 (1921), p. 110; *G. Juvet,* Paris C. R. 172 (1921), p. 1647; Bull. Soc. neuchâteloise sc. nat. 46 (1920/21) (Kurventheorie); *J. A. Schouten,* Ricci-kalkül, VI. Abschn.

29. Gruppentheoretische Auffassung der Raummetrik. Eine tiefere Einsicht in das Wesen der Raummetrik gewährt erst die gruppentheoretische Auffassung, die im folgenden nach *H. Weyl*[407]) auseinandergesetzt werden soll.

Die Metrik einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist bekannt, wenn bekannt ist, welche unter den linearen Abbildungen

A. der Gesamtheit aller Vektoren (des „Vektorkörpers") in einem beliebigen Punkte P_0 auf sich selbst, und

B. des Vektorkörpers in P_0 auf den Vektorkörper in einem beliebigen unendlich benachbarten Punkte P

kongruente Abbildungen sind. Durch die Abbildungen A., die *Drehungen in* P_0, wird die *Metrik im Punkte* P_0 bestimmt, durch die Abbildungen B., die *kongruenten Verpflanzungen von* P_0 *nach* P der *metrische Zusammenhang von* P_0 *mit* P.

Von den Drehungen in P_0 ist zu fordern:

1. daß sie das Volumen des von n Vektoren $\xi_1^\lambda, \xi_2^\lambda, \ldots, \xi_n^\lambda$ in P_0 aufgespannten Parallelepipedes, d. h. die Determinante der ξ_l^λ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ ungeändert lassen;
2. daß sie eine Gruppe bilden.[408])

Von den kongruenten Verpflanzungen:

1a) daß alle kongruenten Verpflanzungen von P_0 nach einem *bestimmten* zu P_0 unendlich benachbarten Punkte P aus einer von ihnen, V, durch Hinzufügung einer willkürlichen Drehung in P_0 entstehen, und

b) daß die Gruppe $\mathfrak{D}$ der Drehungen in P aus der Gruppe $\mathfrak{D}_0$ der Drehungen in P_0 durch Transformation mittels einer solchen kongruenten Verpflanzung V entsteht (d. h. daß $\mathfrak{D} = V\mathfrak{D}_0 V^{-1}$ ist);

2. daß zwei kongruente Verpflanzungen des Vektorkörpers in $P_0(x_\lambda^0)$ nach zwei *beliebigen* zu P_0 unendlich benachbarten Punkten $P(x_\lambda^0 + dx^\lambda)$ und $Q(x_\lambda^0 + \delta x^\lambda)$ hintereinander ausgeführt, eine kongruente Verpflanzung von P_0 nach dem zu P_0 unendlich benachbarten Punkte $R(x_\lambda^0 + dx^\lambda + \delta x^\lambda)$ ergeben.

---

407) *H. Weyl*, a) Raum . . ., § 18; b) Math. Ztschr. 12 (1922), p. 114; c) Jahresb. Deutsche Math.-Ver. 31 (1922), p. 205 (Kurze Darstellung der Gedankengänge und Ergebnisse); d) Raumproblem, p. 43 ff. Vgl. auch Math. Ztschr. 17 (1923), p. 293.

408) D. h hier: 1. Zu den Drehungen gehört auch die Identität; 2. Mit jeder Drehung tritt auch die inverse in der Gruppe auf; 3. Mit zwei Drehungen ist in der Gruppe auch immer diejenige enthalten, die durch Hintereinanderausführung der beiden Drehungen hervorgeht.

Die einzigen kongruenten Verpflanzungen, die im folgenden betrachtet werden, sind solche, bei denen die Vektorkomponenten ξ^λ Änderungen $d\xi^\lambda$ erfahren, die unendlich klein sind von der gleichen Ordnung wie die Verschiebung des Zentrums P_0 („infinitesimale kongruente Verpflanzung"). Ist $d\xi^\lambda = -\varepsilon A^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu$ eine beliebige infinitesimale Verpflanzung vom Punkte $P_0(x^0_\lambda)$ nach dem Punkte P_ν $(x^0_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\varepsilon;$ $\delta_{\lambda\nu} = 0$ für $\lambda \neq \nu$, $= 1$ für $\lambda = \nu$; $\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so wird durch

$$(14) \qquad d\xi^\lambda = -A^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu\, dx^\nu$$

ein System kongruenter Verpflanzungen nach den sämtlichen Punkten der Umgebung von P_0 geliefert.

Das Bisherige ist nichts als eine Analyse der Begriffe „Metrik" und „metrischer Zusammenhang". Nunmehr sollen unter allen denkbaren Arten metrischer Räume jene Mannigfaltigkeiten charakterisiert werden, die in Nr. 28 als „metrischer Raum" im engeren Sinne bezeichnet wurden. Das geschieht durch folgende Forderungen:

I. *Das Wesen des Raumes läßt jeden möglichen metrischen Zusammenhang zu.* (M. a W.: die $A^\lambda_{\mu\nu}$ in (14) sind vollkommen beliebige Zahlen.)

II. *Der metrische Zusammenhang bestimmt eindeutig den affinen* (Nr. 28). D. h.: bei gegebenem metrischen Zusammenhang gibt es stets unter den kongruenten Verpflanzungen des Vektorkörpers *ein einziges* System von Parallelverschiebungen.

Zur analytischen Formulierung dieser Forderungen ist zunächst an folgendes zu erinnern[409]):

Eine r-gliedrige kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine stetige r-dimensionale Mannigfaltigkeit von Matrizen. Ist E die Einheitsmatrix, so ist A eine infinitesimale Operation der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn in $\mathfrak{G}$ eine (von ε abhängige) Abbildung vorkommt, die mit $E + \varepsilon A$ übereinstimmt bis auf einen Fehler, der stärker als ε mit ε gegen Null konvergiert. Die infinitesimalen Operationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden eine lineare Schar $\mathfrak{g}$:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_r A_r; \quad (\lambda_\varrho \text{ beliebige Zahlen}),$$

die mit irgend zwei Matrizen A, B stets auch die Matrix $AB - BA$ enthält („r-gliedrige infinitesimale Gruppe").

Weiter werde erklärt:

n Matrizen,

$$A_1 = (A^\lambda_{\mu 1}), \quad A_2 = (A^\lambda_{\mu 2}), \quad \ldots, \quad A_n = (A^\lambda_{\mu n})$$

409) Vgl. II A 6 (*L. Maurer* und *H. Burkhardt*).

bilden eine *symmetrische Doppelmatrix* in $\mathfrak{g}$, wenn die μ^{te} Spalte von A_ν gleich der ν^{ten} Spalte von A_μ ist ($A^\lambda_{\mu\nu} = A^\lambda_{\nu\mu}$).

Dann besitzt die infinitesimale Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ *folgende Eigenschaften:*

a) *Die Spur* $A^1_{1\nu} + A^2_{2\nu} + \cdots + A^n_{n\nu}$ *jeder Matrix* $A_\nu = (A^\lambda_{\mu\nu})$ *von* $\mathfrak{d}$ *ist Null.*

b) *Es existiert in* $\mathfrak{d}$ *keine andere symmetrische Doppelmatrix als Null.*

c) *Die Dimensionenzahl von* $\mathfrak{d}$ *ist die höchste mit* b) *verträgliche, nämlich* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Die Eigenschaft a) drückt nur die Volumtreue der Drehungen aus, b) und c) formulieren die Forderungen I. und II. analytisch.

Insbesondere ist die infinitesimale Gruppe derjenigen Operationen, die eine beliebige nicht-ausgeartete quadratische Form $Q = a_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu$ invariant lassen, eine infinitesimale Drehungsgruppe, die mit $\mathfrak{d}_Q$ bezeichnet werde.[410])

Daß der „metrische Raum" im engeren Sinne (Nr. 28) durch die beiden Forderungen I. und II. unter allen denkbaren Arten metrischer Räume charakterisiert ist, wird nun durch den *Satz von der Einzigartigkeit der pythagoräischen Maßbestimmung* ausgesprochen, den *H. Weyl*[411]) und *E. Cartan*[411]) bewiesen haben:

Jede infinitesimale Gruppe $\mathfrak{d}$, *welche den Forderungen* a)—c) *genügt, ist identisch mit der zu einer gewissen nicht-ausgearteten quadratischen Form Q gehörigen infinitesimalen Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}_Q$.

Aus diesem Satze geht hervor, daß die durchgeführte Analyse der Raummetrik eine vollständige ist, d. h. daß sie alle entscheidenden Wesenszüge des „metrischen Raumes" (Nr. 28) aufdeckt.

30. Einordnung der projektiven und konformen Auffassung. *H. Weyl*[412]) hat auch die projektive und konforme Auffassung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten behandelt.

1. Charakteristisch für die *projektive Beschaffenheit eines affinzusammenhängenden Raumes* (Nr. 28) ist die Parallelverschiebung, die

410) Sie besteht aus allen Matrizen $A_\nu = (A^\lambda_{\mu\nu})$, für welche $a_{\varkappa\lambda}A^\lambda_{\mu\nu} + a_{\mu\lambda}A^\lambda_{\nu\varkappa} = 0$ ist.

411) *H. Weyl*[407]), b) und d), p. 88 ff.; *E. Cartan*, Paris C. R. 175 (1922), p. 82, und ausführlicher J. de math. (9) 2 (1923), p. 167.

412) *H. Weyl*, Gött. Nachr. 1921, p. 99. — Daselbst studiert *H. Weyl* auch die nächst den euklidisch-metrischen Räumen einfachsten, die „Kugeln". Zu ihnen gehören insbesondere die euklidisch-metrischen Räume. Die Kugeln sind die einzigen *homogenen* metrischen Räume. Vgl. auch *H. Weyl*, Raumproblem, p. 22 ff.

eine willkürliche Richtung an einer beliebigen Stelle P erfährt, wenn P *in dieser Richtung selber* infinitesimal verschoben wird. Die *projektiven* Abänderungen $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \to \Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}$ des affinen Zusammenhanges, das sind diejenigen, welche die projektive Beschaffenheit der Mannigfaltigkeit unangetastet lassen, sind also identisch mit jenen, bei denen die geodätischen Linien erhalten bleiben. Sie haben die Form:

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\psi_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\psi_{\mu}; \tag{15}$$

($\delta^{\sigma}_{\varrho} = 0$, $\varrho \neq \sigma$; $= 1$, $\varrho = \sigma$. ψ_{λ} willkürlicher kovarianter Tensor erster Stufe).[413])

Aus der Änderung des Krümmungstensors bei einer projektiven Abänderung des affinen Zusammenhanges leitet man leicht einen gegenüber solchen Abänderungen invarianten Tensor vierter Stufe ab, die *Projektivkrümmung* der Mannigfaltigkeit[414]):

$$\begin{aligned} P^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu} = K^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu} + \frac{1}{n^2-1}\{(n-1)\delta^{\lambda}_{\varkappa}(K_{\mu\nu} - K_{\nu\mu}) \\ + \delta^{\lambda}_{\mu}(nK_{\varkappa\nu} + K_{\nu\varkappa}) - \delta^{\lambda}_{\nu}(nK_{\varkappa\mu} + K_{\mu\varkappa})\}; \end{aligned} \tag{16}$$

$$(K_{\varrho\sigma} = K^{\tau}_{\varrho\cdot\sigma\tau};\ n \text{ Dimensionenzahl}).$$

Für $n = 2$ ist sie identisch Null.

Eine affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit heißt *projektiv-eben* oder *projektiv-euklidisch*, wenn sie durch eine projektive Abänderung des affinen Zusammenhanges in einen euklidisch-affinen Raum (Nr. 28) übergeführt werden kann. Die projektiv-euklidischen Mannigfaltigkeiten sind gekennzeichnet: im Falle $n = 2$ durch das Bestehen der Gleichung:

$$2(K_{\varkappa\lambda(\mu)} - K_{\varkappa\mu(\lambda)}) + K_{\lambda\varkappa(\mu)} - K_{\mu\varkappa(\lambda)} = 0; \tag{17}$$

$$\left(K_{\varkappa\lambda(\mu)} = \frac{\partial K_{\varkappa\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu}K_{\nu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}K_{\varkappa\nu}\right),$$

im Falle $n \geqq 3$ durch das Verschwinden der Projektivkrümmung.

413) Vgl. auch *L. P. Eisenhart*, Proc. Nat. ac. of sc. 8 (1922), p. 233; *O. Veblen*, ebenda, p. 347; *O. Veblen* u. *T. Y. Thomas*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 551.

414) *H. Weyl*[412]). Die Konformkrümmung bereits bei *H. Weyl*, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 404. — Setzt man:

$$C_{\varkappa\lambda\mu\nu} = a_{\lambda\varrho}C^{\varrho}_{\varkappa\cdot\mu\nu}, \quad C^{\varkappa\lambda\mu\nu} = C^{\lambda}_{\varrho\cdot\sigma\tau}a^{\varrho\varkappa}a^{\sigma\mu}a^{\tau\nu}, \quad C = C_{\varkappa\lambda\mu\nu}C^{\varkappa\lambda\mu\nu},$$

wo $C^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu}$ durch Gl. (21) des Textes erklärt ist, wenn darin statt $K^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu}$ überall $R^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu\nu}$ [Nr. 19, (15)] gesetzt wird, so ist

$$d\sigma^2 = \sqrt{C}\cdot a_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

eine Differentialform, die als quadriertes Bogenelement einer „konformen" Geometrie in einer nicht konform-euklidischen (Nr. 26) V_n ($n \geq 4$) verwendbar ist; d. h. einer Geometrie, in der nur die *Gleichung* $a_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = 0$, nicht aber die *Differentialform* $ds^2 = a_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ invariant ist. *A. Einstein*, Sitzgsb. preuß. Ak. 1921, p. 261.

2. Charakteristisch für die *konforme Beschaffenheit eines metrischen Raumes* (Nr. 28) ist der zu jeder Stelle P gehörige infinitesimale *Kegel der Nullrichtungen:*

$$a_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu = 0. \tag{18}$$

Die *konformen* Abänderungen der Metrik des Raumes, das sind diejenigen, welche seine konforme Beschaffenheit unangetastet lassen, sind also identisch mit jenen, bei denen an jeder Stelle der Kegel (18) erhalten bleibt. Eine konforme Abänderung der Metrik des Raumes kann stets gemäß den Formeln (vgl. Nr. 28)

$$a^*_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}, \quad \varphi^*_\lambda = \varphi_\lambda + \chi_\lambda \tag{19}$$

(χ_λ willkürlicher kovarianter Tensor erster Stufe) vorgenommen werden. Die zugehörige Änderung der Komponenten des affinen Zusammenhanges ist:

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu \chi_\nu + \delta^\lambda_\nu \chi_\mu - a_{\mu\nu}\chi^\lambda); \quad (\chi^\lambda = a^{\lambda\varrho}\chi_\varrho). \tag{20}$$

Für $n > 2$ ist der Tensor vierter Stufe:

$$C^\lambda_{\varkappa\cdot\mu\nu} = K^\lambda_{\varkappa\cdot\mu\nu} - \frac{1}{n-2}(a_{\varkappa\mu}K^\lambda_\nu - a_{\varkappa\nu}K^\lambda_\mu - \delta^\lambda_\mu K_{\varkappa\nu} + \delta^\lambda_\nu K_{\varkappa\mu}) \tag{21}$$
$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)}(a_{\varkappa\mu}\delta^\lambda_\nu - a_{\varkappa\nu}\delta^\lambda_\mu)K;$$
$$(K_{\varrho\sigma} = K^\tau_{\varrho\cdot\sigma\tau}; \quad K^\varrho_\sigma = a^{\tau\varrho}K_{\tau\sigma}; \quad K = a^{\tau\varrho}K_{\tau\varrho}),$$

die *Konformkrümmung* des metrischen Raumes[414]), gegenüber konformen Abänderungen der Metrik invariant. Für $n = 3$ ist die Konformkrümmung identisch Null.

Ein metrischer Raum heißt *konform-eben* oder *konform-euklidisch,* wenn er durch eine konforme Abänderung der Metrik in einen metrisch-euklidischen (Nr. 28) übergeführt werden kann. Für $n = 2$ ist jeder metrische Raum konform-euklidisch. Für $n = 3$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß ein metrischer Raum konform-eben ist, das Bestehen der Gleichungen:

$$4(K_{\lambda\mu(\nu)} - K_{\lambda\nu(\mu)}) - (a_{\lambda\mu}K_{(\nu)} - a_{\lambda\nu}K_{(\mu)}) = 0; \tag{22}$$
$$\left(K_{\varrho\sigma(\tau)} = \frac{\partial K_{\varrho\sigma}}{\partial x^\tau} - \Gamma^\chi_{\varrho\tau}K_{\chi\sigma} - \Gamma^\chi_{\sigma\tau}K_{\varrho\chi}; \quad K_{(\varrho)} = \frac{\partial K}{\partial x^\varrho} - K\cdot\varphi_\varrho\right)^{414a)},$$

für $n \geqq 4$ das Verschwinden der Konformkrümmung.[415])

414a) Für die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ sind hier die Werte (11) einzusetzen.

415) Im Falle einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit stammt dieses Resultat für $n = 3$ von *E. Cotton,* Ann. de Toulouse 1 (1899), p. 385, für $n \geqq 4$ von *J. A. Schouten,* Math. Ztschr. 11 (1921), p. 58. Vgl. Nr. 26, bes. (1), (2). — *E. Cartan,* Bull. soc. math. France 45 (1917), p. 57 zeigt, daß zwei V_{n-1} im R_n ($n > 5$), von gewissen Hypersphären-Enveloppen abgesehen, nur dann konform

Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raumes bestimmen zusammen dessen Metrik eindeutig.

31. Weitere Untersuchungen. Der Begriff der parallelen Übertragung eines Vektors von einem Punkte P nach einem beliebigen unendlich benachbarten Punkte Q einer Situsmannigfaltigkeit (Nr. 28) hat sich immer mehr als einer der wichtigsten in der Theorie der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten herausgestellt. Prinzipiell ist man bei seiner Erklärung *völlig* frei, und auch die Rücksicht auf mathematische Zweckmäßigkeit läßt noch einen Spielraum, der wesentlich über die in Nr. 28 gegebene Erklärung hinausgeht. Dementsprechend beschäftigen sich die meisten Arbeiten, die im vorliegenden Abschnitte zu besprechen sind, vor allem mit verschiedenen anderen Möglichkeiten, eine solche Übertragung einzuführen. Nur die beiden zunächst zu nennenden Arbeiten behandeln andere Fragen.

A. S. Eddington[416]) gründet die Metrik in einer affin-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit (Nr. 28) auf eine *ganz beliebige* quadratische Differentialform:

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad a \equiv |a_{\mu\nu}| \neq 0, \tag{23}$$

deren *Christoffel*symbole zweiter Art also mit den Komponenten des affinen Zusammenhanges *nicht* notwendig zusammenfallen.[417]) Aus der so eingeführten konventionellen Maßbestimmung entsteht durch die besondere Annahme:

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda} K^{\alpha}_{\mu\cdot\nu\alpha} = \frac{1}{\lambda} K_{\mu\nu}, \qquad (\lambda = \text{konst.}) \tag{24}$$

eine im physikalischen Sinn natürliche. *L. P. Eisenhart* und *O. Veblen*[418]) definieren die affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit nicht vermöge

---

aufeinander abgebildet werden können, wenn sie durch eine konforme Transformation des R_n ineinander überführbar sind. Im R_5 gibt es weitere Ausnahmeflächen [siehe [388a])].

416) *A. S. Eddington,* Proc. R. Soc. London A. 99 (1921), p. 104; Mathematical Theory, p. 213 ff. Vgl. auch *A. Einstein,* Berl. Sitzgsb. 1923, p. 32, 76, 137; *J. A. Schouten,* Versl. Ak. v. Wet. Amsterdam 32 (1923), p. 842 (holl.) = Proc. Ak. v. Wet. Amsterdam 26 (1923), p. 851. — Einen verwandten Einbau der Metrik in eine affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit gibt *P. Dienes,* Paris C. R. 176 (1923), p. 238, 370.

417) $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\mu\nu \atop \lambda} \right\}$ würde eine V_n ergeben.

418) *L. P. Eisenhart* und *O. Veblen*, Proc. Nat. ac. sc. 8 (1922), p. 19; *O. Veblen,* ebenda, 8 (1922), p. 192, 347; 9 (1923), p. 3; *L. P. Eisenhart,* ebenda, 8 (1922), p. 207, 233; 9 (1923), p. 4; *O. Veblen* und *T. Y. Thomas,* Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 551.

des Begriffes der Parallelverschiebung, sondern als eine Situsmannigmannigfaltigkeit, in der ein System von *Bahnkurven*

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{25}$$

— die geodätischen Linien von Nr. 28 — existiert.[419]) Sie beschäftigen sich z. B. mit der Frage, unter welchen Bedingungen die affinzusammenhängende Mannigfaltigkeit eine *Riemann*sche ist, und geben auch sonst viele Einzelheiten zur Theorie der affin-zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten.[419a]) *J. A. Schouten*[420]) hat systematisch alle *linearen* Übertragungen (Nr. 28) studiert, d. h. diejenigen, die sowohl in den Vektorkomponenten ξ^λ als auch in den Verschiebungskomponenten dx^λ homogen-linear sind, und die Eigenschaft besitzen, daß die auf sie begründete Differentiation der Tensoren denselben Rechengesetzen genügt, wie die gewöhnliche Differentiation. Jede solche Übertragung läßt sich durch Angabe dreier Tensorfelder dritten Grades $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$, $S'^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$, $Q'_{\mu\lambda\nu}$ mit bezüglich n^3, $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ und $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Bestimmungszahlen festlegen, wobei das erste Feld den Unterschied der Übertragungen der ko- und kontravarianten Größen kennzeichnet, das zweite die Symmetrieverhältnisse der Übertragung beherrscht, das dritte den geodätischen Differentialquotienten irgendeines vorgegebenen symmetrischen Tensors $a_{\lambda\mu}$ darstellt. Da jedes der drei Felder allgemein (Fälle I, A, α), aus einem Vektorfeld C_λ, bzw. S_λ, Q_λ abgeleitet (Fälle II, B, β) oder Null (Fälle III, C, γ) sein kann, so ergeben sich im ganzen 27 verschiedene lineare Übertragungen.[420a]) *E. Cartan* geht in einigen vorläufigen Mitteilungen[421]) von einer n-dimensionalen

---

419) In (25) sind die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (stetige und hinreichend oft stetig differentiierbare) Ortsfunktionen, die in den unteren Zeigern symmetrisch angenommen werden dürfen. Sie haben keinen Tensorcharakter.

419a) Hier seien nur genannt: Eine Verallgemeinerung der *Riemann*schen Normalkoordinaten [III D 10 b), Nr. 20 (*R. Weitzenböck*)] auf affin-zusammenhängende Räume [*O. Veblen*[418]), p. 192] und die Betrachtung affin-zusammenhängender Räume, die ein invariantes Integral besitzen [*O. Veblen*[418]), p. 3; *L. P. Eisenhart*[418]), p. 4]. Vgl. auch [413]); sowie *O. Veblen* und *T. Y. Thomas*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 551.

420) *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 13 (1922), p. 56; 15 (1922), p. 168; 17 (1923), p. 111; vgl. auch Riccikalkül, Kap. II. — *J. A. Schouten*, Math. Ztschr. 17 (1923), p. 161, 183 hat auch die affine Differentialgeometrie (Nr. 9) in die Theorie der höheren Übertragungen eingeordnet. Vgl. auch Riccikalkül, Kap. IV.

420a) Z. B. ist III, C, α die affine Übertragung [*H. Weyl*, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 384; vgl. auch *A. S. Eddington*[416])], III, C, β die metrische Übertragung *H. Weyls* (Nr. 28), III, C, γ die *Riemann*sche Übertragung.

421) *E. Cartan*, Paris C. R. 174 (1922), p. 437, 593, 734, 857, 1104. — Inzwischen ist auch eine ausführliche Darstellung erschienen: Ann. Éc. Norm. (3)

Mannigfaltigkeit V_n aus, in der die Geometrie einer bestimmten Transformationsgruppe gilt (die euklidische, äquiforme, affine, projektive, konforme) und betrachtet eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit V_n^*, die durch „Deformation" aus V_n hervorgeht; anders ausgedrückt: die Mannigfaltigkeit V_n^* soll in der Umgebung jedes ihrer Punkte P die Eigenschaften der Mannigfaltigkeit V_n besitzen, und die Umgebungen irgend zweier unendlich benachbarten Punkte P und Q sollen durch eine Transformation der zugehörigen Gruppe auseinander hervorgehen. Man gelangt so zu Typen von Mannigfaltigkeiten, die wesentlich allgemeiner sind als die bisher untersuchten. *W. Wirtinger*[422]) überträgt die Begriffe des Krümmungstensors und der kovarianten Differentiation auf die unabhängig voneinander durch

(26) $$d\xi^\alpha = Z^\alpha_\beta(x, \xi, v)\, dx^\beta \quad \text{bzw.} \quad dv_\alpha = V_{\alpha\beta}(x, \xi, v)\, dx^\beta$$ [423])

erklärten Übertragungen kontravarianter bzw. kovarianter Vektoren. Eingehend wird der besondere Fall

(27) $$Z^\alpha_\beta = -\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\alpha} + \varrho_\beta \xi^\alpha, \qquad V_{\alpha\beta} = \frac{\partial W_\beta}{\partial \xi^\alpha} + \varrho_\beta v_\alpha$$ [424])

untersucht, in dem die Parallelverschiebung eine infinitesimale *Berührungstransformation* des Elementes (ξ^α, v_α) ist, das aus einem willkürlichen kontravarianten Vektor ξ^α und einem willkürlichen kovarianten Vektor v_α in vereinigter Lage $(\xi^\alpha v_\alpha = 0)$ besteht.[425])

---

40 (1923), p. 325 (Fall der affinen und Bewegungsgruppe); Ann. Soc. Polon. de math. 1923, p. 171 (Fall der konformen Gruppe).

422) *W. Wirtinger,* Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1922), p. 439.

423) Darin ist Z^α_β $(V_{\alpha\beta})$ in den ξ^α (v_α) homogen von erster, in den v_α (ξ^α) homogen von nullter Ordnung.

424) W_β ist hier in den ξ^α und v_α homogen von erster, ϱ_β von nullter Ordnung.

425) Eine nicht lineare Parallelübertragung tritt, für Flächen im R_3, auch auf bei *G. Y. Rainich,* Proc. Nat. Ac. sc. 9 (1923), p. 401, eine Erweiterung der *Weyl*schen Parallelverschiebung (Nr. 28) auf Doppelmannigfaltigkeiten bei *H. Eyraud,* Paris C. R. 176 (1923), p. 1605.

Berichtigung.

p. 97, Z. 7 f. lies „vierpunktig" statt „dreipunktig".

p. 147, Fußn. 228), Z. 2 v. unten streiche die Worte „(des Krümmungsaffinors ... Text)".

(Abgeschlossen im Oktober 1923.)

Register zu Band III, 3. Teil.

* gilt für die Seitenzahlen der Hefte 6 (Artikel E 1) und 7 (Artikel D 11).

B

C

D

E

F

H

I

J

K

L

N

O

P

Q

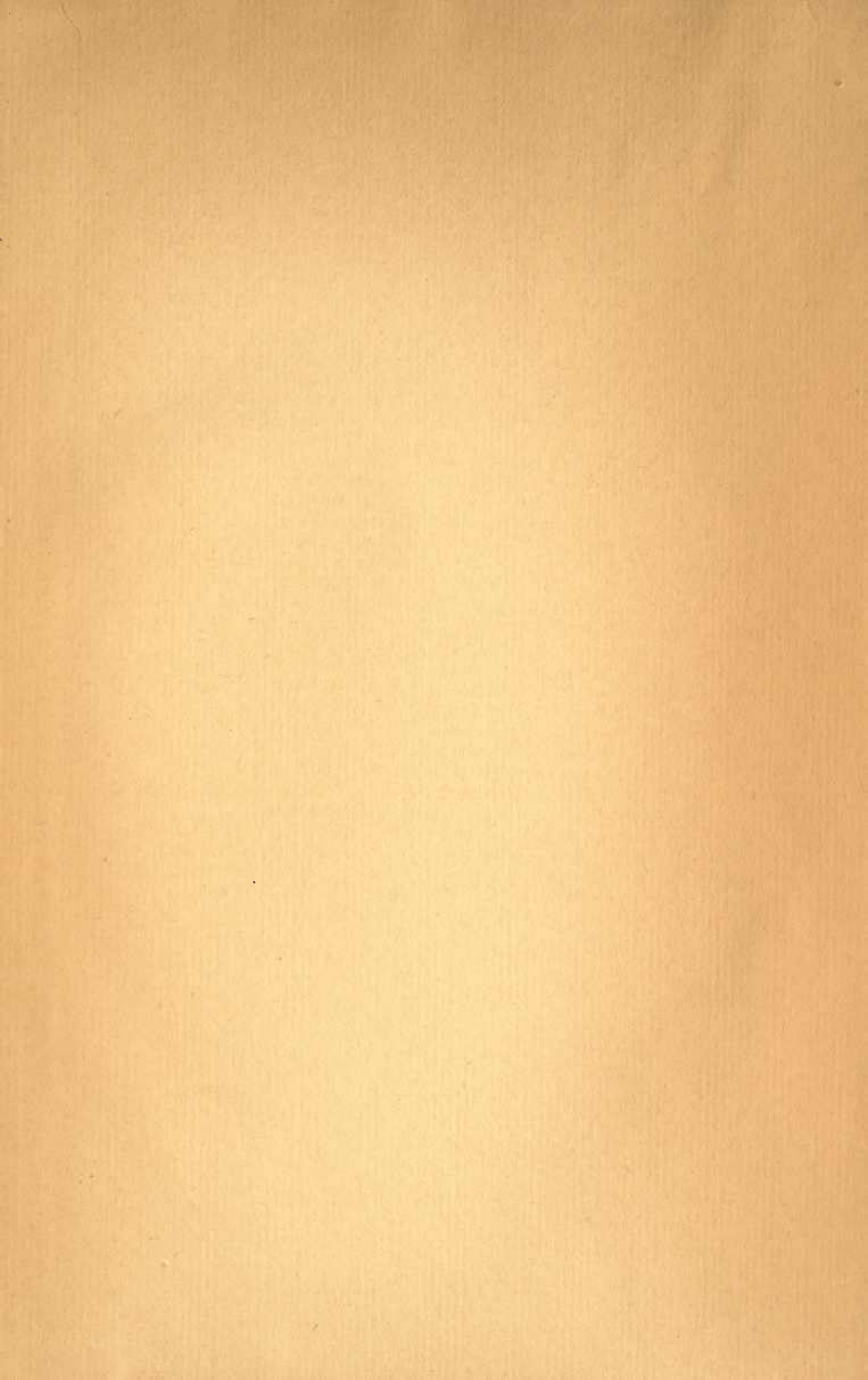
R

S

T

U

V




U. C. BERKELEY LIBRARIES
C048075929

